

THÈSE

présentée devant

L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir

le titre de DOCTEUR

SPÉCIALITÉ ACOUSTIQUE

par

Denis RICOT

SIMULATION NUMERIQUE D'UN ECOULEMENT
AFFLEURANT UNE CAVITE PAR LA METHODE
BOLTZMANN SUR RESEAU ET APPLICATION
AU TOIT OUVRANT DE VEHICULES AUTOMOBILES

Soutenue le 13 décembre 2002

JURY

Examineurs: M. C. BAILLY
M. A. HIRSCHBERG (Rapporteur)
M. D. JUVÉ (Président)
M. P. LAFON (Invité)
Mme V. MAILLARD
M. Y.-H. QIAN
M. P. SAGAUT (Rapporteur)

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, UMR CNRS 5509
École Centrale de Lyon

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du Groupe Acoustique de la Direction de la Recherche de Renault. Je remercie le responsable de cette équipe, Stéphane Bonnet de m'avoir accueilli chaleureusement. J'ai été encadré par Virginie Maillard, que je tiens à remercier pour la confiance, le soutien et la liberté qu'elle m'a accordé durant ces trois années.

Mon directeur de thèse était Christophe Bailly. Je le remercie pour ses conseils avisés et pour son investissement dans la compréhension de la méthode Boltzmann sur Réseau qui était nouvelle pour nous tous au début de mon travail.

Je remercie également Daniel Juvé pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et pour avoir accepté de présider mon jury.

Je tiens à remercier Pierre Sagaut et Mico Hirschberg, rapporteurs de ma thèse, pour leurs commentaires pertinents et constructifs : ils nous donnent déjà de nouvelles pistes de réflexion.

Je voudrais aussi remercier Philippe Lafon d'avoir jugé mon travail et YueHong Qian pour m'avoir transmis, dès notre première rencontre, son enthousiasme pour la méthode Boltzmann sur Réseau.

Je remercie Luc Mongeau de nous avoir donné une version programmée de son modèle analytique qui a été modifié et exploité pour le calcul du battement de toit ouvrant.

Malgré un séjour de courte durée à Ecully au début de ma thèse, j'ai pu apprécier l'ambiance sympathique du Centre Acoustique du LMFA. Je remercie particulièrement Xavier Gloerfelt et Christophe Bogey pour leur accueil chaleureux à chacune de mes visites.

Chez Renault, de nombreuses personnes m'ont aidé durant ma thèse. Je remercie tout d'abord les *pilotes* qui ont supporté pendant de longues minutes le battement de toit ouvrant lors des mesures sur piste : Yann Leduc, Jean-Claude Senaud et Michel Brault. Je remercie également Alessia Maniscalco, Bénédicte Brevet, Stéphane Renard et Olivier Gachet pour leur implication.

Merci à Olivier Vaillant et Emmanuel Thomy pour les échanges fructueux et l'ambiance de travail chaleureuse. J'associe d'ailleurs à ces remerciements toutes les personnes du Groupe Acoustique.

Enfin, je remercie mon amie, Anna, pour son soutien et son amour.

Résumé :

Simulation numérique d'un écoulement affleurant une cavité par la méthode Boltzmann sur Réseau et application au toit ouvrant de véhicules automobiles

Cette étude a pour objectif industriel la prédiction du phénomène de battement de toit ouvrant. Ce problème est tout d'abord mis en évidence par des mesures de pression acoustique sur des véhicules réels complétées par des mesures fils chauds sur une maquette simplifiée. Une analyse critique des différents modèles analytiques de l'oscillation d'un écoulement affleurant une cavité disponibles dans la littérature est présentée. Un de ces modèles est modifié et validé pour le calcul du battement de toit ouvrant.

Cependant, pour prendre en compte la géométrie réelle des toits ouvrants, une approche numérique est nécessaire. La possibilité de réaliser des simulations aéroacoustiques avec la méthode Boltzmann sur Réseau (LBM) est étudiée. La théorie associée à ce nouveau schéma numérique est développée en détail. La validité de la troncature du développement polynomial de la fonction d'équilibre de Maxwell-Boltzmann est démontrée de façon rigoureuse. Un code bidimensionnel basé sur le modèle classique à neuf vitesses est développé. Un schéma de filtrage sélectif des fluctuations numériques de petite longueur d'onde est introduit pour assurer la stabilité de la méthode pour les calculs à viscosité faible. Une condition aux limites hybride minimisant les réflexions des ondes acoustiques sur les frontières du domaine est proposée : elle est basée sur le calcul par différences finies de l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes. Des cas tests montrent que la faible dissipation numérique de la LBM permet de calculer simultanément les fluctuations aérodynamiques et acoustiques dans un écoulement. Cependant, la dispersion numérique des ondes acoustiques n'est pas négligeable même pour un nombre de points par longueur d'onde de l'ordre de dix. Une simulation directe du bruit rayonné par un écoulement affleurant une cavité rectangulaire est présentée. Les mécanismes physiques de bouclage de phase pour l'établissement des oscillations auto-entretenues et de génération du bruit par l'impact des tourbillons sur le bord aval sont bien retrouvés.

Dans le cadre de calculs industriels, le code commercial PowerFLOW basé sur la LBM est utilisé. Le développement d'une couche de mélange libre est tout d'abord simulé. Une dissipation trop importante des instabilités aérodynamiques est observée : elle est due à la surestimation de la viscosité turbulente obtenue par le modèle $k - \epsilon$. L'oscillation auto-entretenu de l'écoulement affleurant la cavité de Helmholtz étudiée par Nelson (1981) est simulée en 2D et 3D. Le mécanisme d'accrochage en fréquence de l'oscillation autour de la fréquence de résonance de la cavité et le maximum du niveau d'oscillation à la vitesse critique sont bien retrouvés. Pour le calcul 3D réalisé à la vitesse critique, les niveaux de fluctuations aérodynamiques dans l'ouverture et le niveau de pulsation acoustique dans la cavité sont en accord avec l'expérience. Les résultats des simulations réalisées sur un véhicule réel avec et sans déflecteur sont confidentiels Renault, ils ne sont pas présentés dans ce document.

Abstract :

Numerical simulation of the flow past a cavity using Lattice Boltzmann Method and application to automotive sunroof

The industrial objective of this study is the prediction of sunroof buffeting. This phenomenon is firstly investigated by acoustic pressure measurements on real vehicles and by hot-wire measurements on a simplified mock-up. A critical analysis of the various analytical models of cavity flow oscillation that can be found in literature is presented. One of these models is modified and validated for the calculation of sunroof buffeting.

However, a numerical approach is required to take into account the real shape of automotive sunroofs. The possibility to use the Lattice Boltzmann Method (LBM) for aeroacoustics simulations is studied. The theory of this new numerical scheme is fully developed. The truncation of the polynomial development of the Maxwell-Boltzmann equilibrium distribution is rigorously demonstrated. A two-dimensional solver based on the well-known nine-velocity model is developed. A selective filter that damps short numerical waves is added in order to improve the numerical stability of low viscosity computations. A hybrid boundary condition that minimizes the spurious reflections of acoustic waves on the limits of the calculation domain is proposed : it is based on a finite difference discretization of the discrete velocity Boltzmann equation. Test case simulations show that the LBM is a low-dissipative scheme : it is therefore possible to calculate simultaneously the aerodynamic and acoustic fluctuations of the flow. However, the numerical dispersion of the acoustic waves is not negligible even if the number of points by wavelength is in the order of ten. A direct simulation of the noise radiated by the flow over a rectangular cavity is presented. The phase loop mechanism associated with self-sustained oscillations and the generation of noise by the impingement of vortices upon the downstream corner are well recovered.

In the framework of industrial simulations, the commercial code PowerFLOW based on LBM is used. A free shear layer is firstly simulated. An excessive dissipation of the aerodynamic instabilities is observed : it is due to the overestimation of the eddy viscosity introduced by the $k - \epsilon$ turbulence model. The self-sustained oscillation of the flow past the Helmholtz cavity studied by Nelson (1981) is computed in 2D and 3D. The frequency lock-on around the cavity resonance frequency and the maximum amplitude of oscillation at the critical flow speed are well obtained. For the 3D calculation performed at the critical speed, the levels of the velocity fluctuations in the shear layer and the acoustic pressure level inside the cavity are in agreement with experimental data. The real vehicle simulations with and without deflector are confidential Renault results and are not presented in this document.

Table des matières

Introduction	11
1 Oscillation auto-entretenu d'un écoulement affleurant une cavité : analyse et modélisation analytique	17
1.1 Mise en évidence et description des phénomènes physiques	18
1.1.1 Instabilité des écoulements cisailés	19
1.1.2 Sheartone	21
1.1.3 Résonance de Helmholtz d'une cavité	26
1.1.4 Couplage acoustique/aérodynamique	30
1.1.5 Mesures du battement de toit ouvrant	33
1.2 Modèles analytiques	39
1.2.1 Modélisation du sheartone	40
1.2.2 Modélisation du couplage aérodynamique/acoustique	43
1.2.3 Optimisation et validation du modèle de Kook-Mongeau	52
1.2.4 Conclusion	57
1.3 Méthodes d'atténuation des oscillations auto-entretenues	58
1.3.1 Modifications géométriques	58
1.3.2 Méthodes d'atténuation actives	59
1.4 Conclusion	61
2 La méthode Boltzmann sur Réseau	63
2.1 De Boltzmann à Navier-Stokes	63
2.1.1 L'équation de Boltzmann continue	63
2.1.2 Les invariants de collision et les équations de conservation	64
2.1.3 L'opérateur de collision	65
2.1.4 Fermeture des équations de conservation : développement de Chapman-Enskog	67
2.2 L'équation de Boltzmann à vitesses discrètes	69
2.2.1 Position du problème	70
2.2.2 Développement en polynômes d'Hermite	70
2.2.3 Quadrature de Gauss-Hermite	72
2.2.4 Commentaires sur l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes	72
2.2.5 L'exemple du modèle bidimensionnel à neuf vitesses	75

2.3	L'équation de Boltzmann sur Réseau	76
2.3.1	Intégration de l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes	76
2.3.2	La fonction de distribution équivalente	77
2.4	Méthode traditionnelle de construction des modèles Boltzmann sur Réseau	78
2.4.1	La méthode des Gaz sur Réseau et son extension	78
2.4.2	Le développement de Chapman-Enskog	80
2.4.3	La procédure d'identification	81
2.4.4	L'exemple du modèle 54 vitesses du code PowerFLOW	83
2.5	Discrétisations spatiale et temporelle	85
2.5.1	Maillage uniforme	85
2.5.2	Algorithme général de la LBM	86
2.5.3	Maillage non-uniforme	86
2.6	Les conditions aux limites	87
2.6.1	Problématique générale	87
2.6.2	Conditions de paroi : rebond total arrière et réflexion spéculaire	88
2.6.3	Méthodes pour les conditions aux limites de vitesse ou de pression	90
2.6.4	Conditions aux limites pour les parois non planes	92
2.7	Validations et études de la précision de la LBM	95
2.7.1	Écoulements stationnaires ou forcés	96
2.7.2	Écoulements instationnaires et turbulents	98
2.7.3	Propagation acoustique	99
2.7.4	Discrétisation de l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes	99
2.8	Conclusions	100
3	La méthode Boltzmann sur Réseau pour la simulation en aéroacoustique	103
3.1	Etude préliminaire	103
3.1.1	Rappel du modèle $D2Q9$	103
3.1.2	Lien entre l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes et l'équation de Boltzmann sur Réseau	104
3.2	Modélisation de la turbulence	108
3.2.1	Modèles du type $k - \epsilon$	108
3.2.2	Simulation des grandes échelles	109
3.2.3	Calcul du taux de déformation	111
3.2.4	Conclusion	113
3.3	Stabilité numérique de la méthode	113
3.4	Etude de la propagation acoustique	115
3.4.1	Modèle linéaire et simulation à viscosité nulle	115
3.4.2	Dispersion et dissipation	118
3.4.3	Etude de la convergence	121
3.4.4	Conclusion	122
3.5	Conditions aux limites optimisées	123

3.5.1	Fonctions d'équilibre étendues pour la condition de paroi	123
3.5.2	Condition de rayonnement	124
3.6	Simulation du bruit de cavité	126
3.6.1	Précédentes études numériques	126
3.6.2	Configuration et paramètres de calcul	127
3.6.3	Oscillation d'un écoulement à faible nombre de Mach	130
3.6.4	Calcul du rayonnement acoustique émis par un écoulement affleurant à $M = 0.25$ une cavité rectangulaire de rapport $L/D = 2$	133
3.7	Conclusions	136
4	Simulation du battement de toit ouvrant avec le code PowerFLOW	139
4.1	Présentation du logiciel commercial PowerFLOW	141
4.1.1	Rappel des principaux aspects du code PowerFLOW	141
4.1.2	Modélisation de la turbulence	141
4.1.3	Contrôle de la stabilité numérique : viscosité de base	143
4.2	Simulations de principe	144
4.2.1	Couche de mélange libre	144
4.2.2	Simulation du sheartone	146
4.2.3	Propagation et résonance acoustique	148
4.2.4	Simulation d'un écoulement affleurant une cavité de Helmholtz	152
4.2.5	Conclusions	158
4.3	Méthodologie de calcul pour un véhicule réel	159
4.4	Simulation du battement de toit ouvrant sur le véhicule D	159
4.5	Simulation de la maquette de véhicule	159
4.6	Conclusions	159
	Conclusion	161
	Principaux résultats de la thèse	165
	Annexes	167
	Notations	173
	Glossaire	183
	Bibliographie	199

Introduction

Problématique industrielle

Avec la réduction progressive du bruit émis par les moteurs, le bruit d'origine aérodynamique est devenu une source non négligeable de nuisance sonore dans l'habitacle des véhicules. Ce domaine technique nouveau dans l'industrie automobile apparaît dans une période où des efforts très importants sont réalisés pour la réduction des délais et des coûts de développement des nouveaux projets véhicules. Ainsi, les temps de mise au point se réduisent de façon très significative et le nombre de supports physiques d'essai (prototypes) est aussi réduit au maximum. Dans ce contexte, une approche numérique se révèle indispensable.

Dans le secteur automobile, les problèmes aéroacoustiques couvrent une très large variété de phénomènes physiques[40, 147, 165, 180]: bruit de la turbulence de paroi (excitation des vitrages par les écoulements décollés tels que les tourbillons de montant de baie), bruits de sillage (sillage des accessoires tels que le rétroviseur, les essuie-glaces, l'antenne radio), bruits de ventilateurs (ventilateur axial de refroidissement moteur, ventilateur radial du système de climatisation), bruits en conduite (système de climatisation, circuits d'admission d'air et d'échappement), bruits de cavité (césures de portes, résonateurs quart d'onde et de Helmholtz du système d'admission, toit ouvrant). Bien entendu cette liste n'est pas exhaustive. On conçoit alors qu'une approche unique n'est pas envisageable pour traiter tous ces problèmes. Selon les cas, on peut donc choisir de construire un outil prédictif à partir d'un modèle analytique, d'une approche empirique ou d'une simulation numérique partielle ou totale du phénomène. Dans tous les cas, l'objectif final est le même: il s'agit d'établir une méthode de calcul qui permette de prédire les phénomènes, de les quantifier (au moins de manière relative) pour, au final, valider les solutions techniques sans avoir recours à un support d'essai physique. C'est typiquement en ces termes que se pose le problème de la modélisation du phénomène de battement de toit ouvrant.

Pour certaines vitesses du véhicule (que l'on appelle vitesses critiques) et quand le toit ouvrant est ouvert, il se produit dans l'habitacle de fortes pulsations de pression basse fréquence (aux alentours de 20 Hz). Ces fluctuations sont audibles pour des niveaux supérieurs à 100 dB et peuvent dépasser 130 dB dans certains cas. Non seulement ces pulsations sont excessivement désagréables pour le conducteur et les passagers mais une exposition longue à ce signal acoustique peut entraîner des problèmes d'ordre physique (maux de tête, nausées, fatigue). Ce même phénomène se produit également sur certains véhicules quand on ouvre une vitre latérale arrière,

les autres étant toutes fermées. Actuellement, la solution la plus couramment utilisée pour éviter le phénomène de battement de toit ouvrant est de placer un déflecteur d'air au niveau du bord amont de l'ouverture. Cette solution est efficace mais elle a plusieurs inconvénients. Tout d'abord, cette excroissance ressortant de la silhouette longuement travaillée du véhicule est généralement difficile à intégrer dans le design général de la voiture. Le second inconvénient est la génération par cet obstacle d'un bruit aérodynamique large bande d'autant plus gênant qu'il est créé juste au-dessus de la tête des passagers avant. Pour ces deux raisons, la mise au point des déflecteurs vise à optimiser la forme et la position de ceux-ci pour minimiser sa taille et sa hauteur par rapport au profil initial du pavillon. Ces deux contraintes, associées bien sûr à l'objectif final de réduction du battement à un niveau si possible inférieur à 100 dB, rendent le développement de chaque nouveau toit ouvrant très long et fastidieux. De nombreux essais sont nécessaires et l'optimisation finale du déflecteur ne peut se faire que sur un véhicule très représentatif du futur véhicule de série. Avec la diminution très significative du nombre de prototypes et la réduction importante des temps de développement, on comprend alors que cette prestation va rapidement nécessiter l'utilisation d'un outil numérique *virtuel*.

Utilisation des codes CFD pour les simulations en aéroacoustique

A l'heure actuelle, il n'existe pas de code de simulation numérique qui permette de décrire, pour des problèmes concrets industriels, les phénomènes aéroacoustiques par la résolution directe des équations de Navier-Stokes compressibles. L'aéroacoustique numérique (ou CAA pour Computational AeroAcoustics) est pour l'instant cantonnée dans le domaine de la recherche académique[128].

En aéroacoustique automobile, de nombreux problèmes (bruit généré par le tourbillon de montant de baie, bruit de sillage) peuvent être étudiés, en première approximation, à l'aide de schémas numériques incompressibles. En effet, on étudie dans ce cas les fluctuations de pression aérodynamiques générées sur les panneaux du véhicule (vitrage, pavillon) par les différents types d'écoulements turbulents. Le phénomène de propagation acoustique peut être négligé, au moins si l'on s'intéresse uniquement à la première moitié du spectre audible[21]. Dans cette optique, on peut essayer d'utiliser des codes commerciaux de CFD (Computational Fluid Dynamics), qui possèdent pour la plupart un solveur instationnaire. Ces codes sont basés sur la discrétisation par volumes finis ou éléments finis des équations de Navier-Stokes moyennées (ou RANSE pour Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations). Pour fermer le système d'équation, de nombreux modèles de turbulence peuvent être intégrés. Les plus courants sont le modèle de type $k - \epsilon$ et ses dérivés. Le principal problème de cette approche RANSE + modèle de turbulence est la dissipation trop importante introduite par la viscosité turbulente. Cette caractéristique est liée au fait que ces modèles ont été développés pour des calculs stationnaires dans lesquels tous les mécanismes de la turbulence (diffusion, dissipation) associés à toutes les échelles tourbillonnaires sont représentés par la viscosité turbulente.

L'alternative naturelle pour calculer plus finement les écoulements instationnaires est d'utiliser

un des modèles de viscosité de sous-maille développés dans le cadre de la Simulation des Grandes Echelles (ou LES pour Large Eddy Simulation). Même si certains codes commerciaux proposent déjà cette option de calcul, les schémas de discrétisation sont encore trop peu précis et les temps de calcul trop importants pour rendre cette technique exploitable pour des applications industrielles. En particulier, une des contraintes principales de la LES est la nécessité de mailler très finement les couches limites. Actuellement, des méthodes hybrides RANS/LES sont en cours de développement pour limiter la taille des calculs. Elles sont basées sur l'utilisation d'une modélisation des couches limites turbulentes par une loi de paroi et d'un modèle de viscosité de sous-maille, se rapprochant des modèles LES, pour les zones de l'écoulement éloignées des surfaces solides. Le modèle DES[196] (Detached Eddy Simulation) est un exemple de cette nouvelle approche.

Malgré ces progrès, la plupart des phénomènes acoustiques (propagation, résonance, couplage) qui nécessitent une assez grande précision du calcul et bien entendu un modèle compressible, sont encore inaccessibles au calcul direct à l'aide des schémas numériques basés sur la discrétisation des équations de Navier-Stokes. Or, en aéroacoustique automobile, de nombreux problèmes font intervenir ces mécanismes physiques. Comme on le verra dans la suite de ce document, le battent de toit ouvrant est un des exemples caractéristiques qui nécessite la prise en compte de la compressibilité de l'air. Le calcul du bruit généré par les écoulements en conduit en est un autre exemple. Enfin, le calcul du bruit intérieur généré par l'écoulement turbulent autour du véhicule doit faire intervenir la contribution de l'excitation des parois par les fluctuations acoustiques pour les fréquences situées dans la deuxième moitié du spectre audible[21]. En effet, dans cette zone fréquentielle, l'excitation acoustique ne peut plus être négligée par rapport à l'excitation purement aérodynamique.

Depuis le milieu des années 90, il existe un logiciel commercial de simulation en mécanique des fluides, PowerFLOW [56], qui offre une alternative aux codes basés sur la discrétisation des équations de Navier-Stokes. En effet, PowerFLOW utilise la méthode Boltzmann sur Réseau (ou LBM pour Lattice Boltzmann Method).

Historique de la méthode Boltzmann sur Réseau

Physiquement, un gaz peut être représenté à deux niveaux. Au niveau macroscopique, le gaz est décrit par une série de variables (pression, vitesse, température) qui définit son état thermodynamique dans l'écoulement considéré. Au niveau microscopique, le gaz est un ensemble de molécules qui se déplacent et interagissent. Tout comme la résolution numérique des équations de Navier-Stokes permet de calculer l'évolution des variables macroscopiques dans le temps et dans l'espace, des approches numériques ont été proposées pour la simulation du gaz au niveau microscopique. La méthode la plus directe est la dynamique moléculaire[73]. Comme son nom l'indique, il s'agit de résoudre pour chaque molécule les équations différentielles qui régissent son mouvement et ses collisions avec les autres molécules. On peut facilement imaginer que cette approche est très coûteuse en temps et en taille de calcul. Elle est donc limitée à des simulations de principe très simples. Tant sur le plan théorique que sur le plan numérique, il est extrêmement compliqué de

prendre en compte individuellement chaque molécule du fluide. C'est la raison pour laquelle la théorie cinétique des gaz a été introduite[109].

Dans cette théorie, on s'attache à décrire le gaz à partir de fonctions statistiques qui englobent chacune un paquet de molécules. Globalement, en un point et en un instant donnés, au lieu de s'attacher à connaître le nombre de molécules et la vitesse de chacune de ces molécules, on décrit l'état du fluide grâce à une fonction qui représente la probabilité d'existence d'une molécule possédant une vitesse donnée, en un point et en un instant donnés. Bien entendu, en faisant la somme sur toutes ces fonctions (c'est à dire en balayant toutes les vitesses possibles), on obtient la totalité des molécules. Ainsi, cette fonction de probabilité peut s'interpréter comme une fonction de distribution qui décrit le nombre de molécule possédant une vitesse donnée. Au lieu d'écrire une équation de mouvement pour chaque molécule, l'évolution du gaz peut alors être représentée par une équation qui décrit l'évolution de la fonction de distribution. Pour certains gaz, cette équation est l'équation de Boltzmann. Grâce aux travaux de Hilbert (début du siècle), puis de Chapman et Enskog[29], il a pu être montré théoriquement que l'on pouvait retrouver les équations d'Euler et de Navier-Stokes à partir de l'équation de Boltzmann. Malheureusement, dans sa forme initiale, l'équation de Boltzmann n'est pas plus simple à résoudre numériquement que les équations de conservation macroscopiques à cause, notamment, de la présence d'une variable indépendante supplémentaire (la vitesse des particules fluides) qui s'ajoute aux variables classiques de temps et d'espace. Ainsi, Broadwell[22] puis Gatignol[63] ont construit des modèles de Boltzmann à vitesses discrètes (ou DVM pour Discrete Velocity Model) dans lesquels le nombre et la direction des vitesses possibles des particules sont fixés. Ces modèles furent essentiellement exploités sur le plan théorique : le temps et l'espace restent dans le domaine continu.

Un peu plus tard, dans les années 70, des modèles totalement discrets sont proposés. Ils ne font pas appel à l'équation de Boltzmann mais ils sont basés sur les principes de la théorie cinétique transposés dans un espace physique totalement discret en espace, en temps et en vitesse. Le premier modèle de Gaz sur Réseau (ou LGA pour Lattice Gas Automata) défini par Hardy, Pazzis et Pomeau[80] (modèle HPP) ne permet cependant pas de retrouver de façon exacte les équations de conservation macroscopiques. Il faudra attendre le milieu des années 80 pour obtenir un modèle de Gaz sur Réseau qui permette de simuler des écoulements régis par les équations de Navier-Stokes : c'est le modèle bidimensionnel FHP (Frisch, Hasslacher & Pomeau[62]). Avec l'apparition rapide de modèles 3D[51], cette méthode a fait l'objet, à l'époque, d'un intérêt très important de la part de la communauté de la mécanique des fluides. En effet, cette approche totalement nouvelle semblait promettre une avancée certaine dans le domaine très critique de la modélisation de la turbulence. Malheureusement, on peut dire que ces espoirs ont été rapidement déçus. La déception fut d'autant plus grande qu'il est apparu que la LGA souffre de nombreux défauts (bruit de fond statistique, pas d'invariance Galiléenne,...) : indépendamment du problème de la modélisation de la turbulence, cette méthode numérique n'est donc pas susceptible de concurrencer les schémas numériques classiques.

C'est principalement, pour faire disparaître les défauts de la LGA que la méthode Boltzmann sur Réseau a été introduite au début des années 90. D'après son nom, on voit que cette méthode a un lien fort avec l'équation de Boltzmann.

Objectifs de la thèse

C'est donc un des objectifs de cette thèse que d'étudier si la LBM peut être considérée comme une approche numérique alternative à la résolution des équations de Navier-Stokes pour les simulations en mécanique des fluides. En particulier, nous étudierons la possibilité d'utiliser cette méthode pour les simulations en aéroacoustique.

L'autre ambition de cette thèse est de répondre à la problématique industrielle présentée au début de cette introduction. Il s'agit de construire une méthode de calcul du phénomène de battement de toit ouvrant en vue de la mise au point numérique des déflecteurs ou d'autres systèmes anti-battements. Nous verrons que pour cela, le code commercial PowerFLOW sera utilisé.

Organisation du mémoire

Le battement de toit ouvrant est un des exemples concrets du phénomène d'oscillation auto-entretenu d'un écoulement affleurant une cavité. La première partie de ce document présente une revue détaillée des différents mécanismes physiques qui entrent en jeu dans ce phénomène. Les différents types de couplage sont décrits. Des mesures du battement de toit ouvrant sur véhicule et sur maquette sont proposées et un modèle analytique de calcul de la fréquence et du niveau des fluctuations de pression acoustique est validé. Cette première partie fait donc la synthèse de tous les paramètres physiques que l'approche numérique devra prendre en compte.

Le second chapitre présente la méthode Boltzmann sur Réseau. L'accent est mis sur le lien explicite entre la théorie continue (l'équation de Boltzmann) et l'approche discrète.

Dans la troisième partie, un code bidimensionnel est développé spécifiquement pour les calculs aéroacoustiques. Les problèmes de stabilité du calcul, de la modélisation de la turbulence, des conditions aux limites et de la précision sont abordés. L'application de ce code est réalisée sur le cas d'un écoulement affleurant une cavité rectangulaire.

Pour les applications industrielles, un code commercial est nécessaire. Le dernier chapitre propose donc la validation du code PowerFLOW pour la simulation du phénomène de battement de toit ouvrant. Différents cas tests académiques sont étudiés. La partie de ce travail de thèse concernant la mise en œuvre et la validation des simulations sur un véhicule réel est confidentielle et n'est donc pas présentée dans ce document.

Chapitre 1

Oscillation auto-entretenu d'un écoulement affleurant une cavité : analyse et modélisation analytique

Le bruit produit par une cavité soumise à un écoulement affleurant est un sujet très vaste et qui a fait l'objet de très nombreuses études. Ce problème général peut se diviser en plusieurs catégories et sous catégories :

1. Le bruit large bande généré par les fluctuations aérodynamiques de l'écoulement turbulent affleurant constitue la première catégorie. Le spectre acoustique peut éventuellement comporter des fréquences émergentes qui correspondent aux fréquences de résonance de la cavité[71]. Dans le domaine de l'automobile, ce phénomène est à l'origine du bruit de césure (joints de porte).
2. Le bruit du type tonal qui résulte d'une organisation cohérente des instabilités aérodynamiques se développant dans l'écoulement affleurant est la seconde famille de phénomènes de bruit de cavité. Le problème du battement de toit ouvrant entre dans cette catégorie. Cependant, plusieurs phénomènes physiques différents peuvent conduire à l'auto-oscillation de la couche de mélange :
 - (a) **Sheartone** : Sous ce terme, on regroupe à la fois les auto-oscillations engendrées par couplage aérodynamique et par couplage acoustique direct :
 - i. *Couplage aérodynamique* : L'interaction des instabilités avec le bord aval de la cavité génère des fluctuations aérodynamiques qui excitent la couche de mélange au niveau de la séparation de l'écoulement (bord amont).
 - ii. *Rétroaction acoustique directe* : L'impact des instabilités avec le bord aval génère des fluctuations acoustiques qui se propagent vers l'amont. Ces ondes acoustiques excitent la couche de mélange au niveau de la séparation.

Nous verrons par la suite que la distinction entre les deux phénomènes dans cette catégorie n'a pas de réelle argumentation physique.

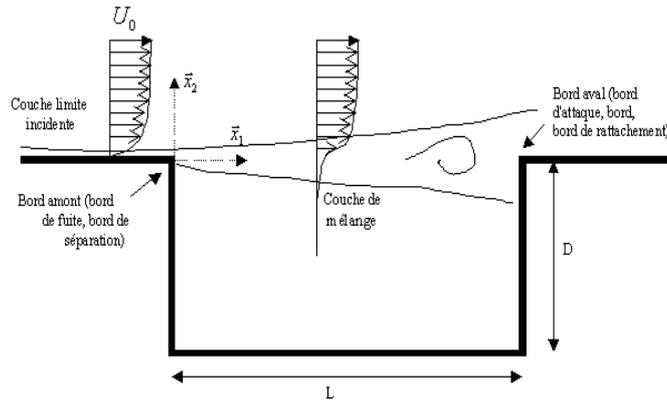


FIG. 1.1 – Schéma d'un écoulement affleurant une cavité.

- (b) **Couplage avec une résonance** de la cavité : Les fluctuations aérodynamiques excitent acoustiquement la cavité. Si la fréquence de cette excitation est proche d'une fréquence de résonance de la cavité, l'écoulement acoustique généré au niveau de l'ouverture peut exciter de manière périodique la couche de mélange. Les résonances de cavité peuvent être classées de la façon suivante :
- i. *Modes acoustiques normaux* : modes acoustiques transversaux et longitudinaux (modes d'une cavité fermée) ;
 - ii. *Modes de profondeur* : modes quart d'onde d'une cavité ouverte à une extrémité ;
 - iii. *Résonance de Helmholtz* : mode de volume, appelé parfois mode zéro de la cavité.
- (c) **Couplage aéro-élastique** : Ce cas de couplage se rencontre beaucoup plus rarement. Les fluctuations aérodynamiques et/ou acoustiques générées par l'impact des instabilités sur le bord aval excitent la structure solide de la cavité. Les vibrations des parois au niveau du bord amont peuvent exciter la couche de mélange et piloter la création d'une nouvelle instabilité.

Etant donné la multitude des configurations qui conduisent à une auto-oscillation de l'écoulement affleurant une cavité, ce chapitre s'attache à décrire seulement les phénomènes physiques qui entrent en jeu dans le cas des écoulements à faible nombre de Mach affleurant des cavités à parois parfaitement rigides.

1.1 Mise en évidence et description des phénomènes physiques

Le phénomène d'oscillation auto-entretenu d'un écoulement affleurant une cavité est un exemple relativement complexe d'interaction fluide/solide. La multitude de mécanismes physiques qui peuvent intervenir et la diversité des configurations qui conduisent à ce phénomène interdisent de tenter une explication globale et synthétique du problème.

1.1.1 Instabilité des écoulements cisailés

Un des mécanismes central du phénomène d'auto-oscillation est l'instabilité hydrodynamique naturelle de l'écoulement qui se développe au-dessus de l'ouverture de la cavité.

Paramètres caractéristiques de l'écoulement

En amont de la cavité, l'écoulement est du type couche limite. Cette couche limite peut-être laminaire ou turbulente. Pour le cas de l'écoulement en amont de l'ouverture d'un toit ouvrant, la couche limite est turbulente. Pour décrire le profil de vitesse moyenne, on trouve classiquement deux expressions analytiques :

– Profil exponentiel :

$$u_1(x_2) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{|x_2|}{2\theta_0}} \right) \quad (1.1)$$

– Profil de vitesse en puissance $\left(\frac{1}{7}\right)^{\text{ème}}$:

$$u_1(x_2) = U_0 \left(\frac{x_2}{\delta_0} \right)^{\frac{1}{7}}$$

où U_0 est la vitesse de l'écoulement, δ_0 est l'épaisseur de couche limite, θ_0 est l'épaisseur de quantité de mouvement et x_2 la coordonnée transverse à l'écoulement (voir figure 1.1).

Pour ces deux expressions de profil moyen, on a : $\delta_0 \approx 10 \theta_0$. Juste après le décollement au niveau du bord amont de l'ouverture, étant donné que le fluide à l'intérieur de la cavité (habitacle du véhicule) est au repos, l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche de mélange est égale à l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche limite amont[61]. Cette grandeur θ_0 sera dans toute la suite le principal paramètre physique caractérisant l'écoulement affleurant.

Pour une couche de cisaillement turbulente, le mélange entre les écoulements rapide et lent se fait très rapidement après le décollement. Le profil de vitesse peut être alors exprimé par une fonction du type tangente hyperbolique[61] :

$$u_1(x_2) = \frac{U_0}{2} \left(1 + \tanh \left(\frac{x_2}{2\theta_0} \right) \right) \quad (1.2)$$

A partir d'un profil de vitesse expérimental ou numérique, on détermine la valeur de θ_0 à partir de sa définition :

$$\theta_0 = \int_0^\infty \frac{u_1(x_2)}{U_0} \left(1 - \frac{u_1(x_2)}{U_0} \right) dx_2$$

Instabilité d'une couche de mélange

En 1880, Lord Rayleigh a montré qu'une condition nécessaire, et souvent suffisante en pratique, pour qu'un écoulement développe des ondes d'instabilité est que son profil de vitesse moyenne possède un point d'inflexion. Le calcul analytique des fréquences et des taux d'amplification des instabilités a été proposé par Michalke[145] pour le profil de vitesse en tangente hyperbolique (1.2). En faisant l'hypothèse de petites perturbations (analyse linéaire), on peut calculer, pour chaque pulsation d'excitation β_r , les valeurs du nombre d'onde α_r et du taux d'amplification α_i ;

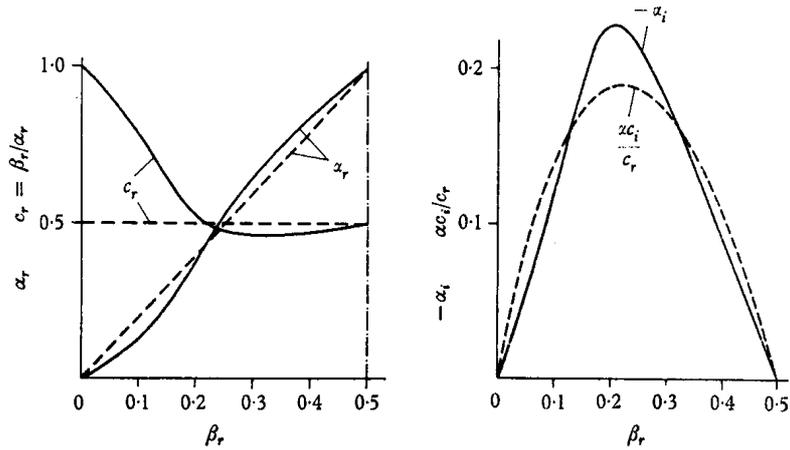


FIG. 1.2 – Nombre d'onde α_r , vitesse de phase c_r et taux d'amplification α_i en fonction de la pulsation β_r donnés par la théorie linéaire[145] de la croissance des instabilités dans une couche de mélange. — croissance spatiale; - - - croissance temporelle. Variables sans dimension.

des fluctuations aérodynamiques (appelées *instabilités de Kelvin-Helmholtz*) qui se développent dans la couche de mélange. La fonction de courant des ondes se propageant dans la direction privilégiée \mathbf{x}_1 (direction longitudinale) s'écrit :

$$\Psi(x_1, x_2, t) = Re \left(\varphi(x_2) e^{-\alpha_i x_1} e^{i(\alpha_r x_1 - \beta_r t)} \right) \quad (1.3)$$

Cette fonction de courant correspond à des perturbations croissantes en espace (en opposition avec des instabilités croissantes en temps). Ce type d'instabilité convective est plus en accord avec les données expérimentales[61]. D'après l'expression de Ψ , la vitesse de phase des perturbations, c'est-à-dire la vitesse de convection des instabilités, est donnée par : $c_r = \beta_r/\alpha_r$. Sur la figure 1.2, on constate que l'on a une amplification maximale des instabilités pour une pulsation adimensionnelle de $\tilde{\beta}_r^{max} = 0.2067$. Cette fréquence centrale correspond donc à la fréquence des instabilités qui se développent de façon préférentielle dans la couche de mélange. Au contraire, les instabilités dont la fréquence correspond à un α_i positif ne pourront pas se développer dans la couche de mélange. Les paramètres $\tilde{\beta}_r$ et \tilde{c}_r sont donnés sous forme adimensionnelle par :

$$\tilde{\beta}_r = 2\theta_0 \cdot \frac{2\pi f}{U_0} \quad (1.4)$$

$$\tilde{c}_r = \frac{U_c}{U_0} \quad (1.5)$$

où $U_c = c_r$ est la vitesse de convection des instabilités.

L'expression de ces coefficients montre que le comportement instable de la couche de mélange dépend des deux paramètres principaux caractérisant l'écoulement, à savoir U_0 et θ_0 . Cette analyse a été réalisée dans le cadre de perturbations linéaires. On constate qu'en réalité, l'amplification des instabilités est rapidement limitée par des phénomènes non linéaires[146]. Ainsi, la plupart des phénomènes tourbillonnaires que l'on observe dans des écoulements cisailés ne sont pas correctement décrits par les expressions des grandeurs aérodynamiques développées dans le cadre des études des instabilités linéaires[199]. Cependant, si l'on se place dans des zones où les

phénomènes de mélange complexes ne sont pas encore apparus (appariement de tourbillons, étirements tridimensionnels...), on constate que les fréquences et les longueurs d'onde des structures tourbillonnaires sont assez bien prédites par la théorie linéaire[9].

Dans le cas d'un véhicule automobile, l'ordre de grandeur de l'épaisseur de quantité de mouvement de l'écoulement en amont de l'ouverture est de $\theta_0 = 2$ mm. Pour une vitesse de $U_0 = 20$ m/s = 72 km/h, la plage fréquentielle d'instabilité de l'écoulement est de $0 < f < 400$ Hz. La fréquence correspondant au taux d'amplification maximal est de $f_{max} = 164$ Hz.

1.1.2 Sheartone

Dans la pratique, la conséquence la plus évidente de l'auto-oscillation du fluide au-dessus d'une cavité est la création d'un son tonal. Historiquement, c'est cette première approche acoustique qui a été utilisée pour essayer de décrire le phénomène. Ainsi, Powell[158] explique l'auto-oscillation de l'écoulement par la rétro-propagation de l'onde acoustique générée par l'impact des instabilités aérodynamiques sur le bord aval de l'ouverture. Cette onde acoustique va exciter de façon périodique la couche de mélange au niveau de la séparation de l'écoulement ce qui conduit à une organisation cohérente des instabilités, appelée *mode aérodynamique*. Ce mécanisme de *rétroaction acoustique directe*, appliqué initialement au cas d'une interaction jet / bord d'impact (*edgetone*), sera largement repris dans le cas des écoulements affleurant une cavité[15, 178].

Cependant, pour des écoulements à faible nombre de Mach, cette approche acoustique n'est plus appropriée. En effet, il a été montré avec des expériences[26, 65, 174], des simulations numériques[79, 213] ou des modèles analytiques[42, 97, 106], que l'écoulement peut être considéré comme incompressible et que l'auto-oscillation est le résultat d'un bouclage purement aérodynamique.

Cette séparation entre couplage acoustique et couplage aérodynamique peut paraître surprenante, d'autant plus qu'il est très difficile d'établir une limite de validité des deux approches en terme de vitesse d'écoulement. Cependant on verra dans la partie 1.2 que cette séparation n'a pas de fondement théorique : ce sont bien les mêmes phénomènes physiques qui sont mis en jeu dans les deux cas. Le couplage aérodynamique peut s'interpréter comme un cas spécial de couplage acoustique pour lequel la longueur de la cavité est négligeable devant la longueur d'onde acoustique. Dans ce cas, la cavité entière est plongée dans le champ très proche de la source acoustique et la rétroaction peut alors s'exprimer sous une hypothèse d'incompressibilité du fluide.

Par similitude avec le phénomène de *edgetone* (interaction jet / coin), l'interaction couche de mélange / coin est appelée *sheartone*. On emploie ce terme à la fois pour les écoulements rapides (rétroaction acoustique) et pour les écoulements lents (couplage aérodynamique). Dans le cadre de l'étude du battement de toit ouvrant, c'est bien entendu cette deuxième catégorie qui nous intéresse. Les études expérimentales ou théoriques du sheartone sont peu nombreuses pour des écoulements à faible nombre de Mach. En effet, historiquement, la plupart des problèmes de bruit de cavité qui ont été étudiés sont liés à des applications dans le domaine de l'aéronautique. Etant donné que le sheartone résulte d'un couplage de faible énergie, le bruit de cavité à basse vitesse n'apparaît véritablement comme un problème que quand il met en jeu une résonance acous-

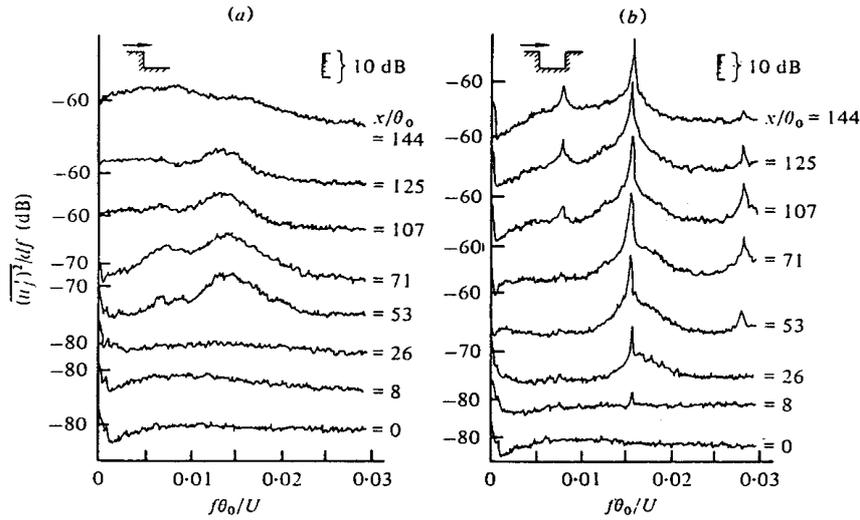


FIG. 1.3 – Evolution longitudinale des spectres de vitesse dans la zone de mélange (Rockwell & Knisely[174]). (a) sans bord d'impact; (b) avec bord d'impact.

tique de la cavité. L'intervention d'une résonance acoustique implique des niveaux de fluctuations qui peuvent être très importants, et en tous cas beaucoup plus grands que ceux produits par le sheartone. Ainsi, la configuration écoulement / cavité résonante a été soumise à de nombreuses campagnes de mesures. Comme on le verra dans la suite, l'absence d'analyse plus poussée du couplage aérodynamique est préjudiciable, notamment pour l'établissement de modèles analytiques : même si dans les conditions critiques de résonance, le couplage aérodynamique peut être négligé, le sheartone est très important dans les conditions hors résonance. De plus, dans le domaine de l'automobile, le sheartone peut être une source de nuisance sonore : ce phénomène est responsable du sifflement de certaines petites rainures de la carrosserie[147].

Observations expérimentales du sheartone

On dispose d'une série de travaux réalisés sous la direction de D. Rockwell qui montre les principales caractéristiques du mécanisme de couplage aérodynamique.

Mise en évidence des modes aérodynamiques

L'influence d'un bord d'impact sur l'organisation cohérente des instabilités d'une couche de mélange a été mise en évidence en comparant les signaux des fluctuations de vitesse pour des configurations avec et sans bord d'impact[174]. Sur la figure 1.3, les spectres des fluctuations de vitesse sont représentés pour différents points de mesure dans la direction de l'écoulement. Sur la figure de droite, le pic fréquentiel met clairement en évidence l'organisation cohérente et périodique de l'écoulement. On peut aussi noter que les spectres correspondant au développement libre d'une couche de mélange (graphe de gauche) font apparaître une fréquence (faiblement) émergente pour $f\theta_0/U_0 = 0.015$. Cela correspond donc à un $\tilde{\beta}_r = 4\pi f\theta_0/U_0 = 0.18$, ce qui est peu éloigné de la valeur théorique $\tilde{\beta}_r^{max} = 0.2$ de la fréquence la plus instable de la couche de cisaillement (para-

graphe 1.1.1). Cette légère différence peut s'expliquer en partie par l'incertitude sur la section où l'on doit évaluer l'épaisseur de quantité de mouvement θ caractéristique. En théorie, les fréquences des instabilités dépendent de l'épaisseur de quantité de mouvement locale de l'écoulement. Dans la pratique, on considère souvent que la valeur de θ dans la section $x_1 = 0$ (notée θ_0) est un paramètre suffisant pour caractériser assez convenablement l'écoulement affleurant. Concrètement, pour évaluer θ_0 , on mesure l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche limite juste avant la séparation. Cependant, Rockwell[173] propose plutôt de mesurer l'épaisseur de quantité de mouvement caractéristique θ_m dans une section située au milieu de la zone de croissance linéaire des instabilités.

La forte périodicité de l'écoulement est liée à une organisation en modes aérodynamiques cohérents des instabilités. L'organisation cohérente de l'écoulement provient d'un bouclage de phase (c'est-à-dire un déphasage de $2n\pi$ avec n entier) au point de séparation de l'écoulement entre les fluctuations aérodynamiques des instabilités et les fluctuations responsables de l'excitation. Si l'on considère que la source (acoustique-aérodynamique) est localisée au niveau du bord aval de l'ouverture, le temps entre la naissance d'une instabilité au bord amont et la génération de la source au bord aval est L/U_c . De même, le temps entre la création d'une fluctuation à la source et l'arrivée de cette information au niveau de la séparation est L/c_s , où c_s est la vitesse du son. S'il y a n instabilités présentes simultanément dans l'ouverture, la distance à parcourir par chaque instabilité aérodynamique et par les fluctuations issues de la source se réduit à L/n . La somme des temps aller et retour donne la période du phénomène oscillatoire. On a donc la relation[204] :

$$\frac{L}{U_c} + \frac{L}{c_s} = \frac{n}{f} \quad (1.6)$$

On remarque immédiatement que pour des écoulements à faible nombre de Mach ($M = U_0/c_s \ll 1$), le temps de retour des fluctuations acoustiques est négligeable devant le temps de convection des instabilités aérodynamiques. Dans ce cas, la relation (1.6) donne $L/\lambda_r = n$, où λ_r est la longueur d'onde aérodynamique : il y a donc un nombre entier n d'instabilités aérodynamiques entre les deux bords de la cavité. La figure 1.4 (a) représente des mesures de l'évolution de la phase des fluctuations aérodynamiques le long de l'ouverture de la cavité. Pour ce cas où le nombre de Mach de l'écoulement est très faible ($M = 1.3 \times 10^{-4}$), on vérifie bien la relation $L/\lambda_r = n$ pour $1 < n < 4$. Sur la figure 1.4 (b) correspondant à une simulation numérique directe d'un écoulement à Mach 0.6, la condition de bouclage de la phase est obtenue en prenant en compte le temps de rétro-propagation des ondes de pression.

La valeur de n dépend principalement des paramètres L , θ_0 et U_0 . A priori, la profondeur D de la cavité n'intervient pas. Cependant, si la cavité est peu profonde, il peut y avoir une forte interaction entre la couche de mélange et les recirculations à l'intérieur de la cavité. De plus, la présence de la paroi sous la zone de mélange peut bloquer la croissance des instabilités. Ainsi, Sarohia[182] montre expérimentalement que pour un rapport $D/\delta_0 < 1.3$ il n'y a plus d'oscillation possible.

On peut avantageusement représenter l'influence des paramètres L , θ_0 et U_0 sur les modes aérodynamiques en traçant la fréquence du pic principal du phénomène en fonction du rapport L/θ_0 pour une vitesse amont U_0 fixée. Les résultats présentés sur la figure 1.5 correspondent à

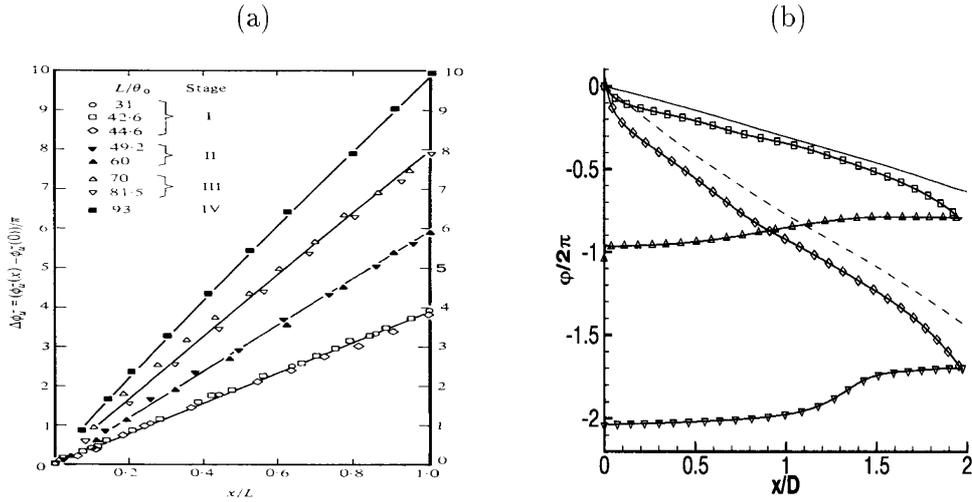


FIG. 1.4 – (a) Evolution longitudinale de la phase des fluctuations de vitesse dans la couche de mélange pour les quatre premiers modes d'oscillation (Ziada & Rockwell[228]). $Re_{\theta_0} = 239$, $M = 1.3 \times 10^{-4}$ (expérience dans l'eau). Sur la figure, il y a une erreur (décalage) sur l'axe des ordonnées : comme indiqué dans le texte de l'article[228], on a bien $\Delta\Phi = 2n\pi$. (b) Evolution de la phase des fluctuations aérodynamiques dans la couche de mélange et des fluctuations de pression au fond de la cavité (simulation numérique directe d'une cavité rectangulaire $L/D = 2$ [179]). Deux modes aérodynamiques peuvent être identifiés dont les fréquences sont $fL/U_0 = 0.4$ (mode $n = 1$) et $fL/U_0 = 0.7$ (mode $n = 2$). Fluctuations de vortacité : \square mode 1; \diamond mode 2. Fluctuations de pression : \triangle mode 1; ∇ mode 2. Les paramètres physiques sont $L/\theta_0 = 52.8$, $Re_{\theta_0} = 56.8$, $M = 0.6$.

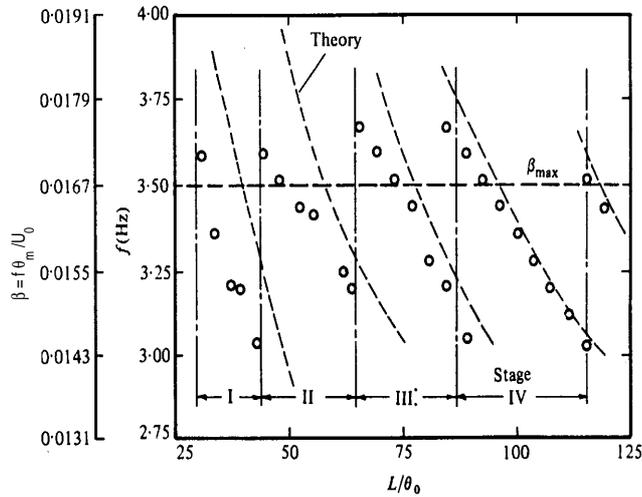


FIG. 1.5 – Evolution de la fréquence adimensionnelle $\beta = f\theta_m/U_0$ du sheartone (Ziada & Rockwell[228]) en fonction de la longueur caractéristique d'impact L/θ_0 . $Re_{\theta_0} = 239$, $M = 1.3 \times 10^{-4}$ (expérience dans l'eau). \circ Mesures; --- fréquences obtenues par la théorie linéaire en utilisant le critère $L/\lambda_r = n$.

un nombre de Mach de $M = 1.3 \times 10^{-4}$. A chaque longueur d'impact L , on peut déterminer la longueur d'onde λ_r , et donc le nombre d'onde $\tilde{\alpha}_r = 2\pi 2\theta_m/\lambda_r$, en utilisant le critère $L/\lambda_r = n$ avec ($n = 1, 2, 3, \dots$). La théorie de la stabilité linéaire (paragraphe 1.1.1) donne la vitesse de

phase \tilde{c}_r , d'où la fréquence théorique des instabilités : $f = \tilde{c}_r U_0 / \lambda_r$. Sur la figure, les auteurs ont aussi représenté la fréquence $\beta_{max} = \tilde{\beta}_r^{max} / 4\pi$ théorique à laquelle la couche de mélange est la plus instable. Malgré une incertitude sur la détermination de θ_m , ce modèle simplifié est en bon accord avec l'observation expérimentale, et il permet de donner une première interprétation de la présence des différents modes aérodynamiques : **le mode présent dans l'ouverture est celui dont la fréquence est la plus proche de la fréquence la plus instable de la couche de mélange**. La bonne corrélation entre cette approche théorique et les mesures sont d'autant plus satisfaisantes que pour évaluer c_r en fonction de α_r , on a utilisé les résultats de la modélisation d'une couche de mélange libre et non pas d'une couche de mélange impactant sur un bord. Pour un écoulement fenêtré, les vitesses de convection des instabilités n'ont aucune raison d'être exactement égales à celles des instabilités se développant dans un écoulement libre. Ainsi, la dépendance $\tilde{c}_r = \tilde{c}_r(U_0, f, \theta)$ devient $\tilde{c}_r = \tilde{c}_r(U_0, f, \theta, L)$ mais il semble, d'après cette étude, que l'influence de L soit du deuxième ordre par rapport aux autres paramètres.

Dans ce modèle, on remarque aussi que la vitesse de convection des instabilités n'est pas supposée constante : elle dépend de la fréquence, et donc de la longueur L de l'ouverture. Cette observation permet d'apporter une interprétation originale du paramètre correctif empirique γ présent dans la formule de Rossiter[178] (n est remplacé par $n - \gamma$ dans l'expression (1.6)). En effet, étant donné que dans la formule de Rossiter la vitesse de convection $U_c = \tilde{c}_r U_0$ est supposée constante, le paramètre γ permet de prendre en compte la variation de \tilde{c}_r en fonction de la fréquence. D'ailleurs, Rossiter[178] propose une valeur différente de γ pour chaque rapport L/D .

Harmoniques et sous-harmoniques

Pour une configuration donnée, on observe généralement des pics secondaires, d'amplitude souvent beaucoup plus faible que l'amplitude de la fréquence principale notée β .

- Les harmoniques du phénomène principal ($2\beta, 3\beta, \dots$) sont associées au comportement non linéaire des instabilités.
- On a vu que pour un jeu de paramètre L , θ_0 et U_0 donné, il existait un mode aérodynamique préférentiel. Cependant, les autres modes possibles ne sont pas physiquement interdits. Ainsi, si le mode n prédomine, il est possible d'observer les modes $n-1$, $n-2, \dots$. Cela est illustré sur la figure 1.6 (a). Sur ces spectres, β représente la fréquence du pic principal qui correspond successivement aux modes aérodynamiques 2 et 3 quand le rapport L/θ_0 augmente. Quand le mode $n = 2$ est le mode aérodynamique principal ($L/\theta_0 = 69, 80$ et 96), on voit apparaître le sous-harmonique 0.5β qui correspond au mode 1. Pour $L/\theta_0 \geq 98$, le mode principal est le mode 3, on observe alors les fréquences correspondant aux sous-harmoniques associées aux modes 1 et 2.

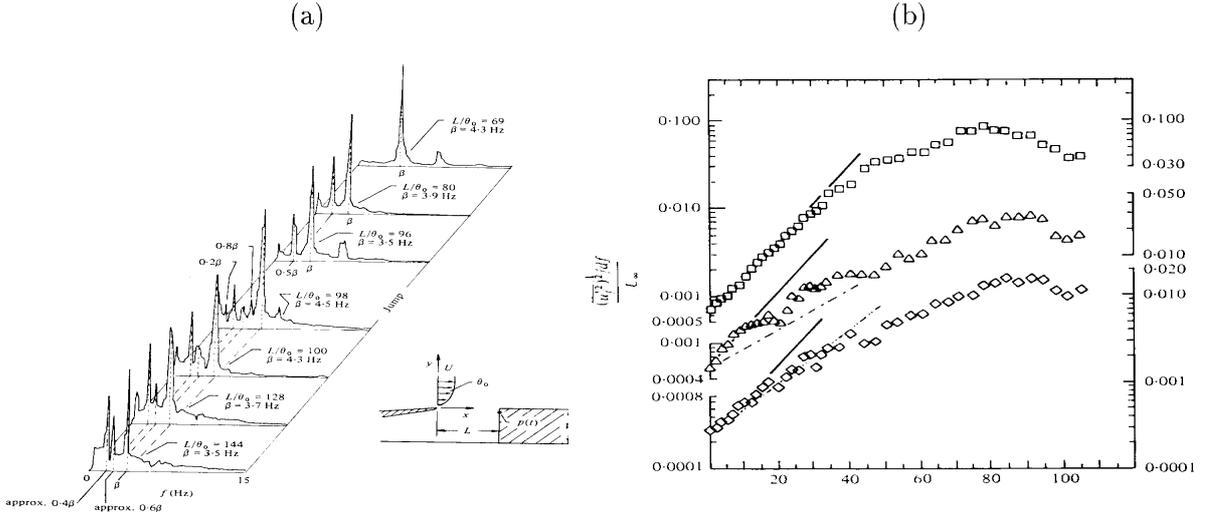


FIG. 1.6 – Mesures de Knisely & Rockwell[116] pour $Re_{\theta_0} = 190$ et $M = 1.7 \times 10^{-4}$. (a) Spectres de pression au bord d'impact en fonction du rapport L/θ_0 . (b) Taux de croissance des différentes composantes spectrales de la vitesse en fonction de la distance longitudinale x_1/θ_0 pour $L/\theta_0 = 100$: \square composante β ; \diamond composante 0.6β ; \triangle composante 0.4β .

Croissance des instabilités

Des mesures de l'évolution suivant x_1 du taux des fluctuations de vitesse ont été réalisées. Les courbes de la figure 1.6 (b) montrent une croissance linéaire initiale des instabilités jusqu'à environ $x_1/\theta_0 = 30$. Au delà, on observe une saturation de l'amplitude des oscillations due au comportement non-linéaire des instabilités. La configuration de l'écoulement correspond au mode aérodynamique 3 (fréquence β). Les auteurs ont aussi représenté sur le graphe l'évolution des taux de fluctuations des sous-harmoniques $\sim 0.4\beta$ (mode 1) et $\sim 0.6\beta$ (mode 2).

1.1.3 Résonance de Helmholtz d'une cavité

La résonance de Helmholtz d'une cavité possédant une ouverture est parfois considérée comme le mode acoustique 0 : à la résonance, le champ de pression $p_{in}(t)$ dans le volume est quasi-uniforme en amplitude et en phase. Une des particularités de cette résonance est qu'elle génère un champ de vitesse acoustique u_a transversal homogène dans l'ouverture (le *col* du résonateur) qui peut avoir une amplitude importante. On traduit généralement ce champ en terme de débit volumique acoustique $Q_a = S u_a$ échangé à travers l'ouverture de section $S = L \times b$.

Modélisation classique

Plusieurs approches sont possibles pour étudier le comportement d'un résonateur de type Helmholtz. La plus classique est la modélisation par éléments-blocs acoustiques basée sur une analogie avec la description d'un circuit électrique en terme de résistances, de capacités et d'inductances. Ce calcul simplifié de l'interaction entre une structure et un champ acoustique est

envisageable dans le cas où toutes les dimensions du solide sont très petites devant la longueur d'onde acoustique.

Sous cette hypothèse, on peut par exemple considérer que l'écoulement acoustique traversant l'orifice du résonateur est de nature incompressible ($\nabla \cdot \mathbf{u}_a = 0$). Pour une section d'ouverture S constante, l'intégration de l'équation d'Euler sur la hauteur h du col du résonateur permet d'écrire :

$$-p_{out}(t) + p_{in}(t) = M_A \frac{dQ_a}{dt} \quad (1.7)$$

où $p_{out}(t)$ est la pression externe et $M_A = h\rho_0/S$ est l'inertance acoustique (ρ_0 est la masse volumique du fluide).

A l'inverse, en considérant les effets de compressibilité à l'intérieur de la cavité et en supposant que la densité (et donc la pression) est uniforme dans le volume ($\nabla \rho = 0$), l'intégration sur tout le volume intérieur V de l'équation de conservation de la masse conduit à :

$$Q_a = -C_A \frac{\partial p_{in}}{\partial t} \quad (1.8)$$

où $C_A = V/(\rho_0 c_s^2)$ est la compliance acoustique. Ainsi, en se plaçant en régime harmonique ($p = \hat{p}e^{i\omega t}$) et en l'absence de dissipation, on peut écrire :

$$\hat{p}_{in} = \frac{Z_c}{Z_m + Z_c} \hat{p}_{out} \quad \text{avec} \quad Z_c = -\frac{1}{i\omega C_A}, \quad Z_m = -i\omega M_A \quad (1.9)$$

Cette relation peut aussi s'écrire sous une forme temporelle, en terme de déplacement transversal $\zeta(t)$ du fluide dans le col du résonateur ($u_a = \partial\zeta/\partial t$) :

$$M \frac{d^2\zeta}{dt^2} + K\zeta = F \quad (1.10)$$

avec $M = S^2 M_A = \rho_0 S h$ (masse apparente déplacée dans l'ouverture), $K = S^2/C_A = \rho_0 c_s^2 S^2/V$ (constante de raideur apparente associée à la compressibilité du fluide dans le volume) et $F = -p_{out}S$ (force apparente exercée par le champ de pression externe).

Cette représentation très simplifiée peut être complétée par la prise en compte de la dissipation par rayonnement acoustique et par frottement visqueux au niveau de l'ouverture. L'impédance d'entrée de l'orifice est alors : $Z_m = -i\omega M_A + R_A$. L'équation (1.10) devient :

$$M \frac{d^2\zeta}{dt^2} + R \frac{d\zeta}{dt} + K\zeta = F \quad (1.11)$$

avec $R = S^2 R_A$

Pierce[157] montre qu'une estimation plus rigoureuse de l'inertie acoustique par le principe de minimisation de l'énergie cinétique conduit à la prise en compte d'une correction d'extrémité Δh de chaque côté de l'ouverture. Pour le calcul de M_A , on doit donc prendre $h' \approx h + (\Delta h)_1 + (\Delta h)_2$, avec $(\Delta h)_1 = (\Delta h)_2 = 8a/3\pi \approx 0.84a$ pour un orifice bafflé (a est le rayon équivalent de l'orifice).

Pour un système faiblement amorti, la fréquence de résonance de l'oscillateur est obtenue par la relation $\omega_r = \sqrt{K/M}$, d'où pour le résonateur de Helmholtz :

$$f_r = \frac{c_s}{2\pi} \sqrt{\frac{S/V}{h + (\Delta h)_1 + (\Delta h)_2}} \quad (1.12)$$

Généralement, l'amortissement R est estimé de façon expérimentale en calculant le facteur de qualité du système $Q = \omega_r / (\omega_2 - \omega_1)$, où ω_1 et ω_2 sont les limites de la bande passante à -3 dB du résonateur. On a la relation :

$$R = \frac{M\omega_r}{Q} \quad (1.13)$$

Cette approche algébrique a comme principal avantage de faire ressortir les principaux paramètres physiques qui entrent en jeu dans le phénomène de résonance. Une étude couplée expérimentale / analytique permet de connaître les valeurs des coefficients du système masse / ressort / amortissement. Si l'on n'a pas accès à une mesure de caractérisation acoustique du résonateur pour déterminer le facteur de qualité, on peut évaluer la résistance du résonateur en calculant l'énergie rayonnée par le piston fluide[157] (piston bafflé) :

$$R \approx \rho_0 \frac{\omega_r^2}{2\pi c_s} S^2 \quad (1.14)$$

On néglige alors les dissipations par frottement visqueux au niveau du col. Cette approximation est donc seulement valable pour des résonateurs dont le col est très fin. Le facteur de qualité peut être déduit de R par la relation $Q = \sqrt{MK}/R$.

Compléments et autres modélisations

Pour des résonateurs dont la géométrie s'éloigne de la géométrie théorique idéale (ouverture décentrée, orifice de section très allongée...), il se peut que l'estimation algébrique ne soit plus suffisante. Des calculs plus formels ont été proposés pour modéliser la résonance de Helmholtz. Chanaud[28] et Selamet[183] proposent un modèle $1D$, qui permet notamment d'améliorer la prédiction de la fréquence de résonance pour des cavités non axi-symétriques. Pour une épaisseur du col très petite par rapport à la longueur d'onde ($kh \ll 1$, avec $k = \omega/c_s$), on peut déterminer la fréquence de résonance par la formule :

$$\cot(kD) = k(h + (\Delta h)_1 + (\Delta h)_2) \frac{A_v}{S} \quad (1.15)$$

où D est la profondeur de la cavité (hors col) et A_v est la section du volume intérieur ($V = A_v D$). On remarque que pour cette formulation, on doit également évaluer les longueurs de correction d'extrémité. Pour des sections d'ouverture non circulaires, on peut commettre une erreur relativement grande sur ces paramètres ce qui peut entraîner une erreur importante sur la fréquence théorique de résonance, notamment pour un résonateur avec une hauteur de col faible ($h \ll (\Delta h)_{1,2}$). La formule (1.15) donne aussi les modes de profondeurs d'une cavité (modes quart d'onde). Bien entendu, pour une cavité sans col, il faut appliquer la formule (1.15) avec $A_v = S$, $h = 0$ et $(\Delta h)_2 = 0$.

Une formulation complète $3D$ est proposée par Bruneau[24]. On constate, en particulier que la correction d'extrémité à l'extérieur du résonateur $(\Delta h)_1$ est la conséquence de l'inertance générée par la vibration d'un piston fluide et que la correction d'extrémité interne $(\Delta h)_2$ est le résultat de la contribution des modes acoustiques d'ordre supérieur du volume. Plus concrètement, les corrections d'extrémité traduisent le fait que dans son mouvement oscillatoire, la masse M_A entraîne

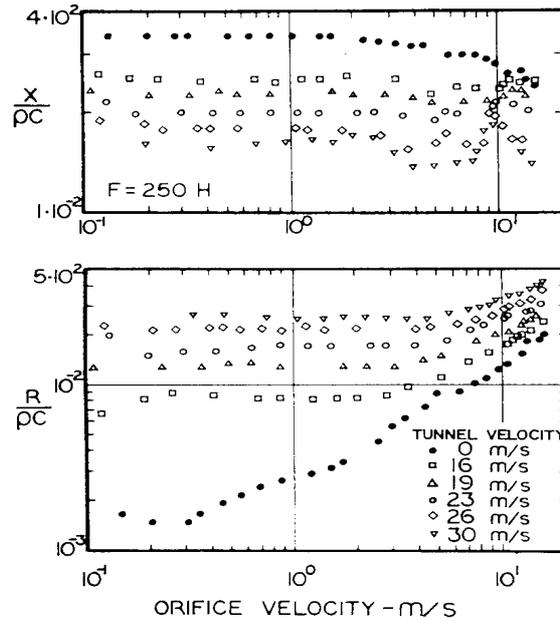


FIG. 1.7 – Impédance de l’orifice du résonateur soumis à un écoulement affleurant de vitesse variable (Tunnel Velocity) en fonction de l’amplitude de la vitesse acoustique dans le col du résonateur (Orifice Velocity). X : réactance; R : résistance (Goldman & Panton[70]).

du fluide de part et d’autre de l’ouverture. Howe[101] a également développé une théorie pour l’excitation d’un résonateur de Helmholtz. Celle-ci est basée sur le calcul de la fonction de Green en approximation basse fréquence (fonction de Green compacte) du système.

Influence d’un écoulement affleurant

Un écoulement affleurant l’ouverture de la cavité de Helmholtz peut avoir une influence sur ses caractéristiques acoustiques. Il est difficile de mettre en évidence une évolution simple de l’impédance acoustique de l’orifice ($Z_A = R_A + iX_A$, avec $X_A = \omega M_A - 1/\omega C_A$) en fonction de l’écoulement du fait de la multiplicité des paramètres physiques qui ont une influence sur le phénomène. Ainsi, Goldman[70] montre que Z_A peut dépendre de δ_0 , U_0 , L , ω et u_a . La figure 1.7 montre par exemple l’évolution de la résistance R_A et de la réactance X_A de l’orifice en fonction de la vitesse de l’écoulement amont et de l’amplitude des pulsations acoustiques. Comme l’observent également Hersh & Walker[86] ou Walker & Charwat[219], la résistance augmente et la réactance diminue quand la vitesse de l’écoulement affleurant augmente, pour une amplitude de u_a fixée. Quand l’amplitude de la vitesse transverse acoustique devient relativement importante ($u_a = O(U_0)$), R_A augmente fortement alors que X_A décroît pour une vitesse U_0 donnée. Des travaux de modélisations[43, 85, 219] montrent que ce comportement non-linéaire de l’impédance pour des amplitudes de u_a importantes est dû à l’entraînement de fluide extérieur de façon périodique dans le col par le flux acoustique.

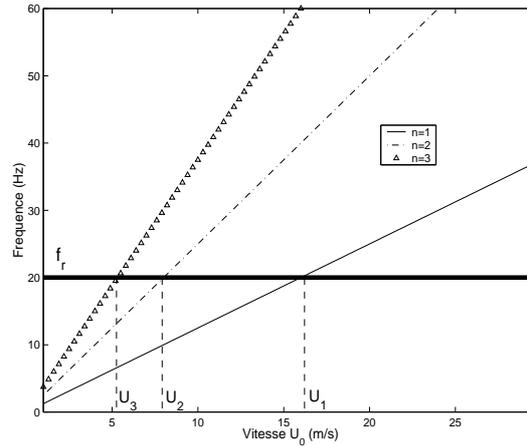


FIG. 1.8 – Courbes de principe de la coïncidence des fréquences entre les trois premiers modes aérodynamiques de fréquence $f_n = nU_0/2L$ (avec $L = 0.4$ m) et une fréquence de résonance $f_r = 20$ Hz d'une cavité.

1.1.4 Couplage acoustique/aérodynamique

Dans cette partie, on va mettre en évidence le phénomène de couplage entre l'écoulement instationnaire affleurant et une résonance de la cavité. Une interprétation plus physique des mécanismes dépend du développement de modèles analytiques des phénomènes. Ainsi, des analyses plus fines des interactions entre l'acoustique de la cavité et l'écoulement seront données dans la section suivante 1.2.

Coïncidence des fréquences

On a vu dans le paragraphe 1.1.2 qu'un écoulement affleurant une ouverture s'organise en modes aérodynamiques dont les fréquences dépendent fortement de la vitesse U_0 . En particulier, pour un écoulement à faible nombre de Mach, on peut approcher la fréquence f_n du $n^{\text{ème}}$ mode par la formule :

$$f_n = n \frac{\tilde{c}_r U_0}{L} \quad (1.16)$$

En remarquant, d'après la figure 1.2 que l'on a en général, $\tilde{c}_r \approx 0.5$, on peut tracer (figure 1.8) l'évolution de f_n en fonction de U_0 pour les trois premiers modes en prenant $L = 0.4$ m. Sur cette même figure, on a représenté la droite correspondant à une fréquence de résonance de Helmholtz f_r caractéristique d'un véhicule. On constate que pour les vitesses U_1 , U_2 et U_3 , on a *coïncidence des fréquences* des deux phénomènes : $f_n = f_r$.

Pour ces vitesses, dites *critiques*, il est facile d'admettre que l'on aura un maximum local de l'amplitude de la pression acoustique à l'intérieur de la cavité. En remarquant que l'énergie d'excitation de la cavité est fournie par l'écoulement, on peut supposer que l'amplitude globale du phénomène sera proportionnelle à $\frac{1}{2}\rho_0 U_0^2$. Ainsi, les phénomènes d'oscillation les plus "violents" se produiront pour les modes d'ordre les plus faibles. En particulier, pour le cas d'un toit ouvrant automobile, c'est généralement la coïncidence $f_1 \leftrightarrow f_r$ qui conduit au problème de battement.

Le phénomène de coïncidence des fréquences ne se traduit pas seulement par un comportement

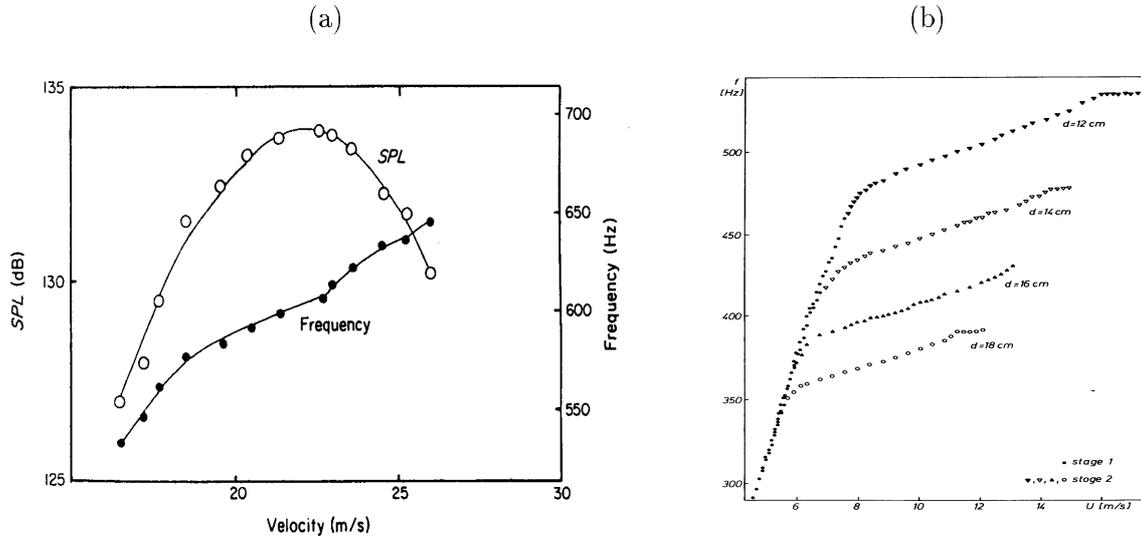


FIG. 1.9 – (a) Fréquence et amplitude des fluctuations de pression dans la cavité de Helmholtz en fonction de la vitesse de l'écoulement affleurant (Nelson *et al.*[150]). (b) Evolution de la fréquence des fluctuations de pression dans un résonateur quart d'onde de profondeur variable en fonction de la vitesse de l'écoulement affleurant (Meissner[144]).

de type excitation-réponse acoustique. En effet, on observe expérimentalement[48, 54, 76, 144, 150] plusieurs éléments qui montrent que le flux acoustique agit sur l'écoulement affleurant :

- Les fluctuations aérodynamiques possèdent un maximum d'amplitude à la coïncidence ;
- On observe une concentration de la vorticité dans la couche de mélange ;
- La fréquence des oscillations varie peu autour de la fréquence de résonance pour des vitesses d'écoulement se situant autour de la vitesse critique (accrochage en fréquence).

Sur la figure 1.9 (a), on voit nettement l'accrochage en fréquence du phénomène d'auto-oscillation autour de la fréquence de résonance de la cavité (environ 600 Hz). Cette stabilisation en fréquence correspond au maximum d'amplitude du phénomène. La double pente de la courbe fréquentielle est le meilleur témoin de l'action de la résonance acoustique sur l'écoulement. Ainsi, on montrera plus en détail dans la section 1.2 que, quand on est proche de la coïncidence des fréquences, c'est le flux acoustique transverse qui dirige le phénomène de lâcher de tourbillon. Nelson *et al.*[150], Bruggeman *et al.*[23] ou Graf & Durgin[76] remarquent qu'une nouvelle instabilité est générée au moment où la vitesse acoustique change de signe et commence à augmenter en direction de l'intérieur de la cavité. D'après la relation (1.8), cela correspond au moment où la pression dans la cavité atteint son minimum. La stabilisation en fréquence du mécanisme s'explique par cette condition de phase entre les deux phénomènes. L'augmentation de l'amplitude des oscillations aérodynamiques traduit le fait que l'amplitude de l'excitation générée par le flux

acoustique est plus importante que l'amplitude de l'excitation produite par le phénomène de sheartone. Cette forte excitation initiale conduit à une transition plus rapide des instabilités vers la zone de croissance non-linéaire : les instabilités s'organisent rapidement en tourbillons discrets. Une interprétation plus fine de l'augmentation de l'amplitude des oscillations à la coïncidence des fréquences est proposée par Nelson *et al.*[150]. En effet, il explique que le couplage entre les écoulements aérodynamique et acoustique résulte de la condition de Kutta au niveau du bord amont. La condition de Kutta indique que sur un bord de fuite, l'écoulement reste tangent à la surface amont (voir 1.2.1). En particulier, au niveau du décollement, la vitesse totale transverse de l'écoulement est nulle. Ainsi, la vitesse acoustique au niveau du bord amont a tendance à contrarier cette condition physique. Les fluctuations de vitesse associées au tourbillon sont donc générées pour assurer une vitesse transverse totale nulle au bord amont. Ainsi, plus les fluctuations de vitesses acoustiques sont grandes et plus les fluctuations aérodynamiques générées par le tourbillon doivent être importantes.

Les différentes études expérimentales[23, 76, 150, 229] montrent que pour le couplage acoustique, on retrouve la même condition sur la longueur d'onde aérodynamique que dans le mécanisme de sheartone à savoir $L \approx n\lambda_r$. En remarquant que la vitesse moyenne de convection $\tilde{c}_r = U_c/U_0$ peut s'écrire sous la forme $\tilde{c}_r = \lambda_r f/U_0$, on voit que, dans les conditions d'accrochage en fréquence ($f \approx f_r$), une augmentation de la vitesse U_0 se traduit par une diminution de la vitesse de convection des tourbillons. Ainsi, les nombres de Strouhal $St = fL/U_0 = n\tilde{c}_r$ associés aux maxima d'oscillation sont généralement inférieurs aux nombres de Strouhal approximatifs obtenus avec $\tilde{c}_r = 0.5$ (figure 1.8). Par exemple, des valeurs de $St = \tilde{c}_r = 0.3$ ou 0.4 peuvent être mesurées[23, 48, 76] pour l'accrochage du mode aérodynamique 1. Graf & Durgin[76] font remarquer que les valeurs exactes des nombres de Strouhal critiques dépendent fortement du système étudié. Par exemple, Dequand *et al.*[48, 49] mettent en évidence l'influence de la géométrie du col du résonateur sur l'amplitude et le nombre de Strouhal de l'oscillation : la modélisation analytique[49] montre que la géométrie exacte du col a une influence sur les échanges d'énergie locaux entre le flux acoustique et les fluctuations aérodynamiques. L'épaisseur de la couche limite amont peut aussi avoir une influence importante sur les conditions critiques d'auto-oscillation. En effet, ce paramètre détermine le taux d'amplification naturel de la couche de mélange. En particulier, il existe une limite théorique au-delà de laquelle il n'y plus d'amplification des ondes aérodynamiques[23]. Cette limite correspond à la fréquence $\tilde{\beta}_r = 0.5$ (figure 1.2). En prenant la valeur approchée $\tilde{c}_r = 0.5$, on trouve que le mode n ne pourra exister que si $L/\theta_0 > 4n^2\pi$. Cependant, cet effet de sensibilité de la couche de mélange n'apparaît que dans le cas où le couplage avec la résonance de la cavité n'est pas trop fort. En fait, l'influence des différents paramètres dépend de l'amplitude de l'oscillation, c'est pour cela qu'il est intéressant de classer les problèmes d'oscillations auto-entretenues en fonction de ce critère. Bruggeman *et al.*[23] proposent trois catégories : amplitude faible ($|p_{in}|/\rho_0 c_s U_0 < 10^{-3}$), amplitude modérée ($10^{-3} < |p_{in}|/\rho_0 c_s U_0 < 10^{-1}$) et amplitude forte ($|p_{in}|/\rho_0 c_s U_0 > 10^{-1}$). De façon plus intuitive, l'amplitude de l'oscillation peut-être caractérisée par le rapport $|u_a|/U_0$. Les trois catégories sont alors données par : $|u_a|/U_0 < 10^{-2}$, amplitude faible; $10^{-2} < |u_a|/U_0 < 10^{-1}$, amplitude modérée; $|u_a|/U_0 > 10^{-1}$, amplitude forte. Dans le cas d'un résonateur de Helmholtz, on a (équation (1.8)) : $|u_a| = \omega V |p_{in}|/\rho_0 c_s^2 S$.

Configuration hors résonance

On dit que l'on est dans une configuration hors résonance quand il n'y a pas de coïncidence de fréquences entre un mode aérodynamique et une résonance de la cavité. En particulier, on est hors coïncidence quand la vitesse de l'écoulement n'est pas trop proche de la vitesse critique. Les spectres de pression acoustique peuvent alors quand même faire apparaître des fréquences émergentes. Tout d'abord, quand l'influence acoustique de la cavité est négligeable, une auto-oscillation de l'écoulement associée au phénomène de sheartone est possible. Bien entendu, ces oscillations ont des amplitudes beaucoup plus faibles que les oscillations obtenues à la coïncidence des fréquences. De plus, la fréquence de l'oscillation n'est pas fixée par le résonateur. Comme on l'a vu dans le paragraphe 1.1.2, pour un mode aérodynamique donné, elle évolue quasi-linéairement en fonction de la vitesse de l'écoulement (équation (1.16)).

Par exemple, l'étude expérimentale réalisée par Meissner[144] montre clairement la succession des mécanismes qui dirigent la cohérence des instabilités. En effet, il effectue une montée en vitesse de l'écoulement affleurant une cavité de profondeur variable $D (\equiv d)$ mais de longueur L fixe. Sur la figure 1.9 (b), on voit que la profondeur n'a pas d'influence sur le phénomène d'oscillation pour $U_0 < 6$ ou 7 m/s : dans cette zone, c'est le sheartone qui domine. Quand la fréquence du sheartone se rapproche de la fréquence de résonance de la cavité, qui dépend évidemment fortement de la profondeur d , on observe un changement soudain de l'évolution de la fréquence : la fréquence du phénomène est accrochée par la fréquence de résonance. Dans cette zone de vitesse, c'est le couplage avec la résonance qui domine. Si l'on continue d'augmenter la vitesse, on peut retrouver le phénomène de sheartone, comme c'est le cas sur la figure 1.9 (a), ou bien, si l'on a dépassé le domaine de stabilité du mode aérodynamique correspondant, on peut observer une disparition brutale des oscillations auto-entretenues (figure 1.9 (b)).

Si l'écoulement affleurant est turbulent, c'est-à-dire si les fluctuations aérodynamiques ont une répartition spectrale assez large, on peut observer une émergence fréquentielle correspondant à une fréquence de résonance de la cavité[71]. On se trouve alors dans le schéma classique excitation - réponse. Dans le domaine automobile, ce mécanisme de filtrage de la turbulence par la cavité est à l'origine des problèmes de bruit de césure.

1.1.5 Mesures du battement de toit ouvrant

Mesures sur véhicules de série

Des mesures du phénomène de battement de toit ouvrant sur différents véhicules ont été effectuées sur l'anneau de vitesse du Centre Technique de Renault à Aubevoye. Le véhicule de série est équipé d'un microphone situé entre les deux appuis-tête des sièges avant. Le déflecteur du toit ouvrant est démonté. La mesure consiste alors à enregistrer le signal de pression acoustique en continu pendant une accélération progressive linéaire du véhicule entre 20 km/h et environ 160 km/h sur une durée de 10 min. On obtient ainsi l'évolution du battement en fonction de la vitesse du véhicule. Le traitement du signal consiste à réaliser une FFT d'une portion du signal temporel centrée autour de la vitesse considérée. Le pas en fréquence de l'analyse est de $\Delta f = 0.25$ Hz. Chaque spectre de pression est calculé par une moyenne de 4 spectres obtenus

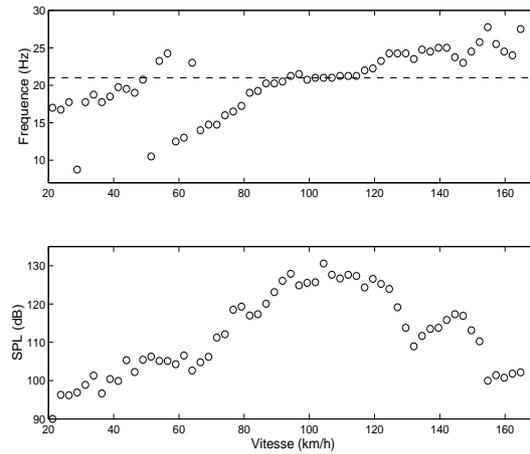


FIG. 1.10 – Evolution de la fréquence et du niveau du pic de pression correspondant au battement de toit ouvrant. Les dimensions du toit ouvrant sont $L = 0.66$ m, $b = 0.69$ m, $h = 0.12$ m. Le volume de l'habitacle est $V = 3.9$ m³. - - - fréquence de résonance de Helmholtz.

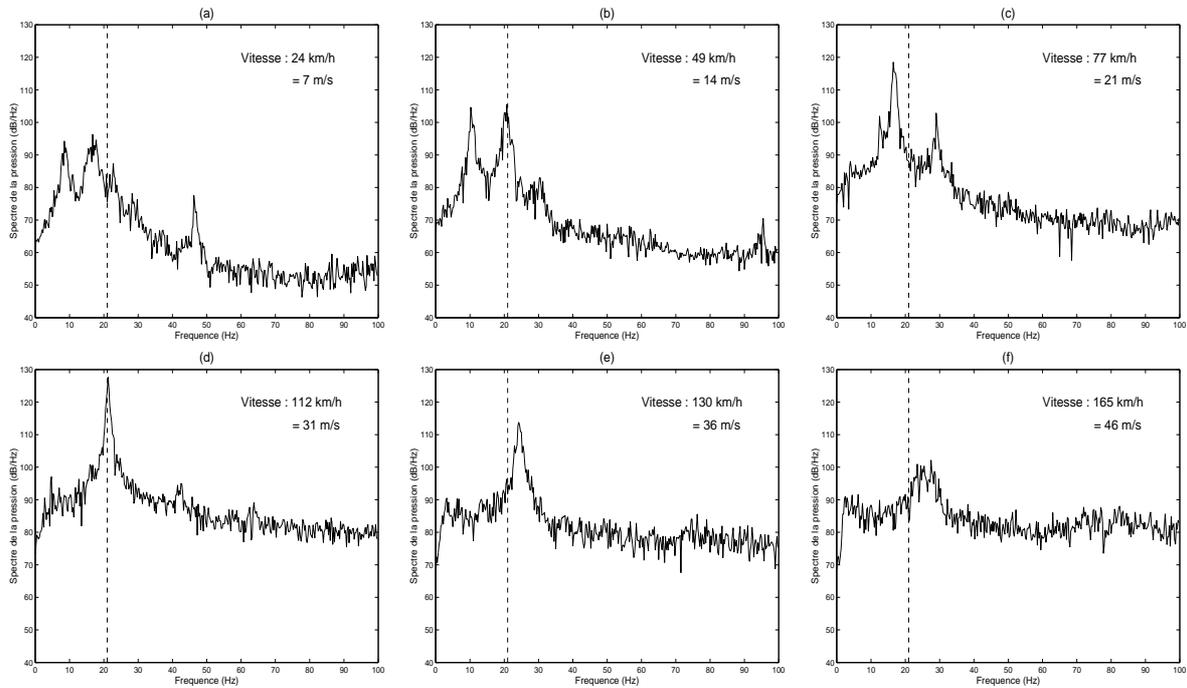


FIG. 1.11 – Evolution du spectre de la pression acoustique dans l'habitacle en fonction de la vitesse. - - - fréquence de résonance de Helmholtz. (a) : Les deux premiers pics dans le spectre correspondent aux fréquences des modes aérodynamiques 2 et 1 respectivement (condition hors résonance). Le troisième pic (48 Hz) est lié à l'harmonique 2 du moteur. (b) : Coïncidence des fréquences entre le mode 2 et la résonance de l'habitacle. (c) : Décrochage du mode 2 et amplification du mode 1. (d) : Coïncidence des fréquences entre le mode 1 et la résonance de l'habitacle. (e) et (f) : Décrochage et atténuation du premier mode aérodynamique.

pour des intervalles de temps inclus dans la portion traitée, avec un recouvrement de $1/2$ entre les intervalles. Les résultats des mesures pour le véhicule noté *A* sont donnés sur la figure 1.10. Des mesures pour d'autres véhicules sont données dans la section 1.2.3. Sur cet exemple, on voit deux accrochages successifs de la fréquence de résonance de l'habitacle ($f_r = 21$ Hz) par les modes aérodynamiques. A faible vitesse, aux alentours de 50 km/h, il y a coïncidence des fréquences entre le mode aérodynamique 2 et la fréquence de résonance de Helmholtz. Le nombre de Strouhal est alors $St = fL/U_0 \approx 1$. Quand on augmente la vitesse, ce mode décroche et le mode aérodynamique 1 prend le relais. Entre 50 km/h et 90 km/h, la fréquence de l'oscillation du mode 1 augmente linéairement avec la vitesse. La coïncidence des fréquences se produit à 90 km/h : à partir de cette vitesse, et pour un intervalle d'environ 30 km/h, la fréquence de l'oscillation est accrochée par la fréquence de résonance de l'habitacle. Dans cette zone où le couplage acoustique prédomine, l'amplitude du battement est importante. On peut donc parler d'intervalle de vitesses critiques plutôt que de vitesse critique unique. Cependant, on peut quand même identifier une vitesse pour laquelle le battement semble atteindre un maximum : 110 km/h. Pour cette vitesse, le nombre de Strouhal est de $St \approx 0.45$ et le niveau de battement est d'environ 128 dB. On a donc $|p_{in}|/\rho_0 c_s U_0 \approx 4 \times 10^{-3}$, soit encore $|u_a|/U_0 \approx 1.3 \times 10^{-2}$. Le battement de toit ouvrant rentre donc dans la catégorie des oscillations auto-entretenues d'amplitude modérée. Après 120 km/h, le battement disparaît progressivement : le niveau diminue et la fréquence décroche de la fréquence de résonance. L'irrégularité des évolutions de la fréquence et de l'amplitude est due aux variations de l'écoulement (direction, amplitude) au-dessus du toit associées aux conditions de vent pendant la mesure. Par exemple, l'augmentation de l'amplitude et la légère diminution de la fréquence qui se produit aux alentours de 145 km/h correspond à un accrochage du battement dû à une légère baisse de la vitesse du vent "de face" au moment de l'acquisition.

Une autre représentation de l'évolution du battement de toit ouvrant pour ce véhicule est donnée dans la figure 1.11. On remarque nettement l'accrochage successif par la résonance des deux premiers modes aérodynamiques.

Mesures en soufflerie sur une maquette de véhicule simplifié à l'échelle 1

En partenariat avec la société Webasto Systèmes de Carrosserie, un des principaux fournisseurs de toit ouvrant de Renault, des mesures de battement ont été réalisées dans la soufflerie *S4* de l'Institut AéroTechnique (IAT) de Saint-Cyr l'École. Le support d'essai est une maquette très simplifiée d'un véhicule à l'échelle 1 muni d'un toit ouvrant, représentée sur la figure 1.12. Les dimensions du toit ouvrant sont $L = 0.7$ m, $b = 0.97$ m et le volume de l'habitacle est 3.47 m³. La maquette est construite en bois contre-plaqué d'épaisseur 2 cm. La hauteur du col du résonateur est donc $h = 0.02$ m. Le repère spatial a pour origine le point situé au milieu du bord amont de l'ouverture, sur la partie supérieure du panneau. Les axes \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 et \mathbf{x}_3 sont définis comme sur la figure de principe 1.1. Des mesures des composantes u_1 et u_2 de la vitesse sont obtenues par fils chauds croisés. Simultanément à chaque acquisition des fluctuations de vitesse, la pression acoustique est mesurée dans l'habitacle au point de coordonnées $(0.15$ m, -0.77 m, $0)$. La vitesse de l'écoulement est fixée à $U_0 = 30$ m/s. Le niveau du pic battement dans le volume est de 135 dB pour une fréquence de 21.5 Hz. La figure 1.13 représente les vecteurs moyens de vitesse pour les

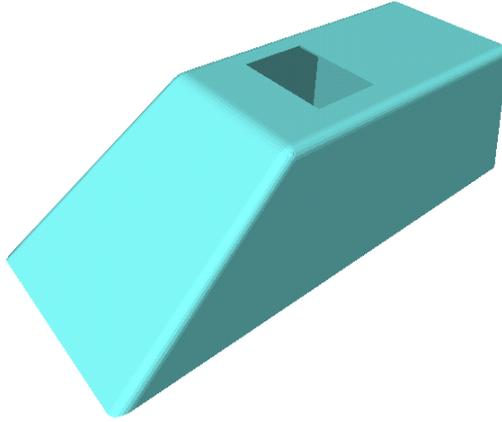


FIG. 1.12 – Maquette simplifiée de véhicule à l'échelle 1.

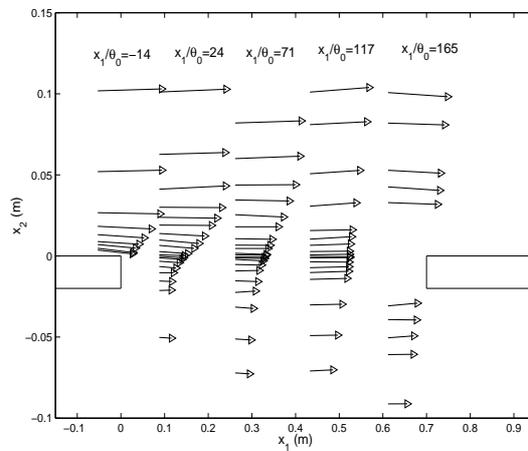


FIG. 1.13 – Vecteurs de vitesse moyenne dans la section $x_3 = 0$ de l'ouverture pour $U_0 = 30$ m/s.

différents points de mesures dans le plan médian $x_3 = 0$. L'épaisseur de quantité de mouvement mesurée sur le premier profil (couche limite) est de $\theta_0 = 3.7$ mm. Pour un point de l'écoulement, les signaux temporels et les densités spectrales de puissance normalisées des fluctuations de vitesse dans les directions \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 sont donnés sur la figure 1.14. Le signal de pression acoustique et son spectre sont aussi donnés sur cette figure.

Pour analyser des écoulements turbulents dans lesquels se développent des structures cohérentes, il est intéressant de séparer la composante périodique des autres fluctuations aléatoires. Cette approche est basée sur la décomposition triple de la turbulence, introduite par Hussain & Reynolds[110]. Si $\phi(\mathbf{x}, t)$ est une des variables physiques du champ turbulent, on peut écrire :

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \bar{\phi}(\mathbf{x}) + \tilde{\phi}(\mathbf{x}, t) + \phi'(\mathbf{x}, t)$$

où $\bar{\phi}(\mathbf{x})$ est la composante moyenne obtenue par moyennage temporel, $\tilde{\phi}(\mathbf{x}, t)$ est la composante périodique et $\phi'(\mathbf{x}, t)$ est la composante aléatoire. La composante périodique est définie à partir

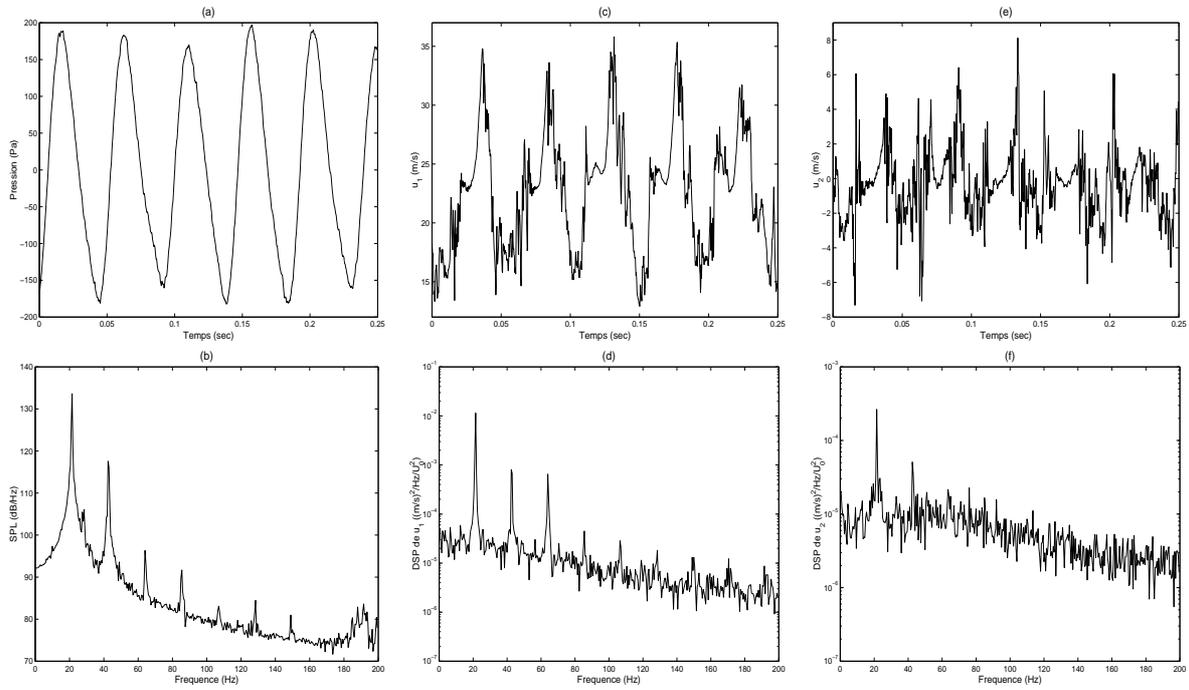


FIG. 1.14 – (a) et (b) : Signal temporel et spectre de la pression acoustique dans l’habitable. Mesures des fluctuations de vitesse ((c) et (e)) et densité spectrale de puissance des vitesses ((d) et (f)) au point $x_1/\theta_0 = 165$, $x_2/\theta_0 = 9$: (c) et (d) vitesse longitudinale u_1 ; (e) et (f) vitesse transversale u_2 . Le spectre de niveau de pression et les DSP sont calculées avec 7 moyennes, sans recouvrement. Le pas en fréquence est $\Delta f = 0.5$ Hz.

de la moyenne de phase du signal :

$$\phi^c(\mathbf{x}, t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \phi(\mathbf{x}, t + nT) \quad (1.17)$$

où T est la période des fluctuations cohérentes. On a ainsi :

$$\tilde{\phi}(\mathbf{x}, t) = \phi^c(\mathbf{x}, t) - \bar{\phi}(\mathbf{x})$$

Sur le plan expérimental, cette approche a un double avantage. Tout d’abord, elle permet d’isoler le phénomène périodique (qui généralement est le phénomène étudié) des autres composantes de la turbulence. Ainsi, cela peut faciliter la comparaison des signaux expérimentaux avec des résultats de calculs numériques qui, la plupart du temps, ne permettent pas d’obtenir la totalité du spectre des fluctuations turbulentes. Dans le cas où l’on peut extraire des signaux mesurés une référence de phase robuste et stable, il est aussi possible de reconstruire un champ instationnaire phasé sur tout le domaine de mesure à partir d’acquisitions non phasées aux différents points du domaine[60, 76]. Pour les écoulements affleurant une cavité résonante, le signal de pression dans la cavité est une référence stable et robuste[60]. Cependant, d’un point de vue expérimental, un moyennage de phase correct nécessite certaines précautions, même pour les écoulements fortement cohérents. Par exemple, le calcul de la composante périodique se fait à partir d’un signal échantillonné et non

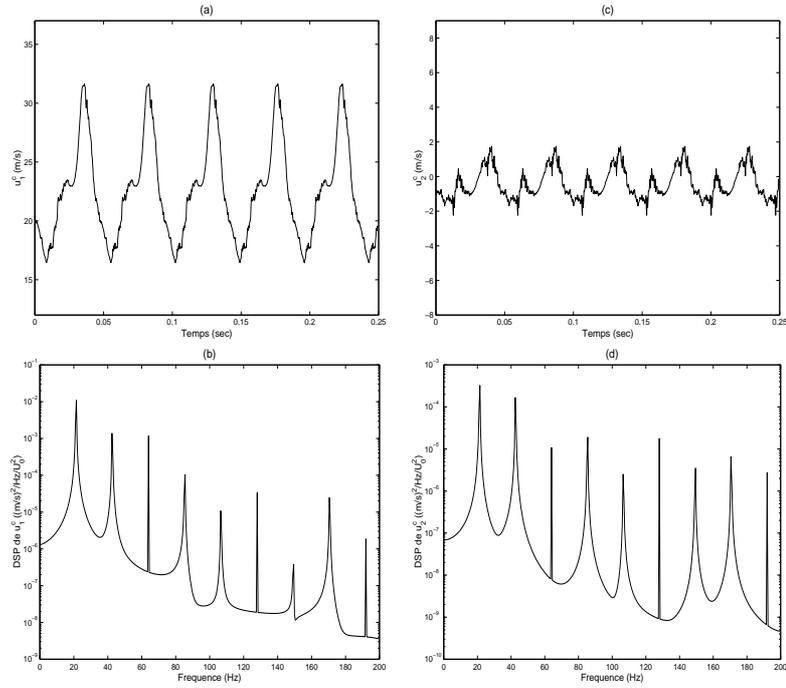


FIG. 1.15 – Mesures des fluctuations de vitesse cohérente ((a) et (c)) et densité spectrale de puissance des vitesses ((b) et (d)) au point $x_1/\theta_0 = 165$, $x_2/\theta_0 = 9$: (a) et (b) vitesse longitudinale cohérente u_1^c ; (c) et (d) vitesse transversale cohérente u_2^c . Le spectre de niveau de pression et les DSP sont calculées avec 7 moyennes, sans recouvrement. Le pas en fréquence est $\Delta f = 0.5$ Hz.

d'un signal continu. Ainsi, la définition (1.17) devient :

$$\phi^c(\mathbf{x}, t_k) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \phi(\mathbf{x}, t_k + n\Theta)$$

où Θ est l'entier le plus proche de T/T_e , T_e étant la période d'échantillonnage. Ainsi, généralement, on a $t_{k+n\Theta} \neq t_k + nT$ et il est facile de montrer que $|t_{k+n\Theta} - (t_k + nT)| = O(nT_e)$. Pour limiter l'erreur, la période d'échantillonnage doit être la plus petite possible et le nombre de moyennes N ne doit pas être trop grand. Dans notre cas, la fréquence d'échantillonnage est de 4000 Hz. Durant les mesures, la fréquence de battement pouvait varier de ± 0.1 Hz autour de 21.5 Hz. Le nombre d'échantillons par période est donc de $\Theta = 190 \pm 1$. Le nombre de moyennes optimal pour obtenir des signaux de vitesses propres a été fixé à $N = 30$. A titre d'exemple, la figure 1.15 présente les signaux temporels et les densités spectrales de puissance des fluctuations de vitesse totale et cohérente pour le point de mesure dont les résultats bruts sont présentés sur la figure 1.14. On remarque que les niveaux des harmoniques et la hiérarchie entre ces harmoniques sont bien conservés par le moyennage de phase. Ce type de traitement des résultats est particulièrement intéressant pour la comparaison des mesures avec des simulations numériques (voir §4.5).

On remarque sur les mesures de vitesse brutes et sur les signaux traités par moyennage de phase que l'amplitude de la composante de vitesse cohérente transversale est environ dix fois plus petite que l'amplitude de la composante longitudinale. Ce résultat est en désaccord avec les mesures de Nelson *et al.*[150], Massenzio[139] et Zoccola[229] qui ont observé que les deux com-

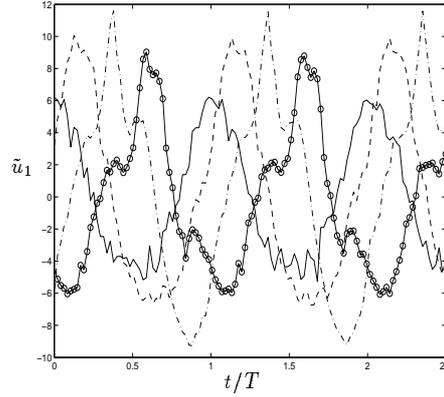


FIG. 1.16 – *Comparaison des fluctuations de la vitesse longitudinale cohérente recalée en phase.* $x_2/\theta_0 \approx 3$ et: — $x_1/\theta_0 = 24$; - - - $x_1/\theta_0 = 71$; - · - · $x_1/\theta_0 = 117$; ○ $x_1/\theta_0 = 165$.

posantes de vitesse étaient du même ordre de grandeur. Nous reviendrons dans le paragraphe 4.5 sur ce résultat expérimental surprenant. Sur les spectres de vitesse brute, on peut noter que les amplitudes des composantes aléatoires de la turbulence sont égales.

La figure 1.16 montre les fluctuations de vitesse transverse cohérente pour quatre points pris dans les quatre sections de mesure de la couche de mélange. Ces signaux ont été recalés en phase grâce au signal de pression acoustique de référence. Cette figure met en évidence le déphasage des fluctuations de vitesse associé à la convection du tourbillon dans l'ouverture. Le déphasage entre le signal pris dans la première section ($x_1/\theta_0 = 24$) et le signal mesuré dans la dernière section ($x_1/\theta_0 = 165$) est d'environ $0.6 \times 2\pi$. En supposant une évolution linéaire de la phase, cela conduit à un déphasage d'environ $0.8 \times 2\pi$ entre les vitesses des bords aval et amont de l'ouverture. Ce résultat n'est pas en contradiction avec la condition d'auto-oscillation $L/\lambda_r = n$. En effet, dans le cas d'un phénomène de couplage avec une résonance de cavité, l'écoulement acoustique transverse s'ajoute à l'écoulement aérodynamique tourbillonnaire. La longueur d'onde aérodynamique ne peut donc pas être mesurée par l'étude de l'évolution de la phase dans l'ouverture. Comme dans notre cas expérimental, la différence de phase entre les fluctuations de vitesse prises aux deux bords de la cavité est en général inférieure à 2π [151, 229]. Pour évaluer la longueur d'onde aérodynamique, une des solutions est de mesurer le déphasage des fluctuations de vitesse le long du trajet du tourbillon[229]. On peut également suivre le maximum de vortacité[76] (centre du tourbillon) pour mesurer la vitesse de convection de l'instabilité U_c , et ainsi retrouver la longueur d'onde associée.

1.2 Modèles analytiques

Dans cette partie, nous allons présenter les différentes approches analytiques qui ont été proposées pour la modélisation du phénomène d'oscillation auto-entretenu d'un écoulement affleurant une cavité. Un de ces modèles sera exploité pour le calcul du phénomène de battement de toit ouvrant.

1.2.1 Modélisation du sheartone

On trouve dans la littérature des modèles semi-empiriques pour le calcul des fréquences du sheartone, par exemple le modèle de Rossiter[178] valable pour $M > 0.4$. Cependant, ces modèles de calcul des fréquences des modes sont peu intéressants sur le plan physique car ils sont généralement basés sur l'hypothèse fondamentale que l'écoulement est organisé en modes ! En d'autres termes, ces approches semi-empiriques ne sont pas fondées sur la modélisation des phénomènes physiques qui conduisent au bouclage de phase des instabilités. Par exemple, en notant Φ_{x_1} la phase des fluctuations de vitesse en x_1 , Bilanin & Covert[15] ainsi que Tam & Block[205] utilisent une relation de phase du type $\Phi_L - \Phi_0 = 2n\pi$ pour fermer leur système d'équations. A partir d'une modélisation des instabilités linéaires de la couche de mélange et d'une source acoustique équivalente générée au bord d'impact par la déflexion verticale de la couche limite, ils obtiennent une bonne estimation des fréquences des différents modes mais sans mettre réellement en évidence le mécanisme physique qui conduit justement au bouclage de phase et donc à l'organisation en modes aérodynamiques.

Il existe cependant une série de travaux de modélisation qui met à jour le mécanisme de couplage. Il s'agit des travaux initiés par Howe[102, 103] en 1981, repris plus récemment par ce même chercheur[106, 107, 105] et qui ont fait l'objet d'une application sur un cas réel par Grace[74]. Cette méthode de détermination des auto-oscillations d'un écoulement affleurant une ouverture est du même type que celle utilisée par Crighton[42] pour la détermination des modes aérodynamiques d'une configuration jet / coin.

Le calcul des modes aérodynamiques auto-entretenus se fait par l'intermédiaire du calcul de la conductivité de Rayleigh[166] $K_r(\omega)$ qui est en fait la généralisation de la notion de conductance (l'inverse de l'impédance) d'un orifice dans le cas où celui-ci est soumis sur ses deux faces à deux écoulements de vitesse U_+ et U_- (avec éventuellement $U_- = 0$). Pour une ouverture soumise à une différence de pression $[p_0(t)] = p_+(t) - p_-(t)$, on a par définition :

$$\rho_0 \frac{\partial Q(t)}{\partial t} = - \int_{-\infty}^{+\infty} K_r(\omega) [\hat{p}_0(\omega)] e^{-i\omega t} d\omega \quad (1.18)$$

où $Q(t)$ est le débit volumique à travers l'ouverture et :

$$[\hat{p}_0(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [p_0(t)] e^{-i\omega t} dt \quad (1.19)$$

Pour des nombres de Reynolds élevés, la couche de mélange est modélisée par un film infiniment mince de vorticité (vortex sheet model). On note $\zeta(x_1, x_3, t) = \hat{\zeta}(x_1, x_3) e^{i\omega t}$ le déplacement harmonique de cette interface. Pour des nombres de Mach très faibles, le mouvement du fluide peut être supposé incompressible. En utilisant enfin l'hypothèse de petites perturbations, on peut écrire les expressions linéarisées des fluctuations de pression de part et d'autre de l'ouverture :

$$\hat{p}(\mathbf{x}, \omega) = \hat{p}_+(\omega) - \rho_0 \left(\omega + iU_+ \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 \int_S \frac{\hat{\zeta}(y_1, y_3)}{2\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} dy_1 dy_3, \quad (x_2 > 0) \quad (1.20)$$

$$\hat{p}(\mathbf{x}, \omega) = \hat{p}_-(\omega) + \rho_0 \left(\omega + iU_- \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 \int_S \frac{\hat{\zeta}(y_1, y_3)}{2\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} dy_1 dy_3, \quad (x_2 < 0) \quad (1.21)$$

où S est la surface totale de l'ouverture. En écrivant l'égalité des pressions au niveau de la section de l'ouverture ($\mathbf{x} = (x_1, 0, x_3)$), on obtient la relation :

$$\left[\left(\omega + iU_+ \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\omega + iU_- \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 \right] \int_S \frac{\hat{\zeta}(y_1, y_3)}{2\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} dy_1 dy_3 = \frac{[\hat{p}_0]}{\rho_0} \quad (1.22)$$

Cette expression est l'équation du mouvement du film de vorticité soumis à une différence de pression. Elle permet donc d'exprimer le débit généré par cette différence de pression, en remarquant que :

$$\hat{Q} = \int_S -i \left(\omega + iU_{\pm} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \hat{\zeta}(y_1, y_3) dy_1 dy_3 \approx -i\omega \int_S \hat{\zeta}(y_1, y_3) dy_1 dy_3 \quad (1.23)$$

Après intégration du membre de droite par rapport à l'opérateur du second ordre, l'équation (1.22) devient :

$$\int_S \frac{Z(\xi', \eta')}{\sqrt{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2}} d\xi' d\eta' = 1 + \lambda_1(\eta) e^{i\sigma_1 \xi} + \lambda_2(\eta) e^{i\sigma_2 \xi} \quad (1.24)$$

où $Z = \{\rho_0 \omega^2 s / \pi [p_0]\} \hat{\zeta}$, $s = L/2$, $\xi = x_1/s$, $\eta = x_3/s$. Dans cette équation, σ_1 et σ_2 sont les nombres d'onde adimensionnels des instabilités de Kelvin-Helmholtz du film de vorticité :

$$\sigma_1 = \frac{\omega s (1 + i)}{U_+ + iU_-}, \quad \sigma_2 = \frac{\omega s (1 - i)}{U_+ - iU_-} \quad (1.25)$$

Les coefficients λ_1 et λ_2 sont déterminés en appliquant la condition de Kutta en $\xi = -1$, c'est-à-dire au niveau du bord amont de l'ouverture :

$$\hat{\zeta} = \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial \xi} = 0 \quad (1.26)$$

Le calcul de l'intégrale de l'équation (1.24) permet alors de déterminer l'expression de $\hat{\zeta} = f([\hat{p}_0], \sigma_1, \sigma_2)$ et donc, en utilisant la relation (1.23), on peut déterminer (ou calculer numériquement dans le cas d'un orifice circulaire[105]) la conductivité de Rayleigh. Dans le cas d'une ouverture de section rectangulaire, K_r se met sous la forme :

$$K_r(\omega) = \pi/2b (\Gamma_r(\omega) - i\Delta_r(\omega)) \quad (1.27)$$

Le relation (1.18) montre que pour les fréquences telles que $\text{Im}(K_r) > 0$, le flux acoustique recevra une amplification en traversant l'orifice : il y aura transfert d'énergie entre l'écoulement moyen et les fluctuations de vitesse de la couche de mélange. De plus, en l'absence d'excitation externe, il est possible d'obtenir une auto-oscillation du système. En effet, les fréquences pour lesquelles le débit volumique croît naturellement correspondent aux fréquences des pôles de $K_r(\omega)$ dont la partie imaginaire est positive. Sur la figure 1.17, Howe[105] a représenté la conductivité de Rayleigh dans le cas d'un orifice rectangulaire et pour $U_- = 0$. On voit qu'il y a transfert d'énergie entre l'écoulement moyen et l'écoulement instationnaire pour un intervalle restreint du nombre de Strouhal : $1.8 \leq \omega s/U \leq 3.3$. Dans cet intervalle pour lequel on a $\Delta_r(\omega) < 0$, on peut

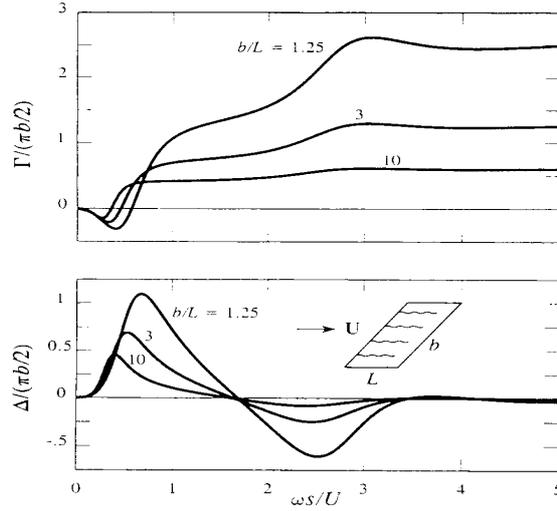


FIG. 1.17 – Conductivité de Rayleigh $K_r(\omega) = \pi/2b (\Gamma_r(\omega) - i\Delta_r(\omega))$ d'un orifice rectangulaire pour différents rapport d'aspect b/L (Howe [107]).

calculer les éventuels pôles de K_r . Par exemple, pour un orifice rectangulaire de rapport d'aspect $b/L = 5$, ce modèle prédit[106] les fréquences adimensionnelles d'auto-oscillation suivantes :

$$St = \frac{fL}{U} \approx 0.8, 1.4, 1.9, 2.5 \dots$$

Même si ces valeurs théoriques sont légèrement supérieures aux valeurs mesurées par exemple par Ahuja & Mendoza[2], on constate que l'on retrouve bien l'écart caractéristique d'environ $1/2$ entre deux nombres de Strouhal successifs. Mais le principal atout du modèle développé par Howe est qu'il ne fait appel à aucune relation empirique. En particulier, Howe montre que le transfert d'énergie entre l'écoulement moyen et les fluctuations est directement lié à l'application de la condition de Kutta (1.26) au niveau du décollement[102]. De plus, on voit que l'organisation en modes cohérents est due au "fenêtrage" par l'orifice du système différentiel représentant le mouvement du film de vorticité ( quation (1.22)). Ainsi, contrairement aux précédents modèles[15, 205], ce modèle n'est pas basé sur l'idée que le couplage aérodynamique est dû à la source (acoustique ou aérodynamique) générée par l'interaction instabilités / bord aval. En fait, la modélisation de Howe fait apparaître indirectement cette notion. En effet, l'intégration sur la section de l'ouverture fait apparaître une singularité pour le déplacement ζ en $\xi = 1$ ($x_1 = L/2$). Cette valeur infinie du déplacement en ce point (qui est cependant intégrable et conduit donc à un débit volumique fini) montre clairement la prédominance des fluctuations générées autour du bord aval sur la valeur totale de l'intégrale (1.24). On reverra dans la partie 1.2.2 toute la difficulté de la modélisation des sources associées à ce type de problème.

Une des limitations du modèle de Howe est qu'il ne fait jamais intervenir les caractéristiques intrinsèques de la couche de mélange et en particulier son épaisseur de quantité de mouvement θ . Or, on a vu dans la partie 1.1.2 que ce paramètre établit la sensibilité fréquentielle de l'écoulement et permet de sélectionner le mode aérodynamique prédominant. Tam & Block[205] qui utilisent une modélisation similaire à celle de Howe pour la couche de mélange introduisent, a

posteriori, une dépendance du système à θ en remplaçant simplement l'expression des nombres d'onde complexes $\sigma_{1,2}(\omega)$, par celle obtenue par la théorie linéaire des instabilités (voir 1.1.1) : $i\sigma_{1,2} = -\alpha_i(\omega, \theta) \pm i\alpha_r(\omega, \theta)$.

1.2.2 Modélisation du couplage aérodynamique/acoustique

La modélisation complète du couplage entre l'écoulement instationnaire affleurant et la cavité résonante nécessite l'établissement de plusieurs modèles élémentaires décrivant les différents mécanismes mis en jeu: les instabilités aérodynamiques de l'écoulement affleurant, les sources d'excitation de la cavité et la réponse acoustique de la cavité. De nombreux modèles, parfois très différents, ont été proposés dans chaque catégorie.

L'écoulement aérodynamique

Film de vorticité

Comme on l'a vu dans le paragraphe précedent, il est possible de représenter la couche de mélange en terme de film de vorticité. Si l'on suppose cette nappe tourbillonnaire infiniment mince, l'expression des fluctuations aérodynamiques (linéaires) est [12, 105, 143] :

$$\zeta(\xi, \eta, t) = \left(\lambda_1(\eta) e^{i\sigma_1 \xi} + \lambda_2(\eta) e^{i\sigma_2 \xi} \right) e^{i\omega t} \quad (1.28)$$

où les notations des équations (1.24) et (1.25) sont utilisées. Pour tenir compte de l'épaisseur de quantité de mouvement θ de la couche de mélange, certains chercheurs[54, 205] ont remplacé les nombres d'onde σ_1 et σ_2 par les valeurs obtenues par la théorie linéaire développée pour une couche de mélange libre (§1.1.1).

Comme on le verra dans le paragraphe 1.2.2 cette modélisation linéaire de l'écoulement en terme de déplacement est la plupart du temps associée avec un modèle de source acoustique de type massique.

Champ de vorticité proposé par Howe

Howe[100] a proposé un modèle d'écoulement basé sur le déplacement au-dessus de l'ouverture d'un filament de vorticité d'axe \mathbf{x}_3 . Ce filament se réduit à un point de vorticité dans le cadre d'une étude bidimensionnelle. La vorticité de l'écoulement est donc concentrée sur cette ligne. Un écoulement acoustique transverse est ajouté au champ de vitesse généré par cette vorticité. Le trajet du filament de vorticité et le champ de vitesse total peuvent être calculés en utilisant une transformation conforme (transformation de Joukowski) du champ potentiel. Les expressions analytiques sont complexes et une résolution numérique du système est nécessaire[49] pour éviter de trop nombreuses simplifications. Ce modèle d'écoulement est utilisé en association avec un modèle de source issu de la théorie du Vortex Sound[49, 100].

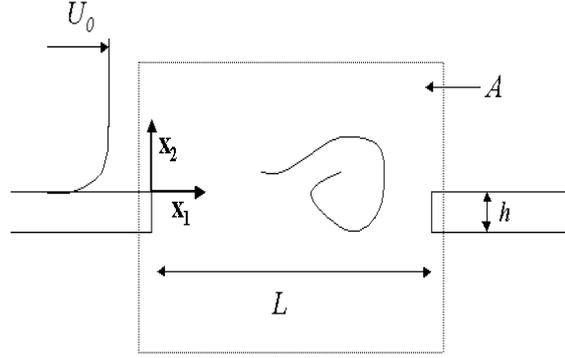


FIG. 1.18 – Schéma de principe de l'écoulement au-dessus du col du résonateur.

Modèle de Nelson

A l'instar du modèle précédent, Nelson *et al.*[151] suppose que l'on peut représenter les instabilités aérodynamiques par une succession de tourbillons discrets. L'écoulement est supposé bidimensionnel, la vorticit e s'écrit donc $\boldsymbol{\Omega}(x_1, x_2, t) = \Omega(x_1, x_2, t) \mathbf{x}_3$. Mais au lieu de calculer explicitement le champ de vitesse associée à ces tourbillons, on étudie seulement les variations de la circulation de vorticit e $\Gamma(t)$ dans une surface de contrôle A englobant l'ouverture de la cavit e (figure 1.18). En effet, on verra dans le paragraphe 1.2.2 que la force de Coriolis agissant sur l'écoulement acoustique peut s'exprimer, dans ce cas particulier, uniquement en fonction de la circulation de la vorticit e[117]. Nelson *et al.* supposent que le taux d'injection de vorticit e (c'est- dire la variation de la circulation due à l'entrée du fluide dans la zone de contrôle) est constant et ne dépend donc pas du caractère instationnaire de l'écoulement. Ainsi, le taux d'injection de vorticit e peut être calculé facilement à partir du profil moyen de la couche limite amont. La variation de circulation peut s'exprimer en fonction des flux de vorticit e entrant en $x_1 = 0$ et sortant en $x_1 = L$, soit $d\Gamma/dt = \Upsilon_0^\Gamma - \Upsilon_L^\Gamma$ avec :

$$\Upsilon_{\delta A}^\Gamma = \int_{\delta A} u_1 \Omega(x_1, x_2) d(\delta A)$$

où δA est la frontière du domaine A . En supposant que la condition de Kutta est satisfaite au bord amont ($u_2 = 0$ et $\partial u_2 / \partial x_1 = 0$), on peut facilement montrer[151] que $\Upsilon_0^\Gamma = -U_0^2/2$. Ensuite, on peut remarquer qu'il ne peut pas y avoir d'accumulation moyenne de circulation dans la surface de contrôle, ce qui conduit à :

$$\overline{\frac{d\Gamma}{dt}} = 0$$

Ainsi, si l'on suppose que la vorticit e est concentrée en un tourbillon ponctuel, le flux de vorticit e sortant au moment du passage du tourbillon en $x_1 = L$ est donc égal au flux total injecté au niveau du bord amont pendant l'intervalle de temps $0 < t < T$, où T est la période de l'oscillation. En supposant qu'un nouveau tourbillon est émis au temps $t_n = nT$ avec n entier, on peut écrire :

$$\Upsilon_L^\Gamma = -\frac{1}{2}U_0^2 T \delta(t - nT - \tau)$$

où $\tau = L/U_c$ est le temps du trajet du tourbillon dans l'ouverture, U_c étant la vitesse de convection, supposée constante, du tourbillon.

Comme on le verra dans le paragraphe 1.2.2, ce modèle d'écoulement est utilisé par Kook[117] dans le domaine fréquentiel en ne considérant que la composante fondamentale de la fonction $\Gamma(t) = \int^t (\Upsilon_0^\Gamma - \Upsilon_L^\Gamma) dt_1$. En exprimant la vorticité au lieu de la circulation totale, Bruggeman *et al.*[23] et Dequand *et al.*[49] se basent aussi sur ce modèle non-linéaire pour calculer le bilan d'énergie du système.

Excitation acoustique de la cavité

Contrairement aux écoulements libres (comme le jet par exemple), il n'existe pas de modèle acoustique satisfaisant pour le bruit de cavité. La principale raison à cela est que l'on ne peut pas utiliser l'approche générale consistant à déterminer les sources par l'analogie de Lighthill puis à calculer le rayonnement acoustique à l'aide de la fonction de Green en champ libre. En effet, il est clair que dans le cas des cavités, la présence des parois solides doit être prise en compte à la fois dans l'expression des termes sources et dans l'opérateur de propagation acoustique. Cette approche directe n'est généralement pas utilisée et les différents modèles proposés reposent sur des formulations simplifiées qui utilisent grandement les observations expérimentales associées au problème.

Source de masse et fluctuation de débit

C'est l'une des premières modélisations de la source de bruit de cavité qui a été proposée. Historiquement, elle provient des premières observations expérimentales[178] où les ondes de pression semblaient provenir du bord d'impact de la cavité. Dans les premiers travaux analytiques, la source acoustique était modélisée par une source de masse ponctuelle située au coin aval de la cavité[15, 16, 205].

Pour des écoulements à faible nombre de Mach, on retrouve la notion de source massique mais sans supposer que celle-ci soit située au niveau du bord aval. En effet, comme on l'a vu dans le paragraphe 1.2.1, le débit acoustique généré par l'écoulement instationnaire est souvent calculé[54, 103, 143, 177] à partir de la relation :

$$Q(t) = \int_S v(y_1, y_3, t) dy_1 dy_3$$

où $v = (\partial/\partial t + U_0\partial/\partial x_1)\zeta$ est la vitesse transversale du film de vorticité. Par intégration, le débit volumique peut être exprimé par la somme de deux termes $Q_1(t)$ et $Q_2(t)$ donnés par :

$$Q_1(t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \zeta(y_1, y_3, t) dy_1 dy_3 \quad (1.29)$$

$$Q_2(t) = U_0 \int_0^b \zeta(L, y_3, t) dy_3 \quad (1.30)$$

Howe[105, 106] (équation (1.23)) néglige dans son expression du débit volumique le terme Q_2 . Pourtant, Elder[53, 54] et Meissner[143] montrent que pour l'excitation des cavités résonantes, Q_2 est la source effective. En particulier, leurs analyses montrent que si l'on suppose que le film de vorticité est rattaché au bord aval de la cavité, c'est-à-dire $\zeta(L, t) = 0$, il n'y a pas d'échange d'énergie possible entre l'écoulement aérodynamique et l'écoulement acoustique. Ainsi, même si la source de masse n'est pas formellement placée au niveau de bord aval de l'orifice, on retrouve par cette approche l'importance de l'interaction instabilités / bord d'impact.

Pour les cavités résonantes dont les caractéristiques sont souvent décrites par les impédances acoustiques de l'orifice et du volume interne, la modélisation de la source acoustique par une fluctuation de débit volumique semble la plus naturelle. Dans le cas où il n'y a pas de couplage acoustique fort (sheartone, cavité peu profonde), d'autres termes sources, de type dipolaire, ont été proposés. En fait, cette opposition des modèles de source monopole/dipôle repose sur une vieille controverse (controverse dite de Helmholtz / Rayleigh) dont quelques détails sont donnés par Fabre & Hirschberg[57]. Cette opposition apparente de modélisation traduit simplement le fait qu'une source aéroacoustique ne peut pas être évaluée indépendamment de l'impédance acoustique locale du système, c'est-à-dire de la fonction de Green associée à la géométrie.

Source dipolaire - Vortex Sound

Comme dans le cas des sources monopolaires, on trouve deux grandes catégories dans la modélisation des sources dipolaires selon que l'on suppose que la source est localisée sur le bord aval (edgetone) ou que l'on considère l'échange de quantité de mouvement sur toute la surface de l'ouverture.

La force instationnaire résultant du passage ou de l'impact d'une instabilité aérodynamique sur une surface solide génère une source dipolaire en champ lointain (Curle[44]). En champ proche, on peut évaluer le champ potentiel crée par l'interaction instabilités / coin aval. Ce calcul a été réalisé par Holger *et al.*[97] et par Crighton[42] pour calculer les fréquences d'auto-oscillation d'un jet impactant sur un bord (edgetone). Un développement analytique similaire n'a pas été réalisé pour le cas d'une couche de mélange en interaction avec un bord. La principale difficulté provient du fait que l'on ne peut pas supposer que l'écoulement est faiblement perturbé par la présence du bord. En effet, contrairement au cas de l'edgetone, le tourbillon est fortement déformé lors de l'impact avec l'angle aval.

Par contre, on trouve de nombreux exemples de calcul de source basés sur l'évaluation de la force totale exercée par l'écoulement sur le fluide contenu dans le col d'un résonateur. L'idée principale est d'évaluer la quantité de mouvement  chang e au cours du cycle entre les tourbillons (ou instabilités) et l'écoulement acoustique transversal.

On peut décomposer (décomposition de Helmholtz) la vitesse totale instantanée $\mathbf{u} = \mathbf{u}_r + \mathbf{u}_a$ en une partie rotationnelle \mathbf{u}_r telle que $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \wedge \mathbf{u}_r$ et $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}_r$ et une partie potentielle, irrotationnelle et instationnaire \mathbf{u}_a représentant le champ acoustique.

Dans leur étude, Nelson *et al.*[151] montrent que le transfert d'énergie entre l'écoulement moyen et l'écoulement instationnaire total (rotationnel et potentiel) est dû au travail de la force de Coriolis

fluctuante $-\rho_0 (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u})'$ sur le champ fluctuant \mathbf{u}' . L'expression du terme de production d'énergie moyenne ne donne donc pas directement les échanges d'énergie entre l'écoulement rotationnel et l'écoulement potentiel acoustique. Ceci est dû au fait qu'il obtient son expression à partir de l'équation donnant les variations d'énergie totale de l'écoulement. Pour connaître les échanges d'énergie entre les deux écoulements, il vaut mieux écrire les variations d'énergie de l'un des deux écoulements. C'est ce que propose Howe[100] en exprimant les variations d'énergie cinétique totale de l'écoulement rotationnel. Il montre ainsi que cette variation est égale à la puissance P (avec \overline{P} négatif ou positif) des sources acoustiques dues à l'interaction tourbillon / écoulement potentiel :

$$P = \int_V \mathbf{f}_c \cdot \mathbf{u}_a dV \quad (1.31)$$

où $\mathbf{f}_c = -\rho_0 \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u}$ est la force de Coriolis par unité de volume. Cette formule est généralement associée à la théorie du Vortex Sound développée par Powell[159] et généralisée par Howe[100] même si elle ne résulte pas directement du terme source employé dans cette analogie acoustique. Dans le cas d'un écoulement affleurant une cavité, il y aura donc auto-oscillation si le taux moyen de production d'énergie \overline{P} est positif, c'est-à-dire si au cours du cycle d'oscillation, la force de Coriolis \mathbf{f}_c transmet de l'énergie au flux acoustique.

Réponse acoustique de la cavité

La réponse acoustique de la cavité est également modélisée de diverses façons. Le choix du modèle se faisant naturellement en fonction du type de modélisation choisi pour les autres sous-ensembles du système bouclé. Ainsi, si l'on suppose une source ponctuelle située au niveau du bord aval, une fonction de Green est généralement utilisée pour calculer le champ acoustique. Par exemple, Tam & Block[205] prennent en compte dans leur fonction de Green quelques réflexions sur les parois solides en utilisant la méthode des sources images. Cela n'est possible que pour des cavités très simples (cavités rectangulaires). Pour calculer, à partir de la théorie du Vortex Sound, le son généré par le passage d'instabilités aérodynamiques au-dessus d'un col d'une cavité, Howe[100] utilise la fonction de Green compacte du système. Ce calcul est très complexe et fait appel à de nombreuses hypothèses simplificatrices. Dans son approche plus récente basée sur le calcul de l'impédance de Rayleigh (voir 1.2.1), Howe [102, 104] propose une expression approchée des fonctions de Green associées aux demi-plans situés au-dessus et au-dessous d'un orifice rectangulaire :

$$G_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \frac{1}{\pi} \ln(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|/s) + a_{\pm}(\omega) \quad (1.32)$$

où $a_+(\omega)$ et $a_-(\omega)$ sont deux constantes qui caractérisent le comportement acoustique des demi-plans supérieurs et inférieurs.

Si la source acoustique est modélisée par un échange de masse ou de quantité de mouvement total, il est bien entendu plus facile de modéliser le comportement acoustique de la cavité en terme d'impédance[49, 54, 118, 143]. Dans ce cas, l'écoulement acoustique est supposé homogène sur toute la surface de l'ouverture et de vitesse $\mathbf{u}_a(x_1, x_2, x_3, t) = u_a(t) \mathbf{x}_2$. Pour un résonateur de Helmholtz, la formule (1.11) est généralement utilisée en notant que $d\zeta/dt = \langle u_2 \rangle = \langle (u_r)_2 \rangle + u_a$ où $\langle \cdot \rangle$ désigne un moyennage spatial sur toute la surface S de l'ouverture. De manière générale,

on exprime la réponse acoustique de la cavité par la relation :

$$S\langle\hat{u}_2\rangle = \frac{1}{Z_A}\langle\hat{p}_{out}\rangle \quad (1.33)$$

ce qui dans le cas d'un résonateur de Helmholtz[117, 118, 140] s'écrit, dans le domaine fréquentiel :

$$\hat{Q} = \frac{i\omega S^2\langle\hat{p}_{out}\rangle}{-\omega^2 M + i\omega R + K} \quad (1.34)$$

où $\hat{Q} = \hat{Q}_r + \hat{Q}_a = S\langle\hat{u}_2\rangle$ est le débit total traversant l'orifice.

Modèles de couplage

Egalité des pressions aérodynamique et acoustique

Malgré quelques limitations importantes (modèle linéaire, hypothèse du film de vorticité...), le développement analytique proposé par Howe (§1.2.1) pour la modélisation du sheartone offre l'avantage de pouvoir faire intervenir de façon naturelle l'influence des phénomènes acoustiques. En effet, on voit clairement sur les équations (1.20) et (1.21) que les fluctuations de pression sont calculées à partir de la fonction de Green en champ libre. Pour la prise en compte d'une géométrie particulière du type cavité par exemple, on peut utiliser la fonction de Green associée à cette géométrie dont il a calculé une expression approchée (  quation (1.32)).

Ainsi, l'équation (1.24) peut se mettre sous la forme générale :

$$\int_{-1}^1 \hat{\zeta}(\xi') \ln |\xi - \xi'| d\xi' = A[\hat{p}_0] + \alpha_1(\xi) e^{i\sigma_1\xi} + \alpha_2(\xi) e^{i\sigma_2\xi} + B(a_+ + a_-)\hat{Q} \quad (1.35)$$

où les constantes A , B , α_1 et α_2 dépendent de ω et des autres paramètres (s , ρ_0 ...).

Le premier terme du membre de droite représente les fluctuations de pression externe appliquées au système. Les deuxième et troisième termes traduisent les fluctuations de pression générées par les instabilités de Kelvin-Helmholtz. Le dernier terme représente les fluctuations de pression acoustique qui sont associées au débit volumique global \hat{Q} qui traverse l'ouverture. L'équation (1.35) permet donc de calculer le mouvement du film de vorticité soumis à ces trois phénomènes. La difficulté du calcul des fonctions de Green (détermination de a_+ et a_-) peut être contournée si l'on remarque que le terme $(a_+ + a_-)$ représente l'impédance acoustique Z_A sans écoulement de l'orifice définie par l'équation (1.33). C'est cette démarche qu'utilise Meissner[143] sur le cas d'une cavité profonde. Cependant pour l'évaluation des modes auto-entretenus, il ne passe pas par l'intermédiaire de la conductivité de Rayleigh corrigée que l'on peut déduire de (1.35). En effet, on peut dans un premier temps déterminer la pression totale $\langle\hat{p}_r\rangle$ générée par le mouvement du film de vorticité soumis à un flux externe \hat{Q} supposé connu, sans prendre en compte l'impédance acoustique du système : cela revient donc exactement au calcul incompressible de Howe en utilisant une fonction de Green aérodynamique. Dans un second temps, on calcule la pression acoustique cr  e par le débit volumique \hat{Q} en utilisant la relation $\langle\hat{p}_a\rangle = Z_A\hat{Q}$. En égalant ces deux pressions $\langle\hat{p}_r\rangle = \langle\hat{p}_a\rangle$, on peut alors calculer les éventuelles solutions du système en terme de fréquences et de nombres d'onde $\sigma_{1,2}$. On voit alors que les démarches de Howe et Meissner sont

complètement équivalentes puisque la méthode de Meissner consiste en fait à trouver les solutions (non nulles) de l'équation (1.35) en supposant $[\hat{p}_0] = 0$.

Il faut noter à nouveau que la détermination des fréquences et des nombres d'onde associés à une oscillation auto-entretenu passe par l'application de la condition de Kutta au niveau du bord amont : c'est le respect de cette condition qui conduit à l'organisation cohérente des instabilités de l'écoulement. En présence d'une résonance acoustique, le flux acoustique devient prédominant par rapport aux fluctuations aérodynamiques et fixe alors l'organisation des modes aérodynamiques.

Malgré les hypothèses importantes nécessaires pour conduire jusqu'au bout ce type de calcul, les comparaisons avec des résultats expérimentaux semblent relativement satisfaisantes[74, 143]. Mais le principal apport de cette analyse est d'établir clairement le mécanisme physique responsable du couplage écoulement / acoustique : le bouclage de phase se fait via la condition de Kutta.

Bilan d'énergie

L'approche linéaire présentée dans le paragraphe précédent est globalement basée sur une relation de phase entre le phénomène d'instabilités aérodynamiques et la réponse acoustique de la cavité. Mais on peut aussi essayer de trouver les domaines d'auto-oscillation en calculant l'énergie des fluctuations acoustiques générées par le système. Evidemment cela nécessite alors une modélisation non-linéaire des phénomènes. Classiquement, Hirschberg[95], Bruggeman *et al.*[23] ou Dequand *et al.*[49] calculent la puissance P acoustique à partir de la théorie du Vortex Sound (équation (1.31)). Le modèle d'écoulement non-linéaire proposé par Nelson *et al.*[151] et présenté dans le paragraphe 1.2.2 est utilisé. En remarquant que $\Gamma(t) = \int_A \Omega(x_1, x_2, t) dA$ et en supposant que le tourbillon est ponctuel, on peut écrire[95] :

$$\Omega(x_1, x_2, t) = -(t - nT) \frac{U_0^2}{2} \delta(x_1 - x_1^\Omega) \delta(x_2 - x_2^\Omega) \quad (1.36)$$

où x_1^Ω et x_2^Ω sont les coordonnées du tourbillon. On a donc $x_1^\Omega = (t - nT)U_c$ et $x_2^\Omega = 0$. Si le temps de trajet d'un tourbillon au-dessus de l'ouverture est supérieur à la période de l'oscillation ($\tau > T$), la vorticité est injectée dans un autre tourbillon et la vorticité du premier tourbillon est saturée à sa valeur au temps T :

$$\Omega(x_1, x_2, t) = -T \frac{U_0^2}{2} \delta(x_1 - x_1^\Omega) \delta(x_2 - x_2^\Omega) \quad (1.37)$$

En résumé, si $fL/U_c < 1$ alors l'expression (1.36) doit ˆtre utilisée pour la vorticité et si $fL/U_c > 1$, on doit prendre l'expression (1.37). On peut supposer de plus que l'écoulement acoustique s'écrit sous la forme $\mathbf{u}_a = (0, -u'_a \sin(\omega t), 0)$, avec $\omega = 2\pi/T$. On remarque au passage que l'expression de la vitesse acoustique, notamment en terme de phase, est basée sur les observations expérimentales[23, 150] qui indiquent qu'un nouveau tourbillon se crée à l'instant ($t = t_n = nT$) où la vitesse change de signe pour devenir négative.

Ainsi, l'expression (1.31) peut ˆtre utilisée en prenant $\mathbf{u} = (U_c, 0, 0)$ pour calculer la valeur de la puissance acoustique moyenne \overline{P} crée par l'écoulement turbulent. Sur la figure 1.19, les

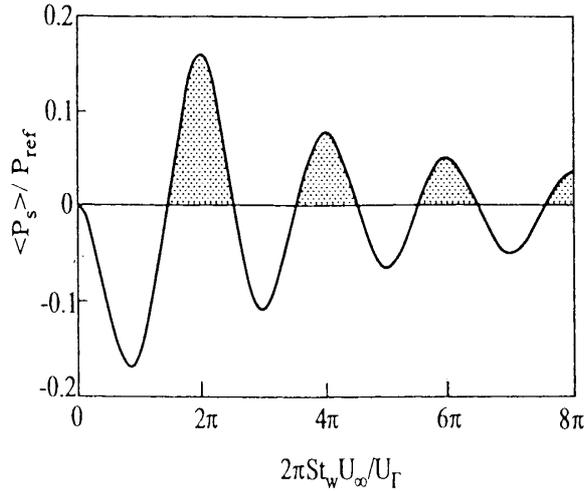


FIG. 1.19 – Puissance acoustique ($\langle P_s \rangle \equiv \overline{P}$) calculée à partir de la théorie du Vortex Sound en utilisant le modèle de Nelson. Notations : $St_w = 2\pi St$, $U_\infty \equiv U_0$, $U_\Gamma \equiv U_c$. Les auto-oscillations sont possibles quand $\langle P_s \rangle > 0$ (Hirschberg[95]).

zones d’auto-oscillation possibles sont grisées et représentent les intervalles de fréquences adimensionnelles pour lesquelles il y a création d’énergie acoustique. Ce modèle non-linéaire peut être amélioré en faisant intervenir dans le bilan d’énergie les phénomènes de dissipation tels que l’amortissement acoustique associé au résonateur (frottement visqueux au col et rayonnement externe) ou les possibles dissipations turbulentes dues au décollement de l’écoulement acoustique transversal aux coins externes et internes du col du résonateur[49]. Le principal avantage de cette modélisation est de prévoir en terme d’amplitude les zones possibles d’auto-oscillation et de hiérarchiser les modes d’oscillation. On voit sur la figure 1.19 que le premier mode aérodynamique est le plus énergétique. Cependant, dans ce modèle, les caractéristiques acoustiques de la cavité n’interviennent pas. Ce modèle décrit bien un couplage entre un écoulement aérodynamique et un écoulement de type acoustique mais sans considérer la réponse acoustique propre de la cavité. Pour prendre en compte l’influence de la résonance acoustique, il faut coupler l’équation du bilan d’énergie avec une équation modélisant la réponse acoustique de la cavité. Dans le cas d’un résonateur de Helmholtz, Dequand[47] utilise bien entendu l’équation (1.11). On obtient ainsi un système couplé de deux équations et deux inconnues (la fréquence et l’amplitude de l’oscillation).

Boucle de contrôle

Historiquement, les premiers modèles non-linéaires d’oscillation auto-entretenu des écoulements affleurant des cavités résonantes ont été développés à partir d’une représentation intuitive du phénomène : la boucle de contrôle[41]. L’idée est de rechercher les fréquences d’auto-oscillation d’un système bouclé constitué de deux fonctions de transfert représentant les deux mécanismes physiques principaux : l’excitation aérodynamique et la réponse acoustique. Etant donné que les fonctions de transfert sont non-linéaires, cette méthode permet également d’évaluer l’amplitude des auto-oscillations.

Même si de nombreux auteurs ont adapté cette méthode en employant divers modèles[41, 54, 118, 140] pour l'écoulement ou la cavité, l'expression des fonctions de transfert se fait toujours en terme de débits aérodynamique Q_r et acoustique Q_a . Ainsi, en supposant le débit acoustique connu, la fonction *forward* s'exprime par le rapport $Q_r(Q_a)/Q_a$. Pour évaluer cette fonction, on doit donc calculer le débit aérodynamique Q_r (en fonction de Q_a) en supposant le débit acoustique Q_a connu. De même, en supposant le flux aérodynamique connu, on exprime la fonction *backward* par le rapport $Q_a(Q_r)/Q_r$. Les différentes approches[41, 54, 140] pour exprimer ces deux fonctions de transfert ne sont pas toutes présentées en détail dans cette synthèse. On se contentera de présenter le modèle de Kook-Mongeau[117, 118] dont une version programmée nous a été fournie par L. Mongeau (Purdue University, USA). Ce programme a servi de base pour le développement d'un outil de prédiction du battement de toit ouvrant (voir §1.2.3).

Kook[117] calcule la fonction *forward* à partir de la théorie du Vortex Sound (équation (1.31)) en remarquant que la force de Coriolis totale peut s'exprimer seulement en fonction de la circulation totale $\Gamma(t)$:

$$\mathbf{F}_c = \int_V \mathbf{f}_c dV = b \int_A -\rho_0 (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u}) dA = -\rho_0 b \int_A \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}_3 \wedge U_c \mathbf{x}_1 dA = -\rho_0 b \Gamma(t) U_c \mathbf{x}_2 \quad (1.38)$$

La pression moyenne due à la force de Coriolis s'exerçant sur la surface S du col du résonateur est donc, dans le domaine fréquentiel :

$$\langle \hat{p}_{out} \rangle = \frac{\rho_0 U_c}{L} \Gamma(\omega) \quad (1.39)$$

La circulation est calculée à partir du modèle d'écoulement de Nelson (paragraphe 1.2.2). Cependant, Kook[117] considère que la vorticité n'est pas ponctuelle mais distribuée sur une largeur variable. Il montre ainsi que la source d'excitation totale est pondérée par un coefficient $0 \leq \alpha \leq 1$. Ce paramètre représente donc le degré de concentration du tourbillon : $\alpha = 1$ représente un tourbillon discret (ponctuel) et $\alpha = 0$ une couche de mélange où la vorticité est uniformément répartie. Il obtient alors :

$$\langle \hat{p}_{out} \rangle = \alpha \rho_0 U_0^2 \frac{1}{2\pi St} e^{-i2\pi St} \quad (1.40)$$

On peut alors calculer le débit aérodynamique cr  e dans l'ouverture par cette force de pression en appliquant l'équation (1.7) : on ne considère pas l'effet du volume de la cavité, c'est-à-dire que l'on suppose $p_{in} = 0$. Il vient alors :

$$\hat{Q}_r = -\frac{S^2 \langle \hat{p}_{out} \rangle}{i\omega M} = -\frac{\alpha \rho_0 S^2 U_0^2}{i\omega 2\pi St M} e^{-i2\pi St} \quad (1.41)$$

Finalement, en utilisant là encore le résultat expérimental qui donne la différence de phase entre débit acoustique et instabilités aérodynamiques[23, 150], on peut écrire que $\hat{Q}_a = -|\hat{Q}_a|$. D'où l'expression finale de la fonction de transfert *forward* :

$$\left(\frac{\hat{Q}_r}{\hat{Q}_a} \right)_f = \frac{\alpha \rho_0 S^2 U_0^2}{i\omega 2\pi St M |\hat{Q}_a|} e^{-i2\pi St} \quad (1.42)$$

On voit que cette fonction est non-linéaire à cause de la présence de $|\hat{Q}_a|$ dans le membre de droite.

La fonction *backward* est calculée à partir de la relation (1.34) où $\langle \hat{p}_{out} \rangle$ est exprimé en fonction de \hat{Q}_r à l'aide de la relation (1.7). On a ainsi :

$$\left(\frac{\hat{Q}_a}{\hat{Q}_r} \right)_b = \frac{-(2\zeta\omega_r(i\omega) + \omega_r^2)}{(i\omega)^2 + 2\zeta\omega_r(i\omega) + \omega_r^2} \quad (1.43)$$

où $\zeta = 1/2Q$ est le facteur d'amortissement du résonateur.

La recherche des cycles limites stables du système vérifiant la relation :

$$\left(\frac{\hat{Q}_r}{\hat{Q}_a} \right)_f \cdot \left(\frac{\hat{Q}_a}{\hat{Q}_r} \right)_b = 1 \quad (1.44)$$

se fait dans le plan complexe[193]. Les solutions de cette équation permettent de déterminer les fréquences et les amplitudes des oscillations auto-entretenues. Des exemples de calcul pour le battement de toit ouvrant sont présentés dans le paragraphe suivant.

Etant donné la formulation du modèle, on peut considérer que l'approche de type boucle de contrôle exprimée à l'aide d'éléments-blocs permet de représenter seulement le couplage acoustique entre écoulement et la cavité. Ainsi le phénomène de couplage aérodynamique (sheartone) n'est pas du tout pris en compte. Ce type de modèle est donc valable uniquement autour des fréquences de coïncidence. Comme le soulignent Elder *et al.*[54] cette limitation du modèle peut s'avérer importante notamment si l'on désire prédire correctement l'intervalle des vitesses critiques d'oscillation. En effet, on a vu que dans les conditions hors résonance, c'est le phénomène du sheartone qui prédomine (voir 1.1.4).

On peut remarquer que le modèle de couplage acoustique proposé par Howe[102, 104] et surtout Meissner[143] (paragraphe *Egalité des pressions aérodynamique et acoustique*) est tout à fait similaire au modèle de type boucle de contrôle présenté ici. La principale différence (mis à part la linéarité du modèle) provient du fait que le bouclage de phase s'exprime par une égalité des pressions aérodynamique et acoustique au lieu de la formulation en terme de débits volumiques.

1.2.3 Optimisation et validation du modèle de Kook-Mongeau

Le modèle de Kook-Mongeau

Le modèle de Kook-Mongeau consiste en la résolution en amplitude et en fréquence de l'équation (1.44). Cette équation peut s'écrire sous la forme :

$$1 + N(|\hat{Q}_r|, \omega) G(i\omega) = 0 \quad (1.45)$$

avec :

$$N(|\hat{Q}_r|, \omega) = \frac{1}{|\hat{Q}_r|\omega} \quad \text{et} \quad G(i\omega) = \frac{\alpha\rho_0 U_c U_0^2 S_{aero}^2}{ML_{aero}} \frac{2\zeta\omega_r(i\omega) + \omega_r^2}{i\omega \left((i\omega)^2 + 2\zeta\omega_r(i\omega) + \omega_r^2 \right)} e^{-i\omega L_{aero}/U_c}$$

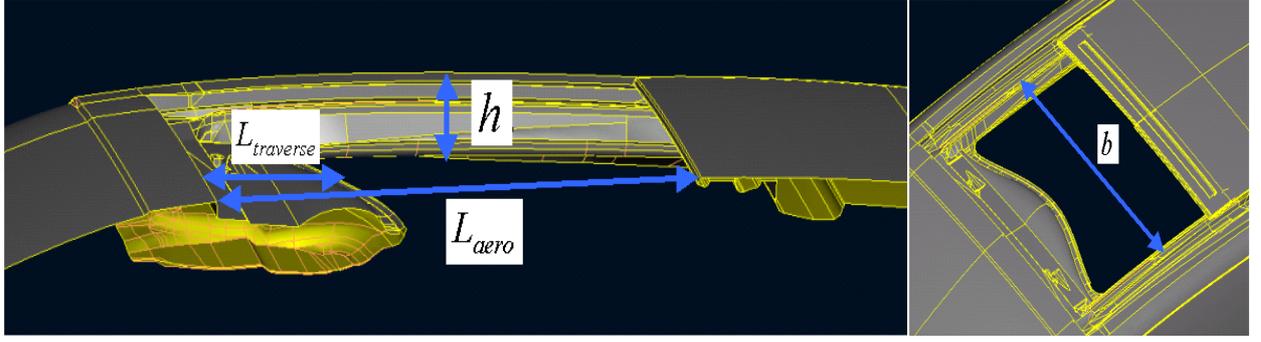


FIG. 1.20 – Notations pour l'application du modèle analytique sur l'exemple du toit ouvrant du véhicule D.

Les inconnues de l'équation sont la pulsation $\omega = 2\pi f$ et l'amplitude $|\hat{Q}_r|$ de l'oscillation. Les données d'entrée sont les paramètres géométriques tels que les dimensions du toit ouvrant et le volume de l'habitacle ainsi que les paramètres de l'écoulement tels que la vitesse de convection U_c et le taux de concentration α des tourbillons. U_0 est la vitesse de l'écoulement affleurant (vitesse du véhicule). La longueur totale de l'ouverture du toit est L_{aero} . C'est la distance parcourue par les tourbillons, c'est-à-dire la distance entre les bords amont et aval de l'ouverture. Les paramètres de la résonance acoustique sont calculés à partir des relations classiques des résonateurs de Helmholtz (voir § 1.1.3) :

$$S_{ac} = L_{ac}b, \quad \Delta h = 0.84\sqrt{\frac{S_{ac}}{\pi}}, \quad M = \rho_0 S_{ac} (h + 2\Delta h), \quad K = \frac{\rho_0 c_s^2 S_{ac}^2}{V}, \quad \omega_r = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

où b est la largeur du toit ouvrant et h la hauteur du col du résonateur, c'est à dire la distance entre la face extérieure du toit et la garniture du pavillon. Le volume de l'habitacle est V . L_{ac} est la longueur du col du résonateur (voir figure 1.20). On a donc :

$$L_{ac} = L_{aero} - L_{traverse}$$

où $L_{traverse}$ est la longueur (moyenne) de la traverse avant. Sur un véhicule, la traverse constitue un espace pour le rangement du déflecteur quand le toit ouvrant est en position fermée. La valeur théorique du facteur de qualité du résonateur est :

$$Q_{th} = 1/2\zeta = \frac{M\omega_r}{R}$$

avec

$$R = \rho_0 S_{ac}^2 \frac{\omega_r^2}{2\pi c_s}$$

Les solutions de l'équation (1.45) peuvent être évaluées en déterminant les intersections des fonctions $-1/N(|\hat{Q}_r|, \omega)$ et $G(i\omega)$ dans le plan complexe (diagramme de Nyquist). Cela revient donc à chercher les valeurs de ω pour lesquelles $G(i\omega)$ coupe l'axe des réels négatifs. L'amplitude est alors calculée à partir de $N(|\hat{Q}_r|, \omega)$. On peut ainsi calculer la fréquence et l'amplitude des n premiers modes aérodynamiques. Le mode $n = 0$, correspondant à aucun tourbillon au-dessus de l'ouverture, représente un état stable de l'écoulement, c'est-à-dire sans oscillation. Pour une

vitesse donnée, le mode prédominant est celui dont l'amplitude est la plus grande. Ceci permet de déterminer les domaines de vitesse de battement associés à chaque mode. Quand c'est le mode $n = 0$ qui prédomine, on considère qu'il n'y a pas de battement. Cette méthode de détermination des intervalles de vitesses de battement n'a pas été analysée sur le plan théorique et il semble que les résultats soient parfois un peu surprenants. Comme on peut l'imaginer, l'évaluation précise des vitesses d'établissement et d'extinction des modes d'instabilités est un problème d'une complexité bien plus grande que la seule évaluation des vitesses critiques et des niveaux d'oscillation maximums.

Recalage des paramètres

—— CONFIDENTIEL RENAULT ——

Procédure de calcul

—— CONFIDENTIEL RENAULT ——

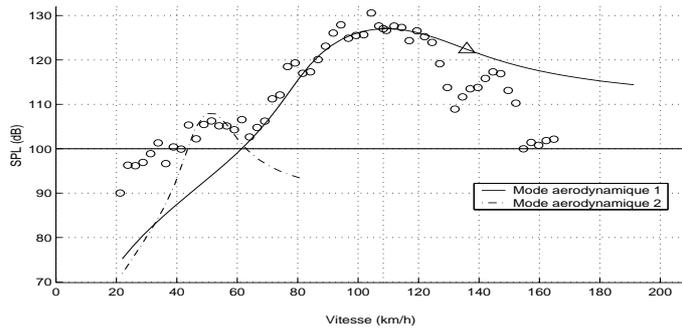
Validation expérimentale du modèle

Les figures 1.21, 1.22, 1.23 et 1.24 présentent les résultats du modèle et des mesures expérimentales pour les véhicules A, B, C et D. Les graphes de gauche sont les sorties graphiques du programme. Ils donnent l'amplitude du battement en fonction de la vitesse du véhicule. Les paramètres de calcul et un récapitulatif des principaux résultats sont aussi donnés dans cette fenêtre de sortie. Les graphes de droite montrent, à titre indicatif, les comparaisons calcul/mesure de l'évolution de la fréquence du battement. Le tableau 1.1 présente l'erreur relative entre le modèle et les mesures pour les principaux paramètres qui caractérisent le battement de toit ouvrant d'un véhicule.

	A	B	C	D
Fréquence	0.1%	3%	0.5%	12%
Niveau	1.5%	1.6%	0.8%	6.6%
Vitesse Critique	1.8%	13%	1.7%	6.4%
Vitesse Début	10%	25%	15%	28%
Vitesse Fin	0.7%	8.7%	4.1%	10%

TAB. 1.1 – *Erreur relative de la prédiction du battement avec le modèle analytique recalé.*

On peut constater que le modèle analytique donne des résultats satisfaisants pour les trois premiers véhicules. Pour le véhicule D, la prédiction n'est pas bonne. On remarque que la différence entre les résultats du modèle et les mesures est liée, en partie, à une mauvaise prédiction de la



PARAMETRES :

CONFIDENTIEL
RENAULT

RESULTATS :

Vitesse critique = 108 km/h

Niveau de battement = 127 dB

Fréquence du battement = 20.9863 Hz

Début du battement : voir figure

Fin du battement = 136 km/h

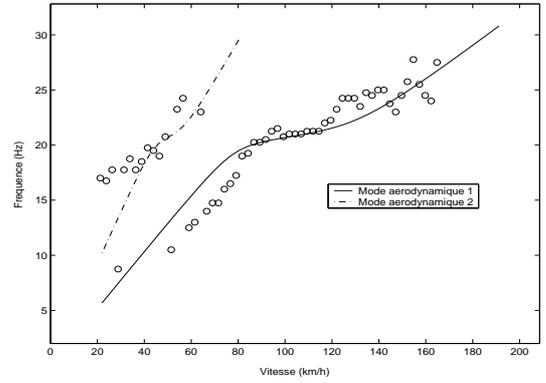
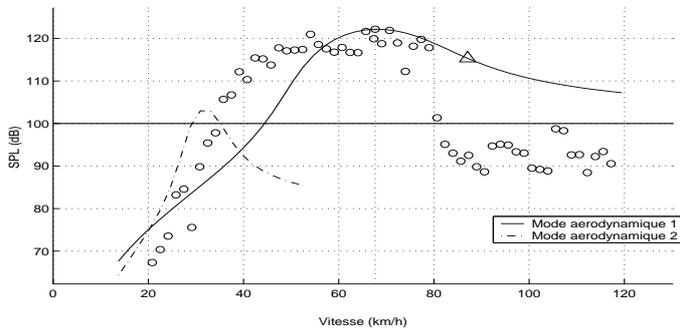


FIG. 1.21 – Comparaison des résultats du modèle analytique et des mesures sur piste pour le véhicule A. — et - - - : modèle. o : mesures.



PARAMETRES :

CONFIDENTIEL
RENAULT

RESULTATS :

Vitesse critique = 68 km/h

Niveau de battement = 122 dB

Fréquence du battement = 20.4184 Hz

Début du battement : voir figure

Fin du battement = 87 km/h

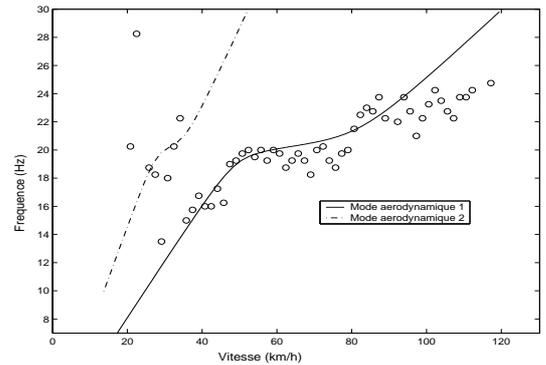
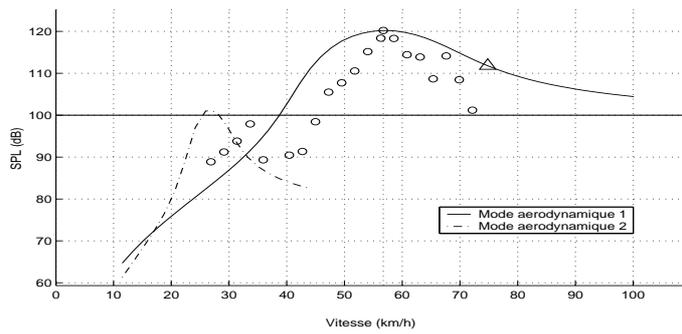


FIG. 1.22 – Comparaison des résultats du modèle analytique et des mesures sur piste pour le véhicule B. — et - - - : modèle. o : mesures.



PARAMETRES :

CONFIDENTIEL
RENAULT

RESULTATS :

Vitesse critique = 57 km/h

Niveau de battement = 120 dB

Fréquence du battement = 19.6358 Hz

Début du battement : voir figure

Fin du battement = 75 km/h

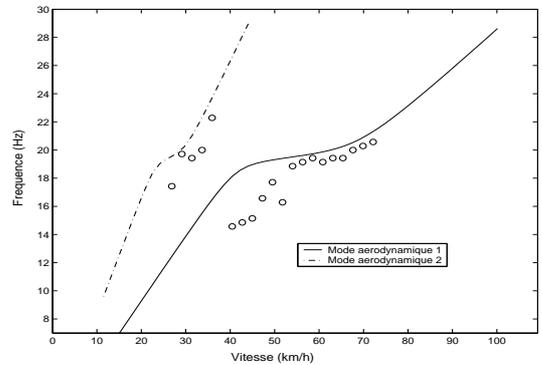
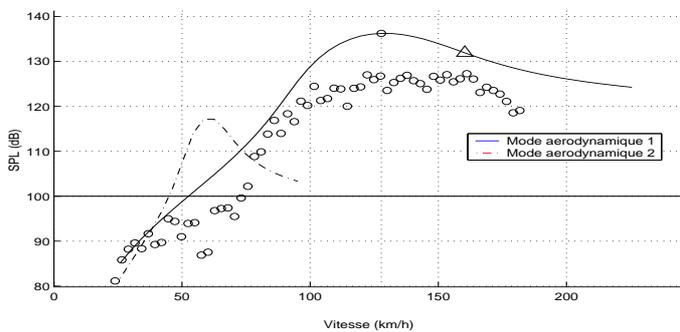


FIG. 1.23 – Comparaison des résultats du modèle analytique et des mesures sur piste pour le véhicule C. — et - - - : modèle. o : mesures.



PARAMETRES :

CONFIDENTIEL
RENAULT

RESULTATS :

Vitesse critique = 128 km/h

Niveau de battement = 136 dB

Fréquence du battement = 20.023 Hz

Début du battement : voir figure

Fin du battement = 160 km/h

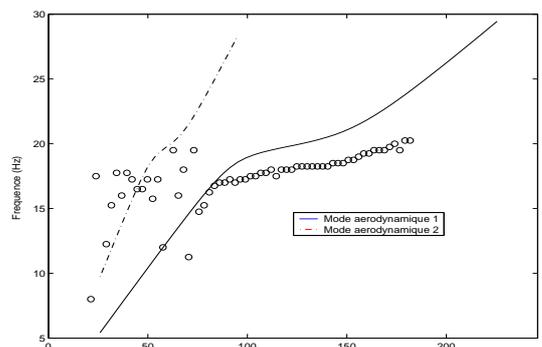


FIG. 1.24 – Comparaison des résultats du modèle analytique et des mesures sur piste pour le véhicule D. — et - - - : modèle. o : mesures.

fréquence de résonance du véhicule. Une interprétation de ce décalage des fréquences est donnée dans le paragraphe 4.3. D'autre part, les niveaux de battement expérimentaux sont relativement bas par rapport à ce que l'on aurait pu attendre pour une vitesse critique aussi élevée. Ceci peut être attribué à la structure particulière de l'écoulement affleurant observée grâce aux calculs numériques effectués sur ce véhicule (§4.4). En effet, l'écoulement est fortement tridimensionnel ce qui implique une faible cohérence de la vorticité dans la direction \mathbf{x}_3 et donc un niveau d'excitation assez bas.

1.2.4 Conclusion

Comme on a pu s'en apercevoir dans cette partie, il n'existe pas de modèle unifié et complet du phénomène d'auto-oscillation d'un écoulement affleurant une cavité. Ce constat provient du nombre important de phénomènes physiques (tous difficiles à modéliser) qui entrent en jeu dans le mécanisme global. On a vu cependant que l'organisation cohérente des instabilités est due à l'action d'un champ de vitesse externe (champ de rétroaction) au niveau du bord de séparation via la condition de Kutta. Malheureusement, la condition de Kutta ne s'écrit analytiquement de façon rigoureuse qu'en supposant que la couche de mélange est infiniment mince, ce qui est ennuyeux puisque l'on a mis en évidence que l'épaisseur de la couche de mélange était un paramètre très important. Les divers résultats expérimentaux (chapitre 1.1.2) montrent notamment que le paramètre L/θ_0 détermine le mode aérodynamique d'oscillation préférentiel. Ceci est d'autant plus vrai que l'amplitude de la rétroaction est faible, ce qui est le cas pour le sheartone. Dans ce cas, les caractéristiques intrinsèques de la couche de mélange (le taux d'amplification, la vitesse de convection des instabilités) peuvent intervenir. Dans le cas d'une rétroaction acoustique forte, c'est-à-dire quand on se trouve dans une zone de coïncidence de fréquences, l'influence de l'épaisseur de couche limite est moins importante mais reste quand même un paramètre qui peut faire varier l'amplitude des oscillations.

Le champ de vitesse de rétroaction peut être d'origine purement aérodynamique ou dépendre des caractéristiques acoustiques de la cavité. Cette distinction qui permet de classer les configurations en couplage aérodynamique, couplage par rétro-propagation acoustique directe ou couplage acoustique par résonance n'est que formel puisque si l'on pouvait exprimer la fonction de Green réelle pour toutes les configurations, on pourrait complètement unifier ces catégories. Par exemple, le couplage aérodynamique n'est autre qu'un couplage par rétro-propagation acoustique dans le cas où le bord amont est situé dans le champ proche de la source. De même, comme le suggère Howe dans son approche, le couplage par une résonance acoustique peut être exprimé à l'aide d'une fonction de Green qui prend en compte les modes acoustiques de la cavité. Evidemment, il ne semble pas très judicieux de vouloir représenter le comportement acoustique d'une cavité résonante à l'aide du formalisme des fonctions de Green. Dans la plupart des cas, on choisit plutôt de représenter l'acoustique de la cavité en terme d'impédance et de débit acoustique total. Cette représentation habituelle de l'acoustique implique que l'on exprime l'excitation aérodynamique comme une grandeur globale, moyenn e sur toute l'ouverture. On a vu que cette excitation peut être modélisée par une fluctuation de masse au niveau de l'ouverture due au mouvement trans-

versal du fluide ou bien par une force fluctuante représentant l'action du tourbillon sur le champ acoustique. Ces deux modèles de sources ont été utilisés en association avec le formalisme de boucle de contrôle et il est assez étonnant de constater que les deux types de source donnent des résultats équivalents. Ce point met en évidence le caractère empirique de ce type de modélisation. Globalement, on peut dire que le point important pour déterminer la fréquence de l'oscillation est la relation de phase entre le débit acoustique et les instabilités aérodynamiques. Dans tous les modèles non-linéaires, cette relation est fixée de façon empirique. Ainsi la fréquence de l'oscillation ne dépend pas du tout de la physique précise de la source d'excitation. Par contre, il est naturel de penser que l'amplitude des oscillations dépend fortement de la source. Or, même si le modèle est non-linéaire, il y a toujours des paramètres correctifs à fixer qui permettent de recalibrer l'amplitude. Ainsi, comme le soulignent Fabre & Hirschberg[57], une étape de recalage expérimental des modèles est presque toujours nécessaire. Le modèle analytique devient donc un modèle semi-empirique où l'interprétation des valeurs des différents paramètres perd son sens, même si, comme on l'a vu pour le modèle de battement de toit ouvrant, on peut essayer de justifier les modifications apportées au modèle par des considérations physiques.

1.3 Méthodes d'atténuation des oscillations auto-entretenues

A l'exception des applications musicales[57], l'auto-oscillation d'un écoulement affleurant une cavité est presque toujours un phénomène indésirable. Les méthodes visant à réduire ce phénomène peuvent être classées en deux grandes catégories : les modifications géométriques de l'ouverture et l'apport externe d'énergie.



FIG. 1.25 – Photographie du déflecteur du véhicule D.

1.3.1 Modifications géométriques

Le principe physique de ce premier type de solution est de réduire au maximum la cohérence des fluctuations aérodynamiques entre les deux bords de l'ouverture. Pour cela, de nombreuses solutions techniques ont été imaginées et testées[175, 178]. Une des techniques les plus efficaces est de placer un déflecteur au niveau du bord amont de l'ouverture : cette excroissance a pour principal effet de dévier l'écoulement cisailé au-dessus de l'ouverture et d'empêcher ainsi l'impact des instabilités tourbillonnaires sur le bord aval. Pour certains déflecteurs de toit ouvrant auto-

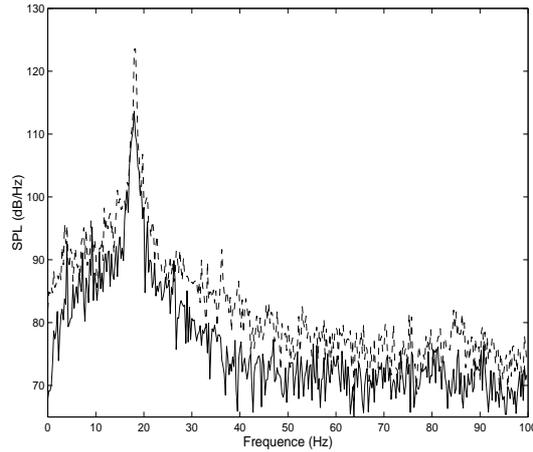


FIG. 1.26 – Comparaison des spectres de pression dans l’habitacle du véhicule *D* avec (—) et sans (---) déflecteur. $U_0 = 36$ m/s.

mobile (voir photographie 1.25) placés en totalité dans l’écoulement, légèrement en aval du bord de séparation, l’effet est de détruire complètement la couche de mélange : une partie du flux passe au-dessus du déflecteur et l’autre partie passe en dessous. L’efficacité de ce type de déflecteur est représenté sur la figure 1.26. On voit une diminution de l’ordre de 13 dB du niveau de battement. De plus, on remarque une diminution significative du niveau de toutes les composantes fréquentielles situées autour de la fréquence de battement.

1.3.2 Méthodes d’atténuation actives

La seconde catégorie de solutions de réduction des oscillations d’un écoulement affleurant une cavité regroupe les méthodes d’atténuation actives où un apport d’énergie externe est nécessaire.

Injection ou aspiration continue de fluide

Un exemple d’apport continu est l’injection ou l’aspiration continue de fluide au niveau du bord amont de l’ouverture[125, 185, 215]. L’apport constant de fluide semble avoir deux conséquences sur l’écoulement principal. Tout d’abord, il semble que le jet secondaire dévie l’écoulement principal. Ce phénomène est visible dans la simulation de Lamp & Chokani[125], notamment pour des forts débits injectés. On peut ainsi considérer que le jet a la même action qu’un déflecteur. Mais l’effet le plus important de l’injection est l’augmentation de l’épaisseur de la couche limite incidente. Valiki & Gauthier[215] essaient d’évaluer analytiquement cette augmentation. Il a été montré dans le paragraphe 1.1.4 que le mode aérodynamique n n’existe que si $L/\theta_0 > 4n^2\pi$. Ainsi, une limite approximative pour la disparition totale des oscillations est de $(L/\theta_0)_{min} = 4\pi$. Expérimentalement, Ziada & Rockwell[228] obtiennent $(L/\theta_0)_{min} \approx 30$, ce qui représente environ $(\delta_0)_{max} = L/3$. Sarohia[182] trouve quant à lui $(\delta_0)_{max} = L/5$. Dans le cas des toits ouvrant automobiles, une disparition complète des oscillations nécessiterait de faire passer l’épaisseur de la couche limite de 2 cm à 10 ou 20 cm ! Cependant, comme le font remarquer Ahuja & Mendoza[2], une augmentation même partielle de δ_0 conduit à une diminution sensible de l’amplitude des oscillations. Ainsi, ce principe de réduction a été testé pour la réduction du battement de toit

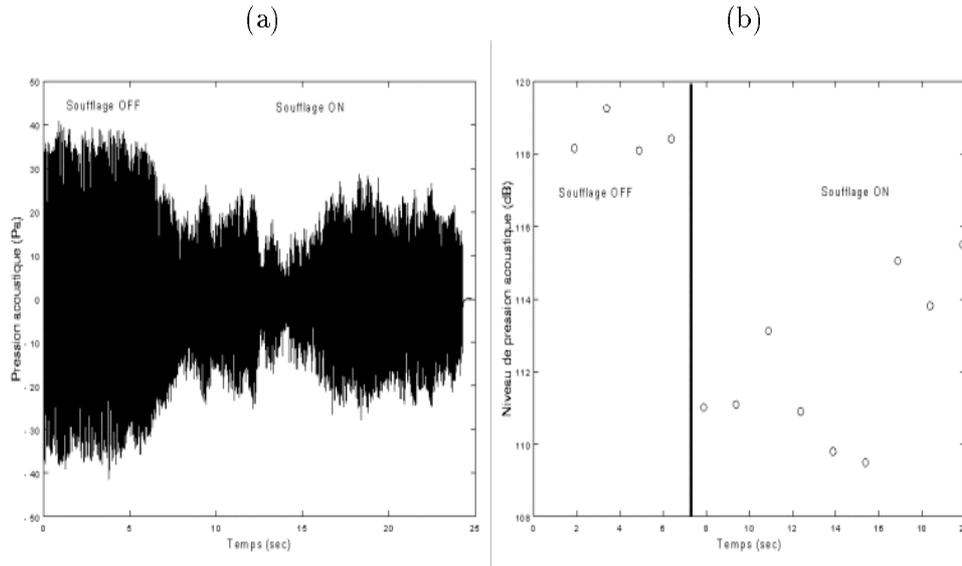


FIG. 1.27 – *Mesure de l'efficacité du système d'injection d'air pour la diminution du battement de toit ouvrant. (a) : Signal temporel de pression dans l'habitacle. (b) : Niveau du pic de battement en fonction du temps. Le trait vertical représente l'instant de mise en route du système.*

ouvrant[169, 170]. Le système consiste en une plaque perforée montée sur un volume relié à un système de compression d'air. La plaque est placée à 1 cm au-dessous du bord amont de l'ouverture. Pour les essais sur route réalisés sur le véhicule C, on se place à la vitesse critique de battement, le système d'injection étant arrêté. Après quelques secondes d'acquisition du signal de pression, le système est mis en marche brutalement. Sur une même acquisition, on peut donc comparer les niveaux de battement avec et sans injection d'air (figure 1.27). Même si le battement ne disparaît pas complètement, la diminution du niveau n'est pas négligeable (entre 5 dB et 8 dB).

Contrôle actif en boucle ouverte

L'apport d'énergie peut être aussi de nature oscillatoire. Par exemple, le contrôle actif en boucle ouverte consiste à exciter l'écoulement à une fréquence différente de la fréquence naturelle d'oscillation, c'est-à-dire la fréquence pour laquelle il y a bouclage de phase au bord de séparation de l'écoulement. Si l'excitation a une amplitude suffisante, l'effet des fluctuations excitatrices provenant de l'écoulement périodique peut être annulé. De nombreux modes de forçage de l'oscillation ont été proposés : excitation par des ondes acoustiques[185], excitation par injection pulsée de fluide[181], excitation thermique de la couche limite[64], excitation mécanique par des clapets oscillants ou des systèmes piézo-électriques[185, 201]. Les meilleurs résultats sont obtenus quand la fréquence d'excitation est légèrement supérieure à la fréquence d'oscillation auto-entretenu. Dans le cas d'un toit ouvrant, ce type de solution semble relativement intéressant étant donné que la fréquence d'oscillation à atténuer est connue et constante[171].

Contrôle actif en boucle fermée

Des systèmes de contrôle actif en boucle fermée ont aussi été proposés. Là encore, on trouve de nombreuses méthodes d'excitations (excitation acoustique[198, 202], mécanique[148],...). Généralement, le contrôle actif en boucle fermée nécessite une énergie moins importante que le contrôle actif en boucle ouverte, pour une efficacité souvent supérieure. Cependant, même avec un algorithme de contrôle performant, l'application industrielle de ces solutions est souvent bloquée par un manque de puissance et de robustesse des différents actionneurs.

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, les différents mécanismes physiques qui entrent en jeu dans le phénomène d'oscillation auto-entretenu d'un écoulement affleurant ont été présentés. Pour des configurations très simples, c'est-à-dire qui sont proches de la configuration idéale théorique, des modèles analytiques peuvent être obtenus. Par exemple, un modèle de prédiction de la fréquence et du niveau de battement de toit ouvrant automobile a été décrit. Cependant, pour des configurations géométriques plus complexes, et notamment pour la prise en compte des déflecteurs, une approche analytique semble difficile. Même en introduisant de nombreux paramètres physiques pour représenter la complexité de la configuration (géométrie exacte, caractéristiques de l'écoulement θ_0 , $d\theta/dx_1$, angle de l'écoulement principal par rapport au plan de l'ouverture, etc...), il faudrait sans doute une étape de recalage expérimental encore plus importante que dans le cas idéal.

L'autre alternative est d'utiliser un outil de simulation numérique de mécanique des fluides. L'analyse des phénomènes physiques permet d'établir le cahier des charges de cet outil :

1. La simulation numérique doit être **instationnaire**. Cependant, selon la décomposition triple de la turbulence présentée précédemment, seule la composante cohérente de l'écoulement doit être résolue explicitement.
2. Le reste du spectre de la turbulence ne doit pas être négligé. En effet, **une modélisation de la turbulence** non supportée par le maillage et/ou par le schéma numérique doit être intégrée pour une bonne évaluation des grandeurs moyennes de l'écoulement tels que l'épaisseur de la couche limite amont ou le taux de développement de la couche de mélange.
3. Le problème de battement de toit ouvrant est lié au phénomène de coïncidence des fréquences entre l'écoulement instationnaire et une résonance acoustique de cavité. Lors de cette coïncidence, le flux acoustique agit de manière importante sur l'écoulement affleurant. La prise en compte du comportement acoustique de la cavité ne peut donc pas se faire par une simple approche de type excitation \rightarrow réponse. Le couplage entre les deux phénomènes est un couplage fort. Le modèle numérique doit donc directement prendre en compte cet effet de résonance acoustique : le calcul doit être un **calcul compressible**.

Nous allons voir dans la suite de ce document que la méthode Boltzmann sur Réseau répond bien à ces diverses contraintes.

Chapitre 2

La méthode Boltzmann sur Réseau

La dynamique d'un écoulement est décrite par les équations d'Euler pour un fluide idéal et par les équations de Navier-Stokes pour un fluide visqueux. Ces équations qui traduisent l'évolution des variables thermodynamiques macroscopiques du fluide dans cet écoulement, peuvent être obtenues par deux approches différentes : la méthode des bilans de la mécanique des milieux continus ou la théorie cinétique des gaz. La théorie cinétique, qui décrit le mouvement des particules au niveau microscopique, peut être considérée comme une représentation du comportement du fluide équivalente aux équations d'Euler et de Navier-Stokes. D'un point de vue de la simulation numérique, l'avantage principal de l'approche microscopique est la simplicité de l'équation de Boltzmann par rapport aux équations de conservation macroscopiques.

2.1 De Boltzmann à Navier-Stokes

Dans ce chapitre, le passage de la description microscopique à la description macroscopique est présenté. Le but de cette partie n'est pas de présenter de façon exhaustive et rigoureuse la théorie de la mécanique statistique mais seulement les aspects nécessaires pour la compréhension de la méthode Boltzmann sur Réseau (ou LBM pour Lattice Boltzmann Method). Les développements mathématiques, notamment pour le développement de Chapman-Enskog, sont aussi présentés de manière très simplifiée pour faire ressortir les notions physiques importantes.

2.1.1 L'équation de Boltzmann continue

Dans la théorie cinétique[109], un gaz monoatomique peut être représenté par un nuage de particules ponctuelles dont le comportement est décrit de manière statistique par une fonction de distribution $f_m(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$. Cette fonction représente le nombre de particules au point \mathbf{x} et au temps t qui possèdent la vitesse \mathbf{c} . En notant m la masse moléculaire du gaz, on peut définir la fonction de distribution en terme de densité : $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) = m f_m(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$. De façon immédiate, on peut définir les variables macroscopiques du fluide (la densité ρ , la quantité de mouvement $\rho \mathbf{u}$ et l'énergie interne e) au point \mathbf{x} et au temps t en faisant la somme sur toutes les vitesses possibles de la masse, la quantité de mouvement et l'énergie des particules :

$$\rho = \int_{\mathfrak{R}^3} f d\mathbf{c} \quad (2.1)$$

$$\rho \mathbf{u} = \int_{\mathfrak{R}^3} \mathbf{c} f d\mathbf{c} \quad (2.2)$$

$$\rho e + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{R}^3} |\mathbf{c}|^2 f d\mathbf{c} \quad (2.3)$$

On peut écrire la relation (2.3) sous la forme équivalente :

$$\rho e = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{R}^3} |\mathbf{c} - \mathbf{u}|^2 f d\mathbf{c} \quad (2.4)$$

L'énergie interne représente donc l'énergie cinétique d'agitation des particules autour du champ de vitesse macroscopique \mathbf{u} . On peut donc définir naturellement la température T du fluide à partir de e . On pose la relation de proportionnalité :

$$e = \frac{D}{2} r T \quad (2.5)$$

avec $r = k_B/m$ la constante du gaz, k_B est la constante de Boltzmann et D le nombre de degré de liberté de la molécule. Dans la suite, on utilisera souvent la notion de température généralisée $\theta = rT$.

En l'absence de collision entre les particules et de forces extérieures, les particules possédant la vitesse \mathbf{c} au point \mathbf{x} et au temps t se déplaceront, en un temps Δt , au point $\mathbf{x} + \mathbf{c}\Delta t$ en conservant leur vitesse \mathbf{c} . En d'autres termes, il y a conservation de la fonction $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$ le long de la caractéristique \mathbf{c} :

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (2.6)$$

Bien entendu, si le gaz est suffisamment dense, des collisions entre les particules vont se produire. Même rares, les collisions redistribuent l'énergie entre les particules, et jouent ainsi un rôle essentiel dans l'évolution du gaz vers l'équilibre thermodynamique. Cette notion de collision est introduite dans l'équation de transport (2.6) par l'intermédiaire d'un taux de variation $(\partial f / \partial t)_{\text{coll}}$, appelé opérateur de collision :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = (\frac{\partial f}{\partial t})_{\text{coll}} \quad (2.7)$$

Cette équation est la forme générale de l'équation de Boltzmann.

2.1.2 Les invariants de collision et les équations de conservation

Si l'on suppose que les collisions sont élastiques, il n'y a pas de création de masse, de quantité de mouvement ou d'énergie au cours de l'interaction entre les particules. Cette propriété de conservation peut se traduire formellement par les relations :

$$\int \Psi_k (\frac{\partial f}{\partial t})_{\text{coll}} d\mathbf{c} = 0 \quad \text{pour } 0 \leq k \leq 4 \quad (2.8)$$

avec $\Psi_0 = 1, \Psi_1 = c_1, \Psi_2 = c_2, \Psi_3 = c_3, \Psi_4 = |\mathbf{c}|^2$, qui sont appelés les invariants élémentaires de collision. En utilisant cette propriété et sans connaître la forme exacte de l'opérateur de collision, on peut écrire les équations macroscopiques de conservation en multipliant l'équation (2.7) par Ψ_k pour $k = 0, \dots, 4$ et en intégrant sur toutes les vitesses. En utilisant les relations (2.1), (2.2) et (2.3), on obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i u_j + P_{ij})}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial \left[\rho \left(\frac{1}{2} u^2 + e \right) \right]}{\partial t} + \frac{\partial \left[\rho u_i \left(\frac{1}{2} u^2 + e \right) + P_{ij} u_j + q_i \right]}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

où P_{ij} et le tenseur total des efforts et \mathbf{q} est le flux de chaleur donnés respectivement par :

$$P_{ij} = \int (c_i - u_i) (c_j - u_j) f d\mathbf{c} \quad (2.10)$$

$$q_i = \frac{1}{2} \int (c_i - u_i) |\mathbf{c} - \mathbf{u}|^2 f d\mathbf{c} \quad (2.11)$$

On remarque que les expressions de P_{ij} et de \mathbf{q} dépendent de \mathbf{c} et f . Le système (2.9) possèdent donc plus d'inconnues que d'équations : il n'est pas fermé. Historiquement, ce problème de fermeture a été résolu en déterminant expérimentalement les expressions du tenseur des efforts et du flux de chaleur en fonction de ρ , \mathbf{u} et e . Dans la théorie cinétique, le problème de fermeture peut être traité de façon théorique en utilisant les méthodes de développement systématique de Chapman-Enskog[29] ou de Hilbert[8, 55].

2.1.3 L'opérateur de collision

Les équations de conservation (2.9) ont été déterminées sans connaître l'expression de l'opérateur de collision. Cependant, le comportement physique particulier du gaz dépend bien entendu de la manière dont se produisent les collisions. Ainsi, pour calculer le tenseur des efforts et le flux de chaleur, il est nécessaire d'avoir une forme explicite de $(\partial f / \partial t)_{\text{coll}}$. Pour un gaz monoatomique où seules les collisions binaires sont considérées, l'opérateur de collision peut s'écrire sous la forme[27, 29] :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll}} = \int d\mathbf{c}_1 \int d\omega \sigma(\omega) |\mathbf{c} - \mathbf{c}_1| \{ f(\mathbf{x}, \mathbf{c}', t) f(\mathbf{x}, \mathbf{c}'_1, t) - f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) f(\mathbf{x}, \mathbf{c}_1, t) \} \quad (2.12)$$

où $d\omega$ est l'angle solide de diffraction des particules et $\sigma(\omega)$ est la section efficace différentielle de collision. Cette intégrale non linéaire décrit le taux de variation de la fonction $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$ en considérant la collision (éventuelle) entre la particule de vitesse \mathbf{c} avec toutes les autres particules de vitesse initiale \mathbf{c}_1 . Après la collision, les vitesses des particules sont respectivement \mathbf{c}' et \mathbf{c}'_1 . L'intégrale de collision (2.12) peut paraître compliquée, elle est pourtant relativement simple puisqu'elle est exprimée seulement en fonction des variables locales en temps et en espace. Cette

propriété importante provient de l'approximation fondamentale suivante : les vitesses des deux particules avant la collision sont décorréelées. C'est l'hypothèse du chaos moléculaire.

On peut vérifier par le calcul que l'expression de l'opérateur de collision (2.12) vérifie bien les conditions de conservation (2.8).

Avant de s'attaquer au problème de fermeture, on peut remarquer que l'équation de Boltzmann (2.7) permet non seulement d'écrire les lois de conservations mais elle contient aussi intrinsèquement le principe d'irréversibilité des mécanismes thermodynamiques, c'est-à-dire la notion de production d'entropie. Pour montrer cela, on considère la fonctionnelle H de Boltzmann définie par :

$$H(t) = \iint f \ln f d\mathbf{c} d\mathbf{x} \quad (2.13)$$

Une généralisation de la notion d'entropie $S(t)$ à une situation hors équilibre thermodynamique, peut être donnée par la relation :

$$S(t) = -k_B H(t) + \alpha \quad (2.14)$$

où k_B est la constante de Boltzmann, et α est également une constante. L'équation de Boltzmann (2.7) associée à l'intégrale de collision (2.12) permet de montrer[109] que :

$$\frac{dH}{dt} \leq 0 \quad (2.15)$$

Ainsi, la fonction H ne peut jamais augmenter. Cette propriété est connue sous le nom de théorème H de Boltzmann. D'après (2.14), ce théorème implique que l'entropie du système ne peut jamais décroître : $dS/dt \geq 0$. En notant de plus que l'intégrale (2.13) est bien bornée (f tend vers zéro quand \mathbf{c} tend vers l'infini car l'énergie $f|\mathbf{c}|^2 d\mathbf{c}$ doit rester finie), on voit que H décroît jusqu'à ce que f atteigne une valeur d'équilibre f^{eq} définie par $dH/dt = 0$. Après calcul[109], on voit que les solutions de cette équation sont telles que :

$$f^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{c}', t) f^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{c}_1', t) = f^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) f^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{c}_1, t) \quad (2.16)$$

et en prenant le logarithme de cette relation, on obtient :

$$\ln(f^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{c}', t)) + \ln(f^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{c}_1', t)) = \ln(f^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)) + \ln(f^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{c}_1, t)) \quad (2.17)$$

Cette relation exprime que $\ln(f^{eq})$ est une fonction invariante par collision. Or, physiquement, les seuls invariants de collision possibles sont la masse, la quantité de mouvement et l'énergie. On peut donc dire que $\ln(f^{eq})$ est une combinaison linéaire de ces trois quantités. La fonction d'équilibre est donc de la forme :

$$f^{eq} = \alpha_1 e^{-\alpha_2(\mathbf{c}-\mathbf{c}_0)^2} \quad (2.18)$$

où α_1 , α_2 et \mathbf{c}_0 sont des constantes qui dépendent de l'état thermodynamique du fluide. Ces constantes peuvent être calculées en supposant que les trois premiers moments de la fonction

d'équilibre donnent les variables macroscopiques de l'écoulement, c'est à dire que les équations (2.1), (2.2) et (2.3) sont aussi valables pour $f = f^{eq}$. On obtient finalement l'expression classique de la distribution d'équilibre de Maxwell-Boltzmann :

$$f^{eq} = \rho \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{D/2} \exp \left[\frac{-m|\mathbf{c} - \mathbf{u}|^2}{2k_B T} \right] \quad (2.19)$$

Le théorème H de Boltzmann montre donc que l'intégrale complexe de collision (2.12) a pour effet global de faire tendre la fonction de distribution $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$ vers sa valeur d'équilibre local $f^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$. A partir de cette constatation, on peut définir un opérateur de collision simplifié en supposant que la relaxation de f vers f^{eq} se fait avec un temps caractéristique λ :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll.}} = -\frac{f - f^{eq}}{\lambda} \quad (2.20)$$

Cet opérateur de collision linéarisé est appelé l'approximation de Bhatnagar-Gross-Krook[14], ou opérateur BGK. Concrètement, on peut interpréter le temps de relaxation λ comme le temps moyen entre deux collisions successives pour une particule donnée. Il est donc inversement proportionnel à la densité du fluide. On remarque que par construction, l'opérateur BGK vérifie les conditions d'invariance de collision (2.8). Le problème de fermeture des équations de conservation peut donc être traité de façon beaucoup plus simple en utilisant cet opérateur linéaire.

2.1.4 Fermeture des équations de conservation : développement de Chapman-Enskog

La détermination des expressions explicites du tenseur des efforts et du flux de chaleur est basée sur le développement de la fonction de distribution par rapport au nombre de Knudsen de l'écoulement. Le nombre de Knudsen ϵ est le rapport entre le libre parcours moyen des particules et l'échelle caractéristique de l'écoulement macroscopique notée L . Le libre parcours moyen est par définition la distance parcourue par une particule entre deux collisions, c'est-à-dire pendant le temps moyen de relaxation λ_0 . En notant $\sqrt{\theta_0}$ la vitesse caractéristique d'agitation thermique du fluide, on a :

$$\epsilon = \frac{\lambda_0 \sqrt{\theta_0}}{L} \quad (2.21)$$

En utilisant les grandeurs caractéristiques ou moyennes, on peut écrire toutes les variables sous forme adimensionnelle : $\hat{t} = t\sqrt{\theta_0}/L$, $\hat{x} = x/L$, $\hat{\lambda} = \lambda/\lambda_0$, $\hat{\theta} = \theta/\theta_0$, $\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{c}/\sqrt{\theta_0}$, $\hat{f} = f/\rho_0$. L'équation de Boltzmann BGK normalisée s'écrit donc sous la forme :

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{t}} + \hat{c}_i \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{x}_i} = -\frac{1}{\epsilon \hat{\lambda}} \left(\hat{f} - \hat{f}^{eq} \right) \quad (2.22)$$

Pour simplifier les expressions, les variables adimensionnelles seront notées sans le chapeau dans toute la suite. La méthode de Chapman-Enskog[29] (qui est très proche mathématiquement de la méthode de développement de Hilbert[8, 55]) permet d'obtenir de façon systématique les

solutions successives en terme de ϵ de l'équation (2.22). Pour cela, on développe tout d'abord la fonction de distribution :

$$f = f^{(0)} + \epsilon f^{(1)} + \epsilon^2 f^{(2)} + \dots \quad (2.23)$$

On introduit alors ce développement dans l'équation (2.22), et on identifie les termes ordre par ordre en ϵ :

$$\text{Ordre -1 :} \quad f^{(0)} = f^{eq} \quad (2.24)$$

$$\text{Ordre 0 :} \quad \frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} + c_i \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_i} = -\frac{1}{\lambda} f^{(1)} \quad (2.25)$$

$$\text{Ordre 1 :} \quad \frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + c_i \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_i} = -\frac{1}{\lambda} f^{(2)} \quad (2.26)$$

On remarque que l'on obtient ainsi une expression explicite du terme d'ordre $n+1$ du développement de f en fonction du terme d'ordre n .

Dans la méthode générale de Chapman-Enskog, on recherche les solutions dites normales de l'équation de Boltzmann, c'est-à-dire, les solutions telles que :

$$\int \Psi_k f^{(n)} d\mathbf{c} = 0 \quad \text{pour } 0 \leq k \leq 4 \quad \text{et } n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.27)$$

Si l'on utilise l'opérateur de collision BGK, on constate que ces conditions correspondent simplement à la condition de conservation des invariants (2.8), en considérant les approximations successives de f en fonction de ϵ . En particulier, l'équation (2.27) traduit le fait que la partie hors équilibre de la fonction de distribution définie par $f^{neq} = f - f^{eq}$ n'intervient pas dans l'évaluation de grandeurs macroscopiques (équations (2.1), (2.2) et (2.3)).

On peut maintenant calculer les approximations successives en ϵ des équations de conservations. Tout d'abord, en prenant les trois premiers moments ($\int \Psi_k(\cdot) d\mathbf{c}$ pour $k = 1, \dots, 4$) de l'équation (2.22) tronquée à l'ordre zéro en ϵ , et en utilisant les relations (2.24) et (2.27) pour $n = 1$, on obtient immédiatement les équations de conservation (2.9) avec :

$$P_{ij}^{(0)} = \int (c_i - u_i) (c_j - u_j) f^{eq} d\mathbf{c} = \rho \theta \delta_{ij} \quad (2.28)$$

$$q_i^{(0)} = \frac{1}{2} \int (c_i - u_i) |\mathbf{c} - \mathbf{u}|^2 f^{eq} d\mathbf{c} = 0 \quad (2.29)$$

Les différents moments de la fonction d'équilibre sont calculés dans l'annexe B. D'après la loi des gaz parfaits, on a $p = \rho \theta$. On retrouve donc exactement les équations d'Euler. Ces équations correspondent donc à la limite des équations de conservation quand on suppose ϵ infiniment petit ($\epsilon \approx 0$). Pour un nombre de Knudsen non nul, on doit prendre en compte le terme suivant dans la troncature de l'équation de Boltzmann. Ainsi, en prenant les trois premiers moments de l'équation (2.22) tronquée à l'ordre 1 et en utilisant la relation (2.27) pour $n = 1$ et $n = 2$, on obtient les équations de conservation avec :

$$P_{ij} = \int (c_i - u_i) (c_j - u_j) (f^{eq} + \epsilon f^{(1)}) d\mathbf{c} \quad (2.30)$$

$$q_i = \frac{1}{2} \int (c_i - u_i) |\mathbf{c} - \mathbf{u}|^2 (f^{eq} + \epsilon f^{(1)}) d\mathbf{c} \quad (2.31)$$

On utilise alors la relation (2.25) pour obtenir une expression du tenseur des efforts et du flux de chaleur en fonction de la distribution d'équilibre :

$$P_{ij} = \rho\theta\delta_{ij} - \tau \left(\frac{\partial}{\partial t} \int c_i c_j f^{eq} d\mathbf{c} + \frac{\partial}{\partial x_k} \int c_i c_j c_k f^{eq} d\mathbf{c} \right) \quad (2.32)$$

$$q_i = -\frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \int c_i c_l^2 f^{eq} d\mathbf{c} + \frac{\partial}{\partial x_k} \int c_i c_l^2 c_k f^{eq} d\mathbf{c} \right) + \tau u_l \left(\frac{\partial}{\partial t} \int c_i c_l f^{eq} d\mathbf{c} + \frac{\partial}{\partial x_k} \int c_i c_l c_k f^{eq} d\mathbf{c} \right) \quad (2.33)$$

où $\tau = \epsilon\lambda$. Etant donné que les moments de la fonction d'équilibre peuvent être calculés en fonction des variables macroscopiques ρ , \mathbf{u} et θ (voir annexe B), on obtient donc une expression explicite de P_{ij} et q_i . La dernière simplification consiste à exprimer les dérivées temporelles en fonction de dérivées spatiales. Pour cela, on utilise les équations de conservation du niveau de développement précédent (équations d'Euler). Au final, on trouve les expressions :

$$P_{ij} = \rho\theta\delta_{ij} - \tau_{ij} \quad \text{avec} \quad \tau_{ij} = 2\mu S_{ij} + \left(\eta - \frac{2}{3}\mu \right) S_{kk} \delta_{ij} \quad (2.34)$$

Dans l'expression du tenseur des contraintes visqueuses, μ est la viscosité dynamique :

$$\mu = \tau\rho\theta \quad (2.35)$$

et η est le second coefficient de viscosité (parfois appelé viscosité en volume). Par cette procédure, on retrouve bien que $\eta = 0$ (hypothèse de Stokes). S_{ij} est le tenseur des taux de déformation :

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Pour le flux de chaleur, on retrouve la loi de Fourier :

$$q_i = -\kappa \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \quad (2.36)$$

avec la conductivité thermique $\kappa = (D+2)\tau\rho\theta/2$. On obtient donc les équations de Navier-Stokes compressibles pour un fluide Newtonien.

Dans cette partie, la procédure permettant de retrouver les équations de Navier-Stokes à partir de l'équation de Boltzmann a été présentée de façon simplifiée. Les démonstrations mathématiques rigoureuses des différentes étapes dépassent largement le cadre de ce travail. La justification mathématique du passage de la description de Boltzmann à celle de Navier-Stokes ou Euler pose d'ailleurs toujours des difficultés considérables[50, 55, 72].

2.2 L'équation de Boltzmann à vitesses discrètes

L'une des difficultés de la théorie cinétique est la présence d'une variable indépendante \mathbf{c} dont on doit balayer la valeur dans tout \mathfrak{R}^3 . Tout comme les variables de temps et d'espace, cette variable doit être d'une part discrétisée et d'autre part bornée pour permettre une résolution numérique de l'équation de Boltzmann. Cette discrétisation et cette réduction du nombre de vitesses des particules doit se faire dans le respect de l'équivalence des descriptions microscopique / macroscopique présentée dans la partie précédente. Les premiers modèles à vitesses discrètes ont été proposés par Broadwell[22] et Gatignol[63].

2.2.1 Position du problème

On a vu dans le paragraphe 2.1 que toutes les variables macroscopiques (équations (2.1), (2.2) et (2.3)) ainsi que les flux associés à chacune de ces variables (équations (2.9), (2.10) et (2.11)) peuvent s'exprimer en fonction des moments successifs de la fonction de distribution. Ainsi, ce qui est utile en terme de mécanique des fluides, ce sont les moments de la fonction de distribution et non pas la valeur exacte de $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$ dans tout l'espace des vitesses. On peut donc chercher à construire un système de vitesses discrètes $(\mathbf{c}_\alpha, \alpha=1, \dots, N_\alpha)$ tel que les moments discrets de f soient égaux aux moments continus. Pour un écoulement représenté par les équations de Navier-Stokes en compressible, il est nécessaire d'assurer l'égalité des moments continus et discrets de f jusqu'à l'ordre 3. On a vu dans le paragraphe précédent que la fonction de distribution peut s'exprimer en fonction de la fonction d'équilibre. En particulier, la fonction de distribution permettant de décrire un écoulement de Navier-Stokes peut s'écrire sous la forme :

$$f = f^{eq} - \tau \left(\frac{\partial f^{eq}}{\partial t} + c_i \frac{\partial f^{eq}}{\partial x_i} \right) \quad (2.37)$$

Cette relation montre qu'un moment d'ordre N de f fera intervenir un moment d'ordre $N+1$ de f^{eq} . Le critère principal pour la définition d'un système de vitesses discrètes est donc d'assurer l'égalité des moments continus et discrets de la fonction d'équilibre jusqu'à l'ordre 4 :

$$\int c_1^{a_1} c_2^{a_2} c_3^{a_3} f^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) d\mathbf{c} = \sum_{\alpha=0}^{N_\alpha} c_{\alpha,1}^{a_1} c_{\alpha,2}^{a_2} c_{\alpha,3}^{a_3} f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t) \quad \text{pour } 0 \leq a_1 + a_2 + a_3 \leq 4 \quad (2.38)$$

où f_α^{eq} représente la fonction d'équilibre pour la vitesse \mathbf{c}_α .

2.2.2 Développement en polynômes d'Hermite

La fonction d'équilibre continue (2.19) peut s'écrire sous la forme :

$$f^{eq} = \rho \frac{1}{(2\pi\theta)^{D/2}} e^{-c'^2} e^{2\mathbf{c}' \cdot \mathbf{u}' - \mathbf{u}'^2} \quad (2.39)$$

avec $\theta = rT$, $\mathbf{c}' = \mathbf{c}/\sqrt{2\theta}$ et $\mathbf{u}' = \mathbf{u}/\sqrt{2\theta}$. Dans cette expression, la deuxième exponentielle est la fonction génératrice des polynômes d'Hermite (voir annexe A) :

$$e^{2\mathbf{c}' \cdot \mathbf{u}' - \mathbf{u}'^2} = \prod_{i=1}^D e^{2c'_i u'_i - u_i'^2} = \prod_{i=1}^D \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(u'_i)^n}{n!} H_n(c'_i) \right)$$

où H_n est le polynôme d'Hermite de degré n . La fonction d'équilibre peut donc s'écrire sous la forme :

$$f^{eq} = \frac{\rho}{(2\pi\theta)^{D/2}} e^{-c'^2} \prod_{i=1}^D \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(u'_i)^n}{n!} H_n(c'_i) \right) \quad (2.40)$$

L'idée de développer la fonction de distribution à l'aide des polynômes d'Hermite a été introduite par Grad[75]. Cependant, dans ses travaux, cette technique n'est pas exploitée pour la

construction de modèles à vitesses discrètes. Ce n'est que très récemment[184], que ce type de développement a été repris pour étudier les liens théoriques entre l'équation de Boltzmann continue et l'équation de Boltzmann sur Réseau. Dans ce paragraphe, une analyse théorique originale est présentée.

Grâce au développement (2.40), les moments de la fonction d'équilibre peuvent s'exprimer sous la forme :

$$\begin{aligned} \int c_1^{a_1} c_2^{a_2} c_3^{a_3} f^{eq} d\mathbf{c} &= \iiint (2\theta)^{(D+a_1+a_2+a_3)/2} (c'_1)^{a_1} (c'_2)^{a_2} (c'_3)^{a_3} f^{eq} dc'_1 dc'_2 dc'_3 \\ &= \frac{\rho (2\theta)^{(a_1+a_2+a_3)/2}}{\pi^{D/2}} \prod_{i=1}^D \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(u'_i)^n}{n!} I_n^{(a_i)} \right) \end{aligned} \quad (2.41)$$

avec :

$$I_n^{(a_i)} = \int (c'_i)^{a_i} H_n(c'_i) e^{-c_i'^2} dc'_i \quad (2.42)$$

En utilisant la relation de récurrence $xH_n(x) = H_{n+1}(x)/2 + nH_{n-1}(x)$, on peut exprimer les polynômes $(c'_i)^{a_i} H_n(c'_i)$ en fonction de polynômes d'Hermite d'ordre inférieur et supérieur :

$$I_n^{(a_i)} = \sum_{l=-a_i}^{l=a_i} A(n,l,a_i) I_{n+l}^{(0)} \quad (2.43)$$

où $A(n,l,a_i)$ sont des constantes données en annexe B pour $0 \leq a_i \leq 4$. En utilisant la propriété d'orthogonalité des polynômes d'Hermite (annexe A), il vient :

$$I_n^{(0)} = \int H_n(c'_i) e^{-c_i'^2} dc'_i = \int H_0(c'_i) H_n(c'_i) e^{-c_i'^2} dc'_i = \delta_{0n} 2^n n! \sqrt{\pi} \quad (2.44)$$

On remarque donc que dans la sommation (2.43) seuls les termes tels que $n+l=0$ pour $-a_i \leq l \leq a_i$ sont non nuls. Ainsi, pour $n > a_i$, tous les termes sont nuls et on a donc :

$$I_n^{(a_i)} = 0 \quad \text{pour tout } n > a_i \quad (2.45)$$

Ce résultat important montre que les sommes infinies de l'expression (2.41) peuvent être tronquées respectivement à l'ordre a_i et donc de façon plus générale à l'ordre $N = \max(a_1, a_2, a_3)$:

$$\int c_1^{a_1} c_2^{a_2} c_3^{a_3} f^{eq} d\mathbf{c} = \frac{\rho (2\theta)^{(a_1+a_2+a_3)/2}}{\pi^{D/2}} \prod_{i=1}^D \left(\sum_{n=0}^N \frac{(u'_i)^n}{n!} I_n^{(a_i)} \right) \quad (2.46)$$

On a donc montré que pour le calcul d'un moment d'ordre N de la fonction d'équilibre, on peut tronquer à l'ordre N le développement en polynômes d'Hermite de f^{eq} . Ce résultat est un des résultats théoriques importants de la thèse. Il sera exploité et commenté dans les paragraphes suivants.

En complément, on constate que la relation (2.46) associée aux formules (2.43) et (2.44) permet de calculer de manière relativement simple les expressions des différents moments continus de la fonction d'équilibre en fonction des variables macroscopiques (annexe B).

2.2.3 Quadrature de Gauss-Hermite

Pour établir la forme de l'équation (2.46) dans un système de vitesses discrètes, on doit remarquer que les coefficients $I_n^{(a_i)}$ donnés par (2.42) peuvent s'écrire sous la forme :

$$I_n^{(a_i)} = \sum_{k=0}^{k=n+a_i} B(k, n, a_i) \int (c'_i)^k e^{-c_i'^2} dc'_i \quad (2.47)$$

où $B(k, n, a_i)$ sont les coefficients du polynôme $(c'_i)^{a_i} H_n(c'_i)$ qui est de degré $n + a_i$. On peut alors calculer les intégrales intervenant dans l'expression (2.47) en utilisant une formule de quadrature de Gauss. Etant donné que la fonction poids est $\exp(-x^2)$, la formule de quadrature de Gauss-Hermite est la plus appropriée[88, 90] (voir annexe C) :

$$\int_{\mathfrak{R}} (c'_i)^k e^{-c_i'^2} dc'_i = \sum_{\beta=1}^H \sigma_{\beta} (\xi'_{\beta})^k \quad (2.48)$$

où ξ'_{β} sont les abscisses de la quadrature d'ordre H . Les abscisses sont associées aux poids σ_{β} . Cette quadrature est exacte pour $0 \leq k \leq (2H - 1)$. Ainsi, on a :

$$I_n^{(a_i)} = \sum_{\beta=1}^H \sigma_{\beta} \sum_{k=0}^{k=n+a_i} B(k, n, a_i) (\xi'_{\beta})^k = \sum_{\beta=1}^H \sigma_{\beta} (\xi'_{\beta})^{a_i} H_n(\xi'_{\beta})$$

L'expression générale (2.46) du moment de la fonction d'équilibre peut s'écrire sous la forme :

$$\int c_1^{a_1} c_2^{a_2} c_3^{a_3} f^{eq} d\mathbf{c} = \sum_{\beta=1}^H \sum_{\gamma=1}^H \sum_{\delta=1}^H \sigma_{\beta} \sigma_{\gamma} \sigma_{\delta} (2\theta)^{D/2} c_{\alpha,1}^{a_1} c_{\alpha,2}^{a_2} c_{\alpha,3}^{a_3} e^{c_{\alpha}^2/2\theta} f^{eq,N}(\mathbf{x}, \mathbf{c}_{\alpha}, t) \quad (2.49)$$

où $\mathbf{c}_{\alpha} = (c_{\alpha,1}, c_{\alpha,2}, c_{\alpha,3}) = \sqrt{2\theta} (\xi'_{\beta}, \xi'_{\gamma}, \xi'_{\delta})$ et $f^{eq,N}(\mathbf{x}, \mathbf{c}_{\alpha}, t)$ est la fonction d'équilibre de Maxwell-Boltzmann dont le développement en polynôme d'Hermite (équation (2.40)) est tronqué à l'ordre N . Ainsi, en posant :

$$f_{\alpha}^{eq}(\mathbf{x}, t) = W_{\alpha} f^{eq,N}(\mathbf{x}, \mathbf{c}_{\alpha}, t) \quad \text{avec } W_{\alpha} = \sigma_{\beta} \sigma_{\gamma} \sigma_{\delta} (2\theta)^{D/2} e^{c_{\alpha}^2/2\theta}$$

on obtient la relation voulue (2.38), avec $N_{\alpha} = H^D$.

2.2.4 Commentaires sur l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes

La démarche présentée ci-dessus montre que pour calculer les moments continus de la fonction f , il suffit de connaître la valeur de f seulement pour un nombre restreint de vitesses \mathbf{c}_{α} . Cependant, pour calculer $f_{\alpha}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, \mathbf{c}_{\alpha}, t)$ à partir de l'équation de Boltzmann (2.22), on doit remplacer la fonction d'équilibre par son expression tronquée et pondérée f_{α}^{eq} :

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + c_{\alpha,i} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_i} = -\frac{1}{\tau} (f_{\alpha} - f_{\alpha}^{eq}) \quad (2.50)$$

Cette équation est une équation de Boltzmann à vitesses discrètes (ou DVBE pour Discrete Velocity Boltzmann Equation). Les variables macroscopiques définies dans le domaine continu par les relations (2.1), (2.2) et (2.3) sont calculées dans le domaine des vitesses discrètes par :

$$\rho = \sum_{\alpha} f_{\alpha} = \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{eq} \quad (2.51)$$

$$\rho \mathbf{u} = \sum_{\alpha} \mathbf{c}_{\alpha} f_{\alpha} = \sum_{\alpha} \mathbf{c}_{\alpha} f_{\alpha}^{eq} \quad (2.52)$$

$$\frac{D}{2} \rho \theta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} |\mathbf{c}_{\alpha} - \mathbf{u}|^2 f_{\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} |\mathbf{c}_{\alpha} - \mathbf{u}|^2 f_{\alpha}^{eq} \quad (2.53)$$

Pour retrouver les équations de Navier-Stokes compressibles, les moments de la fonction d'équilibre doivent être calculés jusqu'à l'ordre 4. On doit donc prendre $N = 4$ et la quadrature (2.48) doit être exacte jusqu'à $k = 8$. On doit donc choisir la quadrature de Gauss-Hermite d'ordre $H = 5$. Pour $D = 3$, on obtient donc un système de 125 vitesses discrètes ! Outre le grand nombre de vitesses, le principal problème de ce système est que les vitesses discrètes dépendent de la température du fluide. Or, pour le calcul des moments de f en fonction des moments de f^{eq} (moments de l'équation (2.37)), on utilise le fait que la variable \mathbf{c} est une variable indépendante. Cette caractéristique est aussi nécessaire pour l'obtention des équations de conservation (2.9). Ainsi, la détermination des vitesses discrètes à partir du calcul des quadratures de Gauss-Hermite ne permet de construire que des modèles isothermes. Nous verrons dans le paragraphe 2.4 comment sont construits les modèles thermiques à partir d'un système de vitesses ne dépendant pas de la température. Avec l'hypothèse $\theta = Cte$, l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes (2.50) permet de calculer les fonctions de distributions $f_{\alpha}(\mathbf{x}, t)$ dont les moments discrets sont égaux aux moments continus :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \mathbf{c}_{\alpha}^n f_{\alpha}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{\alpha} \mathbf{c}_{\alpha}^n f_{\alpha}^{eq}(\mathbf{x}, t) - \tau \left(\frac{\partial}{\partial t} \sum_{\alpha} \mathbf{c}_{\alpha}^n f_{\alpha}^{eq}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{\alpha} c_{\alpha,i} \mathbf{c}_{\alpha}^n f_{\alpha}^{eq}(\mathbf{x}, t) \right) \\ &= \int \mathbf{c}^n f^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{c}_{\alpha}, t) - \tau \left(\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{c}^n f^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{c}_{\alpha}, t) + \frac{\partial}{\partial x_i} \int c_i \mathbf{c}^n f^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{c}_{\alpha}, t) \right) \\ &= \int \mathbf{c}^n f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) \end{aligned}$$

Dans l'équation ci-dessus, on voit que le passage de sommation discrète à l'intégrale continue se fait grâce à la pondération de la fonction d'équilibre tronquée par les poids de la quadrature de Gauss-Hermite. Ainsi, la pondération de la fonction d'équilibre est liée au calcul des moments de f . Cette remarque nous incite à définir une autre équation de Boltzmann à vitesses discrètes où la fonction d'équilibre est simplement le développement de la distribution de Maxwell-Boltzmann tronquée à l'ordre N :

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + c_{\alpha,i} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_i} = -\frac{1}{\tau} \left(f_{\alpha} - f^{eq,N}(\mathbf{x}, \mathbf{c}_{\alpha}, t) \right) \quad (2.54)$$

Les différents moments sont alors calculés en pondérant la fonction f :

$$\sum_{\alpha} \mathbf{c}_{\alpha}^n W_{\alpha} f_{\alpha}(\mathbf{x}, t) = \int \mathbf{c}^n f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) \quad (2.55)$$

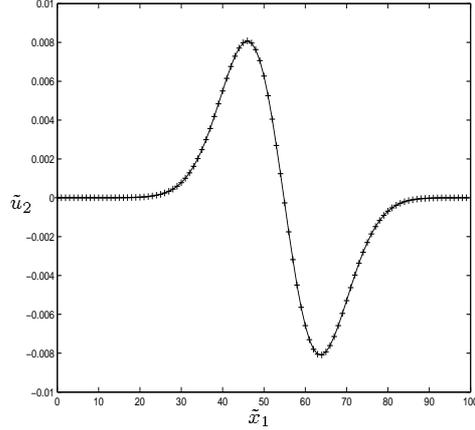


FIG. 2.1 – Profil de vitesse \tilde{u}_2 pour un tourbillon convecté dans un écoulement à $M = 0.1$. ——— équation (2.50); + équation (2.54).

On peut vérifier numériquement que les deux équations (2.50) et (2.54) donnent exactement la même solution. La figure 2.1 présente un exemple de simulation basée sur le modèle isotherme à neuf vitesses présenté dans le paragraphe suivant. Les deux équations sont résolues à l'aide du schéma de différences finies centré d'ordre 4 associé à une intégration temporelle de Runge-Kutta d'ordre 4. Le détail de ce type de calcul sera donné dans le paragraphe 3.1.2.

Ainsi, les équations (2.50) ou (2.54) représentent l'évolution de la fonction de distribution f_α vers une distribution d'équilibre avec le temps de relaxation caractéristique τ . La méthode de séparation des échelles de Chapman-Enskog permet de montrer que, par construction, l'écoulement modélisé par cette équation est un écoulement régi par les équations de Navier-Stokes. Cependant, on ne peut pas dire que l'équation à vitesses discrètes obtenue soit exactement équivalente à l'équation de Boltzmann continue (2.22). En particulier, la procédure utilisée pour la définition de la fonction f_α^{eq} , n'assure pas que cette fonction est la fonction qui représente l'équilibre thermodynamique du système. En effet, dans le cadre de la théorie cinétique, la fonction d'équilibre est définie comme étant la fonction de distribution pour laquelle on a le maximum d'entropie (fonction solution de $dH/dt = 0$). Que cela soit avec l'opérateur intégral de collision[8, 55] ou avec l'opérateur BGK[27, 108], on constate, a posteriori, que l'on peut remonter aux équations de Navier-Stokes. La construction de l'équation à vitesses discrètes (2.50) est donc basée sur une procédure inverse : le lien avec les équations de Navier-Stokes étant assuré par construction, on doit définir, a posteriori, un théorème H discret et montrer que la fonction d'équilibre est bien la fonction qui minimise la fonction H du système. En fait, il a été montré[200, 218] que l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes munie d'une fonction d'équilibre tronquée ne possède pas de théorème H global. C'est la forme polynomiale de f_α^{eq} qui empêche l'existence d'un théorème H . Il semble[200] que ce défaut de l'équation discrète par rapport à la théorie continue soit la cause des principaux problèmes de stabilité numérique de la méthode Boltzmann sur Réseau (voir 3.3), notamment pour les modèles thermiques. Récemment, des modèles permettant de prendre en compte le principe de maximisation de l'entropie ont été proposés[6, 20, 115].

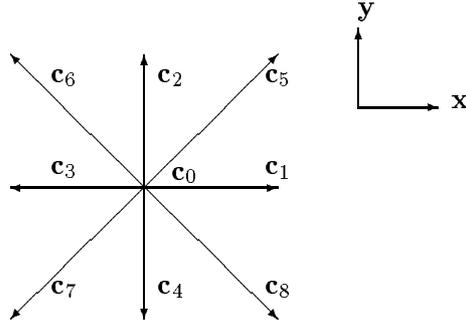


FIG. 2.2 – Vitesses discrètes du modèle bidimensionnel à neuf vitesses ($D2Q9$).

α	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\tilde{\mathbf{c}}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{3\theta}} \mathbf{c}_\alpha$	(0,0)	(1,0)	(0,1)	(-1,0)	(0,-1)	(1,1)	(-1,1)	(-1,-1)	(1,-1)
$\omega_\alpha = \frac{1}{2\pi\theta} W_\alpha e^{-c_\alpha^2/2\theta}$	4/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/36	1/36	1/36	1/36

TAB. 2.1 – Vitesses et pondérations associés pour le modèle à neuf vitesses ($D2Q9$).

2.2.5 L'exemple du modèle bidimensionnel à neuf vitesses

Pour un écoulement isotherme, il n'est pas nécessaire de calculer les moments correspondant à l'équation de conservation de l'énergie. La fonction d'équilibre peut donc être tronquée à l'ordre $N = 3$ et la quadrature doit être exacte jusqu'à $k = 6$ ce qui implique $H = 4$. Ce modèle possède 64 vitesses en $3D$ et 16 vitesses en $2D$ et permet donc de modéliser les équations de Navier-Stokes compressibles isothermes. Cependant, dans la méthode de Chapman-Enskog, l'équation (2.32) montre que le calcul du tenseur de viscosité fait intervenir la dérivée temporelle de la température. Dans l'approche classique, cette dérivée temporelle est exprimée en fonction de dérivées spatiales en utilisant l'équation de conservation de l'énergie au niveau Euler. Avec l'hypothèse d'écoulement isotherme, on a simplement $\partial\theta/\partial t = 0$. Cette simplification a pour conséquence[46] de modifier la tenseur des contraintes visqueuses :

$$\tau_{ij} = 2\mu S_{ij}$$

Autrement dit, avec l'hypothèse d'écoulement isotherme, le fluide modélisé possède un second coefficient de viscosité non nul : $\eta = 2\mu/3$.

En pratique le système de vitesses basé sur la quadrature d'ordre 4 n'est pas utilisé pour modéliser les équations de Navier-Stokes isothermes. En fait, on peut définir un modèle dégradé basé sur la quadrature d'ordre $H = 3$. Les abscisses et les poids sont donnés dans l'annexe C. On obtient un modèle à 27 vitesses $3D$ (noté $D3Q27$) et à 9 vitesses en $2D$ (noté $D2Q9$, voir figure 2.2). Les vecteurs \mathbf{c}_α et les pondérations associées W_α du modèle bidimensionnel sont indiqués dans le tableau 2.1.

Historiquement, ce modèle n'a pas été construit en utilisant les quadratures de Gauss : comme l'ensemble des modèles de Boltzmann sur Réseau, il a été défini initialement[34, 162] à l'aide d'une procédure dérivée de celle utilisée pour la méthode des Gaz sur Réseau[62]. Les grandes lignes de cette approche sont données dans le paragraphe 2.4. Une description détaillée comprenant toutes les étapes de calcul pour le modèle à neuf vitesses est disponible dans l'article de Hou *et al.*[99]. La principale caractéristique de cette méthode traditionnelle est qu'elle n'est pas basée sur une discrétisation en vitesse de l'équation de Boltzmann continue ! Comme on le verra également dans la suite, le lien explicite entre le modèle de Boltzmann continu et le modèle à vitesses discrètes obtenu grâce à la méthode présentée ci-dessus permet une meilleure compréhension des différents aspects de la LBM et implique de nouveaux développements. Par exemple, on a déjà compris pourquoi le second coefficient de viscosité η n'est pas nul dans les modèles Boltzmann sur Réseau isothermes[46]. De plus, le calcul[99] complet du tenseur des contraintes visqueuses pour le modèle à neuf vitesses donne :

$$\tau_{ij} = 2\mu S_{ij} - \tau \frac{\partial \rho u_i u_j u_k}{\partial x_k} \quad (2.56)$$

La présence du terme cubique supplémentaire dans cette expression peut s'interpréter en remarquant que la quadrature d'ordre 3 n'est exacte que pour des polynômes de degré inférieur ou égal à 5. On doit donc se limiter à un développement de la fonction d'équilibre[34, 99, 162] à l'ordre 2 :

$$f_\alpha^{eq} = \frac{\rho}{2\pi\theta} W_\alpha e^{-c_\alpha^2/2\theta} \left(1 + \frac{\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u}}{\theta} + \frac{(\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u})^2}{2\theta^2} - \frac{\mathbf{u}^2}{2\theta} \right) \quad (2.57)$$

Evidemment, d'après l'analyse théorique présentée précédemment, cette simplification implique la disparition du terme cubique dans l'expression du moment d'ordre 3 de la fonction d'équilibre (équation (4.14)). Pour un écoulement isotherme, le moment d'ordre 3 intervient uniquement dans le calcul du tenseur des contraintes visqueuses (équation (2.32)) : le terme en $u_i u_j u_k$ élimine le terme cubique qui résulte de l'expression des dérivées temporelles en fonction des dérivées spatiales[46]. Cette élimination n'est donc pas possible avec ce modèle dégradé à neuf vitesses. Ainsi, outre le fait l'écoulement est supposé isotherme, l'erreur en $O(M^3)$ présente dans le tenseur des contraintes visqueuses limite l'application de ce modèle à des écoulements à faible nombre de Mach.

2.3 L'équation de Boltzmann sur Réseau

La dernière étape pour l'établissement d'une méthode numérique de résolution de l'équation de Boltzmann est d'obtenir une forme discrète en espace et en temps de l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes.

2.3.1 Intégration de l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes

Pour résoudre numériquement l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes, l'équation (2.50) doit être discrétisée en espace et en temps. Bien entendu, les schémas numériques classiques de différences finies[167, 197] ou volumes finis[4, 221] peuvent être utilisés. Cependant, on remarque que

l'équation (2.50) est une équation de transport du premier ordre simple dont la vitesse de convection est connue et constante. Ainsi, on peut intégrer[46] cette équation le long de la caractéristique \mathbf{c}_α pour un intervalle de temps Δt :

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau} \int_0^{\Delta t} (f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha s, t + s) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha s, t + s)) ds$$

L'intégrale peut être évaluée en utilisant la méthode des trapèzes :

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(\mathbf{x}, t) = -\frac{\Delta t}{2\tau} \{f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) + f_\alpha(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)\} + O(\Delta t^3) \quad (2.58)$$

La méthode des trapèzes à une précision d'ordre 3. La solution obtenue est implicite puisque la valeur de f_α au temps $t + \Delta t$ dépend de la valeur de fonction d'équilibre à ce même pas de temps.

2.3.2 La fonction de distribution équivalente

Pour obtenir une solution explicite, on définit le changement de variable :

$$g_\alpha(\mathbf{x}, t) = f_\alpha(\mathbf{x}, t) + \frac{\Delta t}{2\tau} (f_\alpha(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)) \quad (2.59)$$

Soit encore :

$$f_\alpha(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{1 + \Delta t/2\tau} \left(g_\alpha(\mathbf{x}, t) + \frac{\Delta t}{2\tau} f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t) \right) \quad (2.60)$$

En remplaçant f_α dans l'équation (2.58) par son expression (2.60), on obtient l'équation de Boltzmann sur Réseau (ou LBE pour Lattice Boltzmann Equation) :

$$g_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) = \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau_g} \right) g_\alpha(\mathbf{x}, t) + \frac{\Delta t}{\tau_g} g_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t) \quad (2.61)$$

avec $g_\alpha^{eq} = f_\alpha^{eq}$ et $\tau_g = \tau + \Delta t/2$. En remarquant que $g_\alpha = f_\alpha - \Delta t(\partial f/\partial t)_{\text{coll}}/2$, on voit que les trois premiers moments de g_α permettent de calculer les variables macroscopiques de l'écoulement. La fonction d'équilibre peut donc être calculée au temps $t + \Delta t$. Eventuellement, la fonction f_α peut être évaluée par la relation (2.60). En fait, d'un point de vue pratique, il n'est pas nécessaire de calculer f_α puisque les variables macroscopiques sont connues par le calcul des moments de g_α . Ainsi, même si l'équation (2.61) est appelée équation de Boltzmann sur Réseau, la fonction de distribution calculée n'est pas la fonction de distribution de l'équation de Boltzmann (2.50). La solution g_α calculée est une fonction de distribution *équivalente* à f_α en terme d'écoulement : la résolution de l'équation (2.61) munie du temps de relaxation τ_g permet de calculer l'écoulement dont les fonctions de distribution f_α sont solutions de l'équation (2.50) munie du temps de relaxation τ . En particulier, d'après (2.35) la viscosité cinématique du fluide modélisé par l'équation de Boltzmann sur Réseau est :

$$\nu = \theta \left(\tau_g - \frac{\Delta t}{2} \right) \quad (2.62)$$

Contrairement à l'idée généralement admise[35, 197], l'équation de Boltzmann sur Réseau n'est pas une forme discrétisée du premier ordre en espace (schéma décentré amont) et en temps (schéma d'Euler amont) de l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes mais bien une solution équivalente explicite précise au troisième ordre en temps qui peut être calculée de façon itérative. Cette propriété que l'on vérifiera numériquement dans la suite (paragraphe 3.1.2) termine la présentation du lien entre l'équation de Boltzmann continue munie de l'opérateur de collision BGK et l'équation de Boltzmann sur Réseau. Cependant, historiquement, les différents modèles de Boltzmann sur Réseau n'ont pas été construits à partir de cette approche : la LBM est initialement une extension de la méthode de Gaz sur Réseau.

2.4 Méthode traditionnelle de construction des modèles Boltzmann sur Réseau

2.4.1 La méthode des Gaz sur Réseau et son extension

La méthode des Gaz sur Réseau (ou LGA pour Lattice Gas Automata) est basée sur une représentation simplifiée et fictive de la dynamique moléculaire dans laquelle, l'espace, le temps et la vitesse des molécules sont discrets. Le gaz est représenté par un système de variables Booléennes $n_\alpha(\mathbf{x}, t)$ qui représente l'état d'occupation de la vitesse discrète \mathbf{c}_α au point \mathbf{x} et au temps t . L'équation de la méthode des Gaz sur Réseau est :

$$n_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) = n_\alpha(\mathbf{x}, t) + \Omega_\alpha(n_\alpha(\mathbf{x}, t)) \quad (2.63)$$

où Ω_α est la matrice de collision qui décrit l'état d'occupation de la vitesse \mathbf{c}_α après collision en fonction de tous les états d'occupation avant collision au point \mathbf{x} et au temps t . L'équation (2.63) peut s'interpréter comme un processus en deux étapes : une collision (membre de droite de l'équation) qui définit la nouvelle valeur de n_α et une propagation (membre de gauche) qui déplace la particule jusqu'au nœud suivant. Les premiers modèles bidimensionnels de Gaz sur Réseau ont été développés par Frisch, Hasslacher et Pomeau[62] (modèle à six vitesses FHP) et Wolfram[220]. L'extension tridimensionnelle de ce type de modèle a été proposée par d'Humières *et al.*[51]. D'une manière générale, les modèles de vitesse et les opérateurs de collision sont construits à partir d'un certain nombre de contraintes (symétrie du réseau de vitesse, conservation des invariants de collision...) qui sont définies de telle sorte que les équations de Navier-Stokes soient retrouvées par la méthode de développement de Chapman-Enskog. Par exemple, pour retrouver la bonne forme du flux de quantité de mouvement, le tenseur d'ordre quatre des vitesses $T_{ijkl} = \sum c_{\alpha,i} c_{\alpha,j} c_{\alpha,k} c_{\alpha,l}$ doit être isotrope[51, 62, 220]. Cette condition restreint énormément le choix du réseau de vitesse. Par exemple, le premier modèle 3D proposé d'Humières *et al.*[51] étant basé sur un seul niveau de vitesse (c'est-à-dire $|\mathbf{c}_\alpha| = 1$ pour tout α), les vecteurs vitesses doivent être définis en dimension 4 ($D = 4$) pour assurer l'isotropie de T_{ijkl} .

Malheureusement, les modèles de Gaz sur Réseau souffrent de plusieurs défauts. Sur le plan théorique, les équations de Navier-Stokes ne sont pas exactement retrouvées : l'équation de conservation de la quantité de mouvement ne possède pas la propriété d'invariance Galiléenne (présence

d'un facteur multiplicatif dans le terme non-linéaire). De plus, l'équation d'état du fluide montre que la pression dépend de la vitesse de l'écoulement, ce qui n'est évidemment pas physique. Sur le plan numérique, la nature Booléenne des opérations génère un bruit statistique important : il est donc nécessaire de moyenner en temps ou en espace les solutions. C'est donc pour éliminer ces différents problèmes que la méthode Boltzmann sur Réseau a été introduite.

La première transformation essentielle[141] de la méthode de Gaz sur Réseau est de considérer une population moyenne $g_\alpha = \langle n_\alpha \rangle$, où $\langle \cdot \rangle$ est une moyenne d'ensemble, au lieu de la variable Booléenne n_α . Higuera & Jiménez[94] proposent ensuite d'utiliser une matrice de collision linéarisée en supposant que la fonction de distribution g_α est proche de sa valeur d'équilibre g_α^{eq} :

$$\Omega_\alpha(g_\alpha) = \sum_\beta M_{\alpha\beta} (g_\beta - g_\beta^{eq}) \quad \text{avec} \quad M_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Omega_\alpha}{\partial g_\beta} (g_\beta^{eq}) \quad (2.64)$$

Il apparaît alors que les coefficients de transport hydrodynamiques (viscosités, diffusivité thermique) sont liés aux valeurs propres de cette matrice linéaire de collision. Ainsi, en supposant[34, 162] que tous les phénomènes de transport se produisent avec le même temps caractéristique $\tilde{\tau}_g$, la matrice peut s'écrire sous la forme :

$$M_{\alpha\beta} = -\frac{1}{\tilde{\tau}_g} \delta_{\alpha\beta} \quad \text{avec} \quad \tilde{\tau}_g = \frac{\tau_g}{\Delta t}$$

Ainsi, on retrouve exactement l'équation de Boltzmann sur Réseau munie de l'opérateur de collision BGK (équation (2.61)). Au passage, on remarque que l'emploi de l'opérateur BGK avec un seul temps de relaxation conduit, par construction, à un fluide dont le nombre de Prandtl est égal à 1[37]. Pour contrôler indépendamment la valeur de la viscosité et de la diffusivité thermique, on doit introduire un second temps caractéristique $\tilde{\tau}'_g$ dans la matrice de collision. Par exemple, dans le logiciel PowerFLOW, l'opérateur de collision suivant est utilisé[33, 225] :

$$\Omega_{\alpha p}(\mathbf{x}, t) = \sum_{q=1}^{N_\epsilon} \sum_{\beta=1}^{d_q} M_{\alpha p, \beta q} [g_{\beta q}(\mathbf{x}, t) - g_{\beta q}^{eq}(\mathbf{x}, t)] \quad (2.65)$$

avec la matrice :

$$M_{\alpha p, \beta q} = -\frac{1}{\tilde{\tau}_g} \delta_{\alpha p, \beta q} - \frac{1}{\tilde{\tau}'_g} \frac{\mathbf{c}_{\alpha p} \cdot \mathbf{c}_{\beta p}}{d_p \epsilon_p} \delta_{pq} \quad (2.66)$$

Dans ces relations, les vitesses discrètes $\mathbf{c}_{\alpha p}$ sont notées avec deux indices α et p . L'indice α correspond à une des d_p directions dans le niveau d'énergie $p = 1, \dots, N_\epsilon$. Les N_ϵ niveaux d'énergie sont définis par $\epsilon_p = \mathbf{c}_{\alpha p}^2/2$. Ainsi, dans un même niveau d'énergie, les vitesses ont la même amplitude : $|\mathbf{c}_{\alpha p}| = |\mathbf{c}_{\beta p}|$. Le système de vitesses complet ainsi que les valeurs des coefficients de transport sont données dans le paragraphe 2.4.4.

2.4.2 Le développement de Chapman-Enskog

La forme générale de l'équation de Boltzmann sur Réseau BGK étant établie, il faut maintenant définir le système de vitesses discrètes et l'expression exacte de la fonction d'équilibre. Ce problème se résume ainsi : *trouver $\mathbf{c}_{\alpha p}$ et $g_{\alpha p}^{eq}$ de telle sorte que les équations de Navier-Stokes soient exactement retrouvées par la méthode de développement de Chapman-Enskog*. Pour appliquer la méthode de Chapman-Enskog, on doit tout d'abord définir le nombre de Knudsen de l'écoulement représenté par l'équation de Boltzmann sur Réseau (2.61). En écrivant l'équation (2.61) sous la forme :

$$g_{\alpha p}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_{\alpha p}\Delta t, t + \Delta t) - g_{\alpha p}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\Delta t}{\tau_g} \left(g_{\alpha p}(\mathbf{x}, t) - g_{\alpha p}^{eq}(\mathbf{x}, t) \right) \quad , \quad (2.67)$$

on remarque que l'équation de Boltzmann sur Réseau représente le mouvement des particules suivant la direction $\mathbf{c}_{\alpha p}$ (membre de gauche de l'équation) modifié par un opérateur de relaxation dont le temps caractéristique est τ_g . Cette équation est donc une équation de transport similaire à l'équation de Boltzmann pour un gaz de particule supposé évoluer dans un domaine physique discret. Par construction, le libre parcours moyen des particules de ce gaz est $\Delta x = c\Delta t$ (avec $c = |\mathbf{c}_{\alpha p}|$) et le temps caractéristique entre deux collisions est Δt . Ainsi, comme dans l'approche continue (paragraphe 2.1.4), on peut définir un nombre de Knudsen caractéristique de l'écoulement associé à ce gaz :

$$\epsilon = \frac{\Delta x}{L} = \frac{c\Delta t}{L} \quad (2.68)$$

En réalisant un développement de Taylor à l'ordre 2 par rapport au temps du membre de gauche de l'équation (2.67), il vient :

$$\Delta t \left[\frac{\partial}{\partial t} + c_{\alpha p, i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right] g_{\alpha p} + \frac{\Delta t^2}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} + c_{\alpha p, i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right]^2 g_{\alpha p} + O(\Delta t^3) = -\frac{\Delta t}{\tau_g} \left(g_{\alpha p} - g_{\alpha p}^{eq} \right) \quad (2.69)$$

De la même façon que dans l'approche continue (paragraphe 2.1.4), on écrit les variables sous forme adimensionnelle: $\hat{t} = t/L$, $\hat{x} = x/L$, $\hat{\tau}_g = \tau_g/\Delta t = \bar{\tau}_g$, $\hat{\theta} = \theta/\theta_0$, $\hat{\mathbf{c}}_{\alpha p} = \mathbf{c}_{\alpha p}/c$, $\hat{g}_{\alpha} = g_{\alpha}/\rho_0$. L'équation précédente peut donc s'écrire sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\left[\frac{\partial}{\partial \hat{t}} + \hat{c}_{\alpha p, i} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_i} \right] \hat{g}_{\alpha p} + \frac{\epsilon}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \hat{t}} + \hat{c}_{\alpha p, i} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_i} \right]^2 \hat{g}_{\alpha p} + O(\epsilon^2) = -\frac{1}{\epsilon \bar{\tau}_g} \left(\hat{g}_{\alpha p} - \hat{g}_{\alpha p}^{eq} \right) \quad (2.70)$$

On développe alors la fonction de distribution par rapport à ϵ :

$$\hat{g}_{\alpha p} = \hat{g}_{\alpha p}^{(0)} + \epsilon \hat{g}_{\alpha p}^{(1)} + \epsilon^2 \hat{g}_{\alpha p}^{(2)} + \dots$$

Comme dans le cas continu, on peut alors identifier ordre par ordre en ϵ les différents termes de l'équation (2.70) :

$$\text{Ordre -1 :} \quad \hat{g}_{\alpha p}^{(0)} = \hat{g}_{\alpha p}^{eq} \quad (2.71)$$

$$\text{Ordre 0 :} \quad \left[\frac{\partial}{\partial \hat{t}} + \hat{c}_{\alpha p, i} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_i} \right] \hat{g}_{\alpha p}^{(0)} = -\frac{1}{\bar{\tau}_g} \hat{g}_{\alpha p}^{(1)} \quad (2.72)$$

$$\text{Ordre 1 :} \quad \left[\frac{\partial}{\partial \hat{t}} + \hat{c}_{\alpha p, i} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_i} \right] \hat{g}_{\alpha p}^{(1)} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \hat{t}} + \hat{c}_{\alpha p, i} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_i} \right]^2 \hat{g}_{\alpha p}^{(0)} = -\frac{1}{\bar{\tau}_g} \hat{g}_{\alpha p}^{(2)} \quad (2.73)$$

En utilisant la relation à l'ordre 0, l'équation (2.73) peut s'écrire sous la forme :

$$\left(1 - \frac{1}{2\hat{\tau}_g}\right) \left[\frac{\partial}{\partial \hat{t}} + \hat{c}_{\alpha p, i} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_i} \right] \hat{g}_{\alpha p}^{(1)} = -\frac{1}{\hat{\tau}_g} \hat{g}_{\alpha p}^{(2)}$$

On suppose alors que l'on recherche les solutions normales (voir équation (2.27)) telles que :

$$\sum_{\alpha, p} \hat{\Psi}_{\alpha p, k} \hat{g}_{\alpha p}^{(n)} = 0 \quad \text{pour } 0 \leq k \leq 4 \quad \text{et } n = 1, 2, \dots$$

avec $\hat{\Psi}_{\alpha p, 0} = 1$, $\hat{\Psi}_{\alpha p, 1} = \hat{c}_{\alpha p, 1}$, $\hat{\Psi}_{\alpha p, 2} = \hat{c}_{\alpha p, 2}$, $\hat{\Psi}_{\alpha p, 3} = \hat{c}_{\alpha p, 3}$ et $\hat{\Psi}_{\alpha p, 4} = |\hat{\mathbf{c}}_{\alpha p}|^2$. En multipliant l'équation (2.70) tronquée à l'ordre 0 en ϵ par $\hat{\Psi}_{\alpha p, k}$ et en sommant sur toutes les vitesses, il vient :

$$\sum_{\alpha, p} \left[\frac{\partial}{\partial \hat{t}} + \hat{c}_{\alpha p, i} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_i} \right] \hat{\Psi}_{\alpha p, k} \hat{g}_{\alpha p}^{eq} + O(\epsilon) = 0 \quad (2.74)$$

et de même en tronquant (2.70) à l'ordre 1 :

$$\sum_{\alpha, p} \left[\frac{\partial}{\partial \hat{t}} + \hat{c}_{\alpha p, i} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_i} \right] \left(\hat{\Psi}_{\alpha p, k} \hat{g}_{\alpha p}^{eq} + \epsilon \left(1 - \frac{1}{2\hat{\tau}_g} \right) \hat{\Psi}_{\alpha p, k} \hat{g}_{\alpha p}^{(1)} \right) + O(\epsilon^2) = 0 \quad (2.75)$$

De façon évidente, on voit que s'il on arrive à construire un système de vitesses $\hat{\mathbf{c}}_{\alpha p}$ associé à une fonction d'équilibre $\hat{g}_{\alpha p}^{eq}$ tel que les moments discrets de $\hat{g}_{\alpha p}^{eq}$ soient égaux, jusqu'à l'ordre 4, aux moments continus de la distribution de Maxwell-Boltzmann donnés dans l'annexe B, les équations d'Euler (équation (2.74)) et les équations de Navier-Stokes (équation (2.75)) seront retrouvées exactement, avec $\mu = \rho\theta(\tau_g - \Delta t/2)$. On remarque que la problématique se rapproche de celle rencontrée dans la méthode de construction de l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes à partir de l'équation de Boltzmann continue (paragraphe 2.2) avec la différence fondamentale suivante : le choix des vitesses $\hat{\mathbf{c}}_{\alpha p}$ et de la fonction d'équilibre $\hat{g}_{\alpha p}^{eq}$ est, a priori, complètement libre. C'est à dire que $\hat{g}_{\alpha p}^{eq}$ n'est pas nécessairement construit à partir de la distribution d'équilibre de Maxwell-Boltzmann et les vitesses discrètes peuvent être choisies indépendantes de la température du fluide.

2.4.3 La procédure d'identification

La méthode de construction d'un modèle Boltzmann sur Réseau peut être décrite en trois étapes.

Tout d'abord, un système de vitesses discrètes est choisi. Le système peut faire intervenir plusieurs niveaux d'énergie discrets $\hat{\epsilon}_p$ mais ces niveaux sont constants : ils ne dépendent pas de la température. Le modèle de vitesse est généralement issu des modèles de Gaz sur Réseau étant donné qu'il doit respecter le même type de contraintes (symétrie, isotropie du tenseur d'ordre 4[160] et éventuellement d'ordre 6 pour le flux d'énergie[36, 214]).

La deuxième étape consiste à choisir une forme générale de la fonction d'équilibre : son expression est un polynôme en $\hat{\mathbf{c}}_{\alpha p}$ et $\hat{\mathbf{u}}$ dont les coefficients sont a priori inconnus. Le degré du

polynôme est déterminé en fonction des équations de conservation que l'on désire modéliser. Généralement, l'argument intuitif suivant est utilisé[3, 33, 34, 162] : "Etant donné que les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement (et de l'énergie) font intervenir des termes non-linéaires jusqu'à l'ordre 2 (respectivement 3), on peut tronquer le développement polynomial de la fonction d'équilibre à l'ordre 2 (respectivement 3)". La fonction d'équilibre est donc définie par une expression générale de la forme :

$$\begin{aligned} \hat{g}_{\alpha p}^{eq} = & A_p \left(\hat{\rho}, \hat{\theta} \right) + B_p \left(\hat{\rho}, \hat{\theta} \right) \hat{\mathbf{c}}_{\alpha p} \cdot \hat{\mathbf{u}} + C_p \left(\hat{\rho}, \hat{\theta} \right) \left(\hat{\mathbf{c}}_{\alpha p} \cdot \hat{\mathbf{u}} \right)^2 + D_p \left(\hat{\rho}, \hat{\theta} \right) |\hat{\mathbf{u}}|^2 \\ & + E_p \left(\rho, \theta \right) \left(\mathbf{c}_{\alpha p} \cdot \mathbf{u} \right)^3 + F_p \left(\hat{\rho}, \hat{\theta} \right) \left(\hat{\mathbf{c}}_{\alpha p} \cdot \hat{\mathbf{u}} \right) |\hat{\mathbf{u}}|^2 \end{aligned}$$

Dans le cas d'un modèle isotherme, les deux derniers termes d'ordre 3 ne seront pas considérés et les coefficients A_p , B_p , C_p , D_p ne dépendront pas de la température. Dans le paragraphe 2.2, il a été montré que l'argument de troncature utilisé dans cette approche est faux. La troncature de la fonction d'équilibre à un degré de moins que le degré théoriquement nécessaire induit des termes non physiques dans l'expression du tenseur des efforts visqueux et du flux de chaleur. Il est intéressant de noter que même les premières analyses des méthodes Boltzmann sur Réseau basées sur les quadratures de Gauss-Hermite[88, 90] et sur les polynômes d'Hermite[184] font appels à cet argument de troncature intuitif. A l'inverse, la solution permettant d'éliminer les termes non physiques a été trouvée avant que le formalisme des polynômes d'Hermite ne soit exploité : cette solution consiste, évidemment, à construire un modèle muni d'une fonction d'équilibre tronquée à l'ordre 3 pour un calcul isotherme[164] et à l'ordre 4 pour un calcul thermique[36]. Cependant, l'utilisation d'une fonction d'équilibre tronquée à un ordre supérieur nécessite le calcul d'un tenseur des vitesses $T_{ijklm\dots}$ d'un ordre également supérieur, ce qui implique, comme dans le cas des quadratures de Gauss-Hermite (§2.2.3), d'utiliser un modèle de vitesse plus complexe[36, 164].

Enfin, la troisième étape consiste à identifier les paramètres A_p , B_p , C_p, \dots . Pour cela, on utilise tout d'abord les relations (2.51), (2.52) et (2.53) qui vont donner un certain nombre de relations entre les coefficients du polynôme et les variables macroscopiques. Une autre série de relations est imposée sur les coefficients en considérant que l'expression (2.74) doit donner les équations d'Euler. De la même façon, le système d'inconnues A_p , B_p , C_p, \dots est complètement résolu en calculant l'expression (2.75) et en identifiant les paramètres de telle sorte que les équations de Navier-Stokes soient bien retrouvées. On voit donc que toute cette procédure revient à déterminer les coefficients du polynôme de telle sorte que les moments discrets de la fonction d'équilibre soient égaux aux moments continus.

En fait, les conditions de symétrie et d'isotropie des vitesses que doit respecter le système de vitesses choisit dans la première étape sont aussi liées à la nécessité de retrouver la bonne forme des moments de la fonction de distribution. Ainsi, la construction d'un modèle de Boltzmann sur Réseau consiste donc à résoudre le problème suivant : trouver un système de vitesses discrètes et une fonction d'équilibre tels que les moments discrets de la fonction d'équilibre soient égaux aux moments continus de la distribution d'équilibre de Maxwell-Boltzmann. Cette problématique

semble être identique à celle proposée dans le paragraphe 2.2.1 (équation (2.38)). La différence fondamentale est la suivante : l'approche basée sur les polynômes d'Hermite et la quadrature de Gauss permet de résoudre le problème représenté par l'équation (2.38) sans connaître, a priori, l'expression des moments continus de f^{eq} en fonction des variables macroscopiques. A l'inverse, la méthode d'identification des coefficients présentée ci-dessus résout le problème représenté par la relation :

$$M_k^t(\hat{\rho}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\theta}) = \sum_{\alpha=0}^{N_\alpha} \hat{c}_{\alpha,1}^{a_1} \hat{c}_{\alpha,2}^{a_2} \hat{c}_{\alpha,3}^{a_3} \hat{f}_\alpha^{eq}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{t}) \quad \text{pour } 0 \leq k = a_1 + a_2 + a_3 \leq 4 \quad (2.76)$$

où les expressions de moments M_k^t sont données dans l'annexe B.

Une présentation détaillée de cette méthode d'identification des paramètres pour le modèle à neuf vitesses *D2Q9* est disponible dans la référence [99]. Naturellement, la fonction d'équilibre obtenue est exactement la même que celle calculée dans le paragraphe 2.2.5 par la méthode des quadratures de Gauss-Hermite. De nombreux autres modèles isothermes[162] (*D1Q3*, *D2Q7*, *D3Q15*, *D3Q19*, *D4Q25*) ou thermiques[38, 33, 214] (*D2Q13*, *D2Q17*, *D4Q34*, *D4Q54*) peuvent être obtenus par cette méthode.

2.4.4 L'exemple du modèle 54 vitesses du code PowerFLOW

Le modèle de vitesse utilisé dans PowerFLOW est basé sur le modèle de Gaz sur Réseau à un seul niveau d'énergie *D4Q24* [51] étendu à trois niveaux d'énergie[33, 208] : $\hat{\epsilon}_0 = 0$, $\hat{\epsilon}_1 = 1$ et $\hat{\epsilon}_2 = 2$ avec $d_0 = 6$, $d_1 = 24$ et $d_2 = 24$. Les vitesses discrètes sont définies en dimension 4, $\hat{\mathbf{c}}_{\alpha p} = (\hat{c}_{\alpha p,1}, \hat{c}_{\alpha p,2}, \hat{c}_{\alpha p,3}, \hat{c}_{\alpha p,4})$. Pour retrouver les variables macroscopiques en dimension 3, on projette simplement les vecteurs vitesse sur les trois premières directions. C'est à dire que le vecteur $(\hat{c}_{\alpha p,1}, \hat{c}_{\alpha p,2}, \hat{c}_{\alpha p,3}, \hat{c}_{\alpha p,4})$ a pour coordonnées cartésiennes $(\hat{c}_{\alpha p,1}, \hat{c}_{\alpha p,2}, \hat{c}_{\alpha p,3})$ mais il transporte l'énergie $\hat{\epsilon}_p = (\hat{c}_{\alpha p,1}^2 + \hat{c}_{\alpha p,2}^2 + \hat{c}_{\alpha p,3}^2 + \hat{c}_{\alpha p,4}^2) / 2$.

Il y a donc 6 particules immobiles (point central de la figure 2.3). Les 24 vitesses du niveau d'énergie $\hat{\epsilon}_1 = 1$ sont obtenus en réalisant toutes les permutations possibles de $(\pm 1, \pm 1, 0, 0)$. Pour $\hat{c}_{\alpha 1,4} = 0$, on obtient les vecteurs reliant le centre du cube au milieu des arêtes. Pour $\hat{c}_{\alpha 1,4} = \pm 1$, on obtient les vecteurs reliant le centre du cube au milieu des faces. Il faut remarquer qu'il y a deux vecteurs pour chaque face (par exemple les vecteurs $(1, 0, 0, -1)$ et $(1, 0, 0, 1)$ sont confondus). Pour le niveau $\hat{\epsilon}_2 = 2$, 16 vecteurs sont obtenus par permutation de $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ et les 8 dernières vitesses sont obtenues par permutation de $(\pm 2, 0, 0, 0)$.

La fonction d'équilibre est donnée par[33] :

$$\hat{g}_{\alpha p}^{eq} = \hat{\rho} \omega_p(\hat{\theta}) \left(1 + \frac{\hat{\mathbf{c}}_{\alpha p} \cdot \hat{\mathbf{u}}}{\hat{\theta}} + \frac{(\hat{\mathbf{c}}_{\alpha p} \cdot \hat{\mathbf{u}})^2}{2\hat{\theta}^2} - \frac{|\hat{\mathbf{u}}|^2}{2\hat{\theta}} + \frac{(\hat{\mathbf{c}}_{\alpha p} \cdot \hat{\mathbf{u}})^3}{6\hat{\theta}^3} - \frac{\hat{\mathbf{c}}_{\alpha p} \cdot \hat{\mathbf{u}}}{2\hat{\theta}^2} |\hat{\mathbf{u}}|^2 \right) \quad (2.77)$$

avec :

$$\omega_0(\hat{\theta}) = \frac{1}{6} (3\hat{\theta}^2 - 3\hat{\theta} + 1)$$

$$\omega_1(\hat{\theta}) = \frac{1}{24} 2\hat{\theta} (2 - 3\hat{\theta})$$

$$\omega_2(\hat{\theta}) = \frac{1}{24} \hat{\theta} (3\hat{\theta} - 1)$$

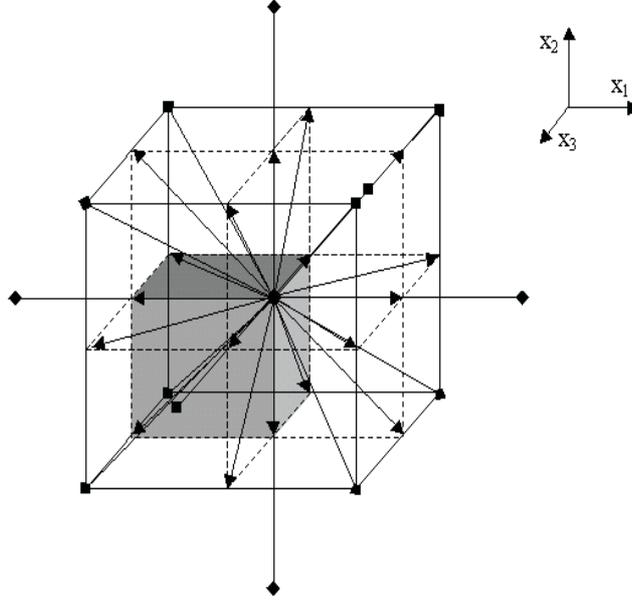


FIG. 2.3 – Représentation des directions des vitesses du modèle $D4Q54$. Le rond noir central représente les vecteurs d'énergie $\hat{\epsilon}_0 = 0$ (particules immobiles); les triangles représentent les vecteurs d'énergie $\hat{\epsilon}_1 = 1$ et les carrés indiquent les vecteurs d'énergie $\hat{\epsilon}_2 = 2$. Le cube grisé représente une maille élémentaire du maillage spatial.

L'opérateur de collision du modèle de Boltzmann sur Réseau utilisé dans PowerFLOW est un opérateur à deux temps de relaxation défini par les équations (2.65) et (2.66). La viscosité et la diffusivité thermique obtenues avec ce modèle sont :

$$\hat{\nu} = \hat{\theta} \left(\hat{\tau}_g - \frac{1}{2} \right) \quad (2.78)$$

$$\hat{\kappa} = \frac{D+2}{2} \hat{\rho} \hat{\theta} \left(\frac{2\hat{\tau}_g \hat{\tau}'_g}{\hat{\tau}_g + 2\hat{\tau}'_g} - \frac{1}{2} \right) \quad (2.79)$$

Enfin la vitesse du son est donnée par :

$$\hat{c}_s = \sqrt{\gamma \hat{\theta}} = \sqrt{\frac{D+2}{D} \hat{\theta}} \quad (2.80)$$

Le modèle de Boltzmann sur Réseau $D4Q54$ utilisé dans PowerFLOW est un modèle thermique. Cependant, le nombre de Mach des écoulements simulés doit rester assez faible, c'est-à-dire que l'écoulement doit être *incompressible*, au sens de l'aérodynamique. Les écoulements subsoniques rapides ($M > 0.3$), transsoniques et évidemment supersoniques ne peuvent pas être modélisés par cette méthode. Il y a deux raisons à cette limitation. Tout d'abord, l'amplitude des variations de température est limitée par le nombre limité de niveaux d'énergie discrets du système. Pour ce modèle, l'intervalle de température permis est[209] :

$$\frac{2}{D+2} < \hat{\theta} < \frac{4}{D+2}$$

La seconde raison de la limitation du modèle à des faibles nombres de Mach est l'erreur commise dans l'évaluation des moments d'ordre élevé. Cette erreur génère des termes non physiques dans les expressions du tenseur des contraintes visqueuses et dans le flux de chaleur[33]. Cette erreur est due à un système de vitesses trop simple associé à une fonction d'équilibre tronquée à un ordre trop faible. Ces termes non physiques sont en $O(M^3)$.

2.5 Discrétisations spatiale et temporelle

2.5.1 Maillage uniforme

Le principal inconvénient de l'équation de Boltzmann sur Réseau (2.61) est qu'elle impose le point $\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{c}}_\alpha \hat{\Delta}t$ pour lequel la fonction de distribution est calculée au pas de temps $\hat{t} + \hat{\Delta}t$. Le maillage spatial va donc nécessairement dépendre du système de vitesses $\hat{\mathbf{c}}_\alpha$. Pour calculer les moments de \hat{g}_α au point $\hat{\mathbf{x}}_k$ et au temps $\hat{t} + \hat{\Delta}t$, on doit appliquer la relation (2.61) pour toutes les vitesses $\hat{\mathbf{c}}_\alpha$ aux points $\hat{\mathbf{x}}_{k-1} = \hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{c}}_\alpha \hat{\Delta}t$. Ces points doivent donc être également un nœud du maillage. Cette condition fixe donc la discrétisation spatiale du domaine. Par exemple, le modèle $D2Q9$ doit être associé à un maillage formé de mailles carrées de côté $\hat{\Delta}x = \sqrt{3\hat{\theta}}\hat{\Delta}t$. Ainsi, en repassant aux dimensions physiques des variables, on a :

$$c_s = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2.81)$$

où $c_s = \sqrt{\theta}$ est la vitesse du son du fluide athermique. On note au passage que le nombre CFL de ce modèle est $\tilde{c}_s = 1/\sqrt{3}$, avec $\tilde{c}_s = c_s \Delta t / \Delta x$. Pour le modèle $D4Q54$, la vitesse du son est :

$$c_s = \sqrt{\frac{D+2}{D} \hat{\theta}} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2.82)$$

Dans PowerFLOW, la température adimensionnelle caractéristique est fixée égale à $\hat{\theta} = 0.42$. La valeur de θ est donnée par l'utilisateur (température ambiante). Ainsi, pour des écoulements avec de faibles variations de température, le nombre CFL du modèle varie peu autour de la valeur $\tilde{c}_s = 0.794$.

Contrairement à la vitesse du son, l'expression de la viscosité (2.62) est la même pour tout les modèles de Boltzmann sur Réseau :

$$\nu = \hat{\theta} \left(\tilde{\tau}_g - \frac{1}{2} \right) \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \quad \text{avec} \quad \tilde{\tau}_g = \frac{\tau_g}{\Delta t} \quad (2.83)$$

D'un point de vue pratique, on doit considérer ces relations dans l'autre sens. Etant donné que c_s et ν sont des caractéristiques fixées du fluide, les pas de temps et d'espace sont donnés par :

$$\Delta t = \frac{1}{\left(\tilde{\tau}_g - \frac{1}{2} \right) c_s^2 \hat{\theta}} \nu \tilde{c}_s^2$$

$$\Delta x = \frac{1}{\left(\tilde{\tau}_g - \frac{1}{2} \right) c_s \hat{\theta}} \nu \tilde{c}_s$$

Les pas de temps et d'espace sont donc inversement proportionnels à $(\tilde{\tau}_g - 1/2)$ avec $\tilde{\tau}_g > 1/2$.

Dans la suite, les variables d'espace, de temps et de vitesse seront adimensionnalisées par Δt et Δx et seront notées avec un tilde ($\tilde{t} = t/\Delta t$, $\tilde{\mathbf{c}}_\alpha = \mathbf{c}_\alpha \Delta t/\Delta x$, $\tilde{U}_0 = U_0 \Delta t/\Delta x$...). Par exemple, le nombre de Reynolds de l'écoulement simulé peut s'écrire :

$$Re_L = \frac{\tilde{U}_0 \tilde{L}}{\hat{\theta} \left(\tilde{\tau}_g - \frac{1}{2} \right)} \quad (2.84)$$

$\tilde{L} = L/\Delta x$ représente le nombre de nœuds utilisés pour mailler l'objet de dimension L . Ce paramètre est donc caractéristique de la taille du calcul (en terme de taille mémoire mais aussi en terme de temps de calcul). Il est donc limité par la machine utilisée et le temps de restitution désiré. Ainsi, pour \tilde{L} fixé, le seul moyen d'augmenter le nombre de Reynolds de l'écoulement est de faire tendre $\tilde{\tau}_g$ vers $1/2$.

2.5.2 Algorithme général de la LBM

Les discrétisations spatiale et temporelle étant définies, on peut maintenant expliciter l'algorithme numérique de calcul de la LBE. Au temps \tilde{t} , on suppose que $\hat{g}_\alpha(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t})$, $\hat{g}_\alpha^{eq}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t})$, $\hat{\rho}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t})$, $\tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t})$ sont connus. Pour plus de simplicité, on se place dans le cas d'un calcul isotherme. Les différentes variables peuvent être calculées au temps $\tilde{t} + 1$ par l'algorithme :

Etape 1 : Collision : $\hat{g}_\alpha^{coll}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) = \left(1 - \frac{1}{\tilde{\tau}_g}\right) \hat{g}_\alpha(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) + \frac{1}{\tilde{\tau}_g} \hat{g}_\alpha^{eq}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t})$

Etape 2 : Propagation : $\hat{g}_\alpha(\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{c}}_\alpha, \tilde{t} + 1) = \hat{g}_\alpha^{coll}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t})$

Etape 3 : Calcul de $\hat{\rho}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t} + 1)$, $\tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t} + 1)$ (moments de $\hat{g}_\alpha(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t} + 1)$)

Etape 4 : Calcul de $\hat{g}_\alpha^{eq}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t} + 1)$ en fonction de $\hat{\rho}$ et $\tilde{\mathbf{u}}$.

Cet algorithme est d'une remarquable simplicité. En particulier, son implémentation pour un calcul parallèle est évidente en décomposant le domaine de calcul en plusieurs sous-domaines. La seule étape nécessitant un échange d'information est l'étape 2 : les variables \hat{g}_α^{coll} dont les indices α correspondent à des vitesses qui traversent la frontière entre les sous-domaines doivent être transférées. Ainsi, le facteur d'accélération de cet algorithme est proche de l'unité[192, 212].

2.5.3 Maillage non-uniforme

En règle générale, les écoulements réels ne sont pas uniformes, les échelles caractéristiques aérodynamiques peuvent être très différentes suivant la zone considérée : d'un point de vue numérique, un maillage uniforme est donc une contrainte importante. Plusieurs solutions ont été proposées pour pouvoir appliquer la LBM sur des maillages non-uniformes. Par exemple, He *et al.*[91] proposent d'utiliser un maillage quelconque et d'appliquer l'équation de Boltzmann sur Réseau

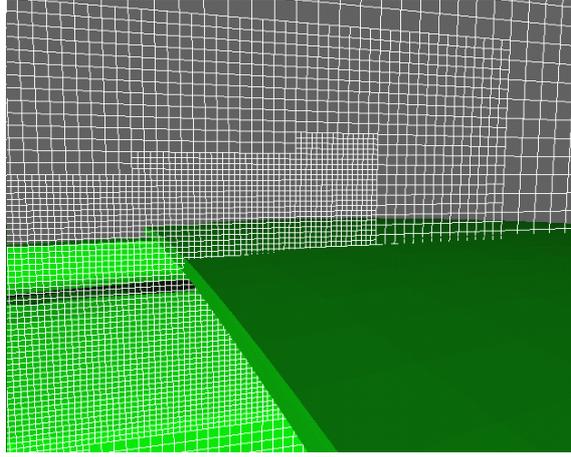


FIG. 2.4 – Exemple de maillage non uniforme par blocs utilisé dans PowerFLOW. Trois zones de résolution sont visibles autour du panneau mobile d’un toit ouvrant ouvert.

classique (2.61) : le point $\tilde{\mathbf{x}}_{k-1} + \tilde{\mathbf{c}}_\alpha$ n’est donc pas forcément un point du maillage. La valeur de \hat{g}_α au point $\tilde{\mathbf{x}}_k$ au temps $\tilde{t} + 1$ est alors calculée à partir des valeurs de $\hat{g}_\alpha(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1} + \tilde{\mathbf{c}}_\alpha, \tilde{t} + 1)$ à l’aide d’une interpolation d’ordre 2. Les tests numériques[92] montrent que la précision globale de la méthode n’est pas dégradée par cette interpolation.

Une autre méthode pour adapter le maillage au problème physique est d’utiliser un maillage uniforme par blocs[59, 224]. Pour deux blocs B_1 et B_2 dont les mailles sont de taille $\Delta_1 x$ et $\Delta_2 x$, le rapport $\Delta_1 x / \Delta_2 x = n$ est entier de telle sorte qu’un nœud sur n de la frontière du bloc B_2 coïncide avec un nœud du bloc B_1 . Dans le logiciel PowerFLOW, ce type de maillage est utilisé avec $n = 2$ (voir figure 2.4). Dans chaque bloc, l’équation de Boltzmann sur Réseau est calculée en adaptant le temps de relaxation de telle sorte que la viscosité et la vitesse du son soient constantes (équations (2.82) et (2.83)) dans tout le fluide. On a donc les relations :

$$\tilde{\tau}_{g,2} = \frac{1}{2} + n \left(\tilde{\tau}_{g,1} - \frac{1}{2} \right)$$

On remarque également que l’on a $\Delta_1 t / \Delta_2 t = n$. Cette méthode a donc le double avantage de réduire le nombre d’éléments du maillage et de réduire le nombre d’itérations effectuées dans les zones de résolution les plus faibles. Bien entendu, la principale difficulté de cette méthode est de calculer les fonctions de distribution pour les nœuds situés à l’interface des blocs. Les fonctions de distribution des nœuds du maillage fin qui ne coïncident pas avec des nœuds du maillage grossier sont calculées par interpolations spatiale et temporelle[59, 224].

2.6 Les conditions aux limites

2.6.1 Problématique générale

Dans la méthode Boltzmann sur Réseau, le problème des conditions aux limites est relativement simple à exprimer. En effet, pour les nœuds à la frontière du domaine de calcul, après l’étape 2 de l’algorithme (voir §2.5.2), seules les fonctions de distribution provenant de nœuds

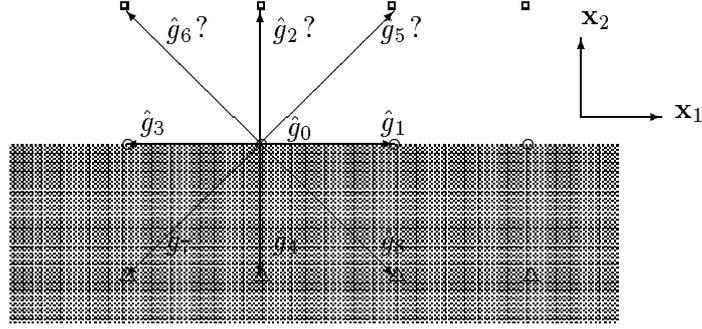


FIG. 2.5 – Schéma du problème général des conditions aux limites. La partie grisée représente une zone en dehors du domaine de calcul. \blacksquare nœuds dans le domaine de calcul; \circ nœuds sur la frontière du domaine de calcul; \triangle nœuds en dehors du domaine de calcul.

faisant partie du domaine de calcul (nœuds \circ et \blacksquare sur la figure 2.5) seront connues. Ces fonctions de distribution notées $\hat{g}_{\alpha_{out}}$ sont associées à des vitesses *sortantes*. Par contre, les fonctions de distribution *rentrantes* $\hat{g}_{\alpha_{in}}$ restent inconnues puisqu'elles devraient être calculées à partir de la propagation des fonctions $\hat{g}_{\alpha}^{coll}(\Delta, \bar{t})$ où Δ désignent des nœuds qui ne font pas partie du domaine de calcul. Etant donné que l'on ne connaît pas toutes les fonctions de distribution pour les nœuds \circ , les variables macroscopiques ne peuvent pas être calculées au temps $\bar{t} + 1$ (étape 3 de l'algorithme). Même dans le cas, éventuel, où les variables macroscopiques sont imposées (condition de non glissement,...) ou peuvent être déterminées indépendamment des \hat{g}_{α} (extrapolation,...), l'algorithme de Boltzmann sur Réseau ne peut pas se poursuivre car la valeur de fonctions rentrantes $\hat{g}_{\alpha_{in}}$ est nécessaire pour l'étape 1 (sauf dans le cas particulier où $\bar{\tau}_g = 1$).

Ainsi, pour tous les types de conditions aux limites, la problématique se résume à déterminer la valeur, à chaque pas de temps, des fonctions rentrantes $\hat{g}_{\alpha_{in}}$.

2.6.2 Conditions de paroi : rebond total arrière et réflexion spéculaire

Par son lien avec la méthode des Gaz sur Réseau, l'équation de Boltzmann sur Réseau peut s'interpréter comme étant la description du mouvement des particules fluides représentées par les fonctions \hat{g}_{α} : le déplacement des particules est modélisé comme une succession d'étapes de collision et de propagation. Quand une particule est amenée sur une paroi solide pendant la phase de propagation, l'étape de collision inter-particulaire (étape 1) peut être remplacée par un modèle d'interaction particule/paroi. Pour une paroi non glissante, on peut supposer que la particule rebondit complètement sur la surface dans la direction opposée à sa direction d'arrivée : c'est la condition de rebond total arrière[35] représentée sur la figure 2.6 (a). Ainsi à chaque pas de temps, les fonctions rentrantes sont directement calculées à partir des fonctions sortantes. Sur l'exemple du modèle $D2Q9$ de la figure 2.5, on a :

$$\hat{g}_2(\circ, \bar{t}) = \hat{g}_4(\circ, \bar{t}) \quad \hat{g}_5(\circ, \bar{t}) = \hat{g}_7(\circ, \bar{t}) \quad \hat{g}_6(\circ, \bar{t}) = \hat{g}_8(\circ, \bar{t}) \quad (2.85)$$

De même, une condition de paroi glissante peut-être définie en considérant que l'on a une

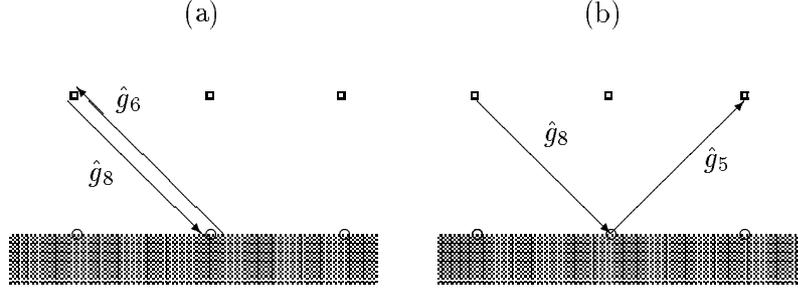


FIG. 2.6 – Schéma des conditions aux limites de paroi solide basées sur la réflexion des particules. (a) rebond total arrière : paroi non glissante. (b) réflexion spéculaire : paroi glissante.

réflexion spéculaire totale des particules (figure 2.6 (b)). Dans ce cas, les fonctions rentrantes sont calculées par :

$$\hat{g}_2(\circ, \bar{t}) = \hat{g}_4(\circ, \bar{t}) \quad \hat{g}_5(\circ, \bar{t}) = \hat{g}_8(\circ, \bar{t}) \quad \hat{g}_6(\circ, \bar{t}) = \hat{g}_7(\circ, \bar{t})$$

Ces relations traduisent l'interaction entre les particules et la paroi solide. L'opérateur de collision qui relaxe la fonction de distribution vers sa valeur d'équilibre thermodynamique n'est donc pas appliquée. L'étape 1 de l'algorithme est donc remplacée par :

$$\hat{g}_{\alpha_{in}}^{coll}(\circ, \bar{t}) = \hat{g}_{\alpha_{in}}(\circ, \bar{t}) \quad (2.86)$$

Donc finalement, pour le rebond total arrière par exemple, on a la formulation :

$$\hat{g}_{\alpha_{in}}^{coll}(\circ, \bar{t}) = \hat{g}_{\alpha_{out}}^{coll}(\square, \bar{t}) = \left(1 - \frac{1}{\bar{\tau}_g}\right) \hat{g}_{\alpha_{out}}(\square, \bar{t}) + \frac{1}{\bar{\tau}_g} \hat{g}_{\alpha_{out}}^{eq}(\square, \bar{t}) \quad \text{avec } \bar{\mathbf{c}}_{\alpha_{in}} = -\bar{\mathbf{c}}_{\alpha_{out}} \quad (2.87)$$

En contrepartie de sa simplicité, ce type de condition de paroi a seulement une précision d'ordre 1 en espace[66, 93]. En particulier, avec la méthode du rebond total arrière, la vitesse de glissement à la paroi n'est pas parfaitement nulle[93]. Une vitesse tangentielle de l'écoulement nulle est obtenue à une distance d'environ $\Delta x/2$ de la paroi. On peut donc naturellement améliorer la précision de la méthode en plaçant les nœuds solides de telle sorte que la paroi physique soit à mi-chemin entre les nœuds solides et les premiers nœuds du fluide[66] (méthode du point milieu). Cette modification conduit à une précision d'ordre 2. Une autre méthode pour améliorer la précision de la méthode est de considérer la condition (2.85) comme une condition de symétrie sur les fonctions de distribution et non pas comme une loi de collision entre la paroi et les particules. La condition de rebond total arrière modifiée[93] consiste donc à appliquer l'étape de collision "fluide" 1 au lieu de la condition (2.86).

L'extrême simplicité de ce type de condition aux limites de paroi permet de prendre en compte des solides à géométrie très complexe comme c'est le cas pour les simulations des écoulements dans des matériaux poreux[119] ou les simulations de particules solides en suspension[123] : c'est un des avantages de la méthode Boltzmann sur Réseau par rapport aux schémas numériques traditionnels basés sur la discrétisation des équations de Navier-Stokes.

Par construction, les conditions aux limites de rebond total arrière et de réflexion spéculaire permettent de modéliser seulement une condition de paroi solide. D'autres types de conditions ont donc été proposés permettant d'imposer une condition de vitesse et/ou de pression quelconque.

2.6.3 Méthodes pour les conditions aux limites de vitesse ou de pression

Dans la plupart des cas, les valeurs d'un certain nombre de variables macroscopiques sont fixées sur les différentes frontières du domaine de calcul. Normalement, les variables macroscopiques sont calculées à partir des fonctions de distribution (étape 3 de l'algorithme), mais si ces variables sont déjà connues, on peut les utiliser pour évaluer les valeurs des fonctions de distribution inconnues. Le cas idéal est de connaître la valeur de toutes les variables macroscopiques. Malheureusement, ce n'est généralement pas le cas. Par exemple, pour une condition aux limites de vitesse, la pression n'est pas fixée. Pour une condition $\tilde{\mathbf{u}} = 0$, la méthode du rebond total arrière peut permettre de calculer la densité à la paroi[136], et d'exploiter ensuite, un des schémas présentés ci-dessous pour calculer de façon plus précise les fonctions de distribution inconnues. Les variables macroscopiques inconnues peuvent être calculées directement à partir des variables connues pour d'autres cas particuliers. Ainsi, pour une condition de vitesse \mathbf{u} quelconque fixée sur une frontière plane parallèle aux vitesses de norme 1 ($|\tilde{\mathbf{c}}_\alpha| = 1$) du modèle *D2Q9*, la densité peut s'exprimer explicitement en fonction des variables connues du système. A titre d'exemple, sur la configuration de la figure 2.5, on peut écrire :

$$\hat{\rho} = \frac{1}{1 - \tilde{u}_2} (\hat{g}_0 + \hat{g}_1 + \hat{g}_3 + 2(\hat{g}_4 + \hat{g}_7 + \hat{g}_8)) \quad (2.88)$$

Cette relation est obtenue en recombinaison directement les expressions de $\hat{\rho}$ et $\tilde{\mathbf{u}}$ (équations (2.51) et (2.52)). Pour le modèle *D2Q9*, on a :

$$\hat{\rho} = \hat{g}_0 + \hat{g}_1 + \hat{g}_2 + \hat{g}_3 + \hat{g}_4 + \hat{g}_5 + \hat{g}_6 + \hat{g}_7 + \hat{g}_8 \quad (2.89)$$

$$\hat{\rho}\tilde{u}_1 = \hat{g}_1 - \hat{g}_3 + \hat{g}_5 - \hat{g}_6 - \hat{g}_7 + \hat{g}_8 \quad (2.90)$$

$$\hat{\rho}\tilde{u}_2 = \hat{g}_2 - \hat{g}_4 + \hat{g}_5 + \hat{g}_6 - \hat{g}_7 - \hat{g}_8 \quad (2.91)$$

Enfin, dans le cas le plus général, il est possible d'évaluer les variables macroscopiques inconnues en extrapolant leur valeur à partir des nœuds les plus proches, à l'intérieur du domaine de calcul[152, 190].

Approximation de la fonction de distribution par la fonction d'équilibre

Les variables macroscopiques $\hat{\rho}$ et $\tilde{\mathbf{u}}$ étant connues sur la frontière, la méthode la plus simple pour déterminer les fonctions de distribution inconnues est de supposer[93, 190] que :

$$\hat{g}_\alpha(\circ, \tilde{t}) \approx \hat{g}_\alpha^{eq}(\circ, \tilde{t})$$

Habituellement, on utilise aussi cette relation pour initialiser le domaine de calcul au premier pas de temps. Cette approximation est relativement correcte pour les zones de l'écoulement où la partie hors équilibre de la fonction de distribution, définie par :

$$\hat{g}_\alpha^{neq} = \hat{g}_\alpha - \hat{g}_\alpha^{eq} = \epsilon \hat{g}_\alpha^{(1)} + \epsilon^2 \hat{g}_\alpha^{(2)} + \dots \quad (2.92)$$

est négligeable. Il faut que l'écoulement soit proche de son état d'équilibre thermodynamique, c'est-à-dire que les gradients de $\tilde{\rho}$ et $\tilde{\mathbf{u}}$ soient faibles. Cette contrainte peut être respectée pour

les frontières d'entrée et de sortie du domaine de calcul si les conditions aux limites sont placées assez loin des zones où l'écoulement, éventuellement instationnaire, possède de forts gradients.

Par contre, si cette relation est employée pour évaluer les fonctions de distribution pour une condition de paroi non glissante, où le gradient de vitesse est naturellement important, l'erreur commise est importante. Il a été montré que cette approximation est seulement d'ordre 1 en espace[93, 190], et en particulier, que la vitesse de glissement à la paroi n'est pas nulle[93]. La précision de la méthode peut être améliorée en prenant en compte cette vitesse de glissement non nulle dans la fonction d'équilibre[111]. Par construction, la condition $\tilde{\mathbf{u}}(\circ, \tilde{t}) = 0$ est alors respectée.

On remarque d'après l'équation de Boltzmann sur Réseau (2.61), que l'hypothèse $\hat{g}_\alpha = \hat{g}_\alpha^{eq}$ revient à supposer que $\tilde{\tau}_g = 1$. Si $\tilde{\tau}_g$ est différent de 1 dans le domaine intérieur, la valeur de la viscosité effective à la paroi n'est pas la même que la viscosité dans le fluide. Il est possible de corriger cette différence en introduisant dans l'expression de la fonction d'équilibre de paroi, un terme hors équilibre[190, 220] :

$$\hat{g}_\alpha^{eq*}(\circ, \tilde{t}) = \hat{g}_\alpha^{eq}(\circ, \tilde{t}) + \epsilon \hat{h}_\alpha^{neq}(\circ, \tilde{t}) \quad (2.93)$$

Le terme \hat{h}_α^{neq} est calculé à partir des gradients locaux de l'écoulement. Cette méthode sera détaillée pour le cas d'une condition de paroi non glissante dans le paragraphe 3.5.1.

Utilisation des expressions des variables macroscopiques

Pour retrouver les fonctions de distribution inconnues à la frontière, une autre méthode[152, 230] consiste à utiliser les expressions des variables macroscopiques (2.51) et (2.52) en fonction des \hat{g}_α . Par exemple, pour la configuration de la figure 2.5, en supposant qu'aucune variable macroscopique n'est connue, le problème revient à résoudre le système formé des équations (2.89), (2.90) et (2.91) et d'inconnues $\hat{\rho}$, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2 , \hat{g}_2 , \hat{g}_5 et \hat{g}_6 . Même pour une condition de paroi sans glissement où l'on élimine deux inconnues ($\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2 = 0$), le système n'est pas fermé. Zou *et al.*[230] proposent alors de rajouter une relation supplémentaire en supposant la réflexion totale de la partie hors équilibre de la fonction de distribution normale à la paroi : $\hat{g}_2 - \hat{g}_2^{eq} = \hat{g}_4 - \hat{g}_4^{eq}$. En fait, une quatrième équation peut être obtenue[153] en utilisant l'expression de la température (2.53).

Pour les conditions de paroi sans glissement, la méthode est d'ordre 2 en espace[93] et la vitesse de glissement est nulle, par construction.

La bonne application des méthodes présentées ci-dessus nécessite la connaissance d'un maximum de variables macroscopiques sur la frontière. Il est possible d'utiliser des schémas d'extrapolation pour obtenir ces informations mais cela peut dégrader la précision générale des schémas et peut conduire à des problèmes de stabilité du calcul. Ces méthodes seront donc valables pour des conditions aux limites où l'écoulement est imposé (paroi solide, condition de vitesse d'entrée,...). Par contre, dans le cas d'une condition aux limites libre pour laquelle les variables macroscopiques ne sont pas connues a priori, ces schémas ne peuvent pas donner de bons résultats. En particulier, aucun schéma n'a été proposé permettant de modéliser la sortie sans réflexion d'une onde

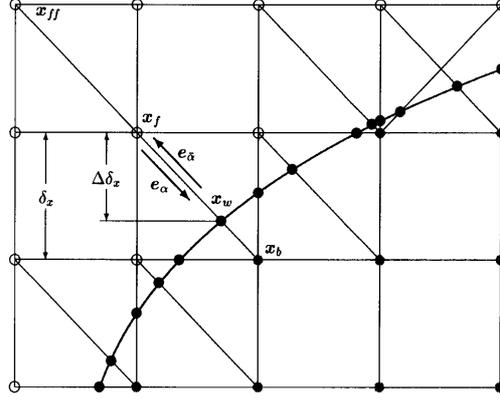


FIG. 2.7 – Schéma de principe de la méthode proposée par Filippova *et al.*[58] pour les conditions aux limites sur des frontières curvilignes. La ligne épaisse représente la frontière du solide. Les cercles pleins représentent les positions où l'interaction particule/paroi se produit. Les cercles vides représentent les nœuds fluides et les cercles grisés les nœuds à l'intérieur du solide. Notations : $\mathbf{e}_\alpha \equiv \mathbf{c}_\alpha$, $\delta x \equiv \Delta x$.

acoustique. Un tel schéma est proposé dans le paragraphe 3.5.2 : il est basé sur la discrétisation par différences finies de l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes (2.50).

2.6.4 Conditions aux limites pour les parois non planes

Tous les modèles de condition aux limites présentés ci-dessus sont relativement simples à appliquer pour des frontières dont les nœuds de discrétisation coïncident avec les nœuds du maillage fluide. Ainsi, pour représenter un solide de forme quelconque en respectant cette contrainte, on peut seulement approcher la géométrie de la frontière en considérant que le nœud solide est le nœud le plus proche de la limite physique du solide.

D'autres méthodes ont été proposées pour représenter de façon plus précise les géométries curvilignes. Par exemple, Filippova *et al.*[58] exprime la fonction rentrante comme une combinaison linéaire de la fonction de distribution réfléchiée par rebond total arrière sur le nœud intérieur au solide (nœud \mathbf{x}_b sur la figure 2.7) et d'une fonction d'équilibre hybride $\hat{g}_\alpha^{eq}(\tilde{\mathbf{x}}_b, \tilde{t})$. En reprenant les notations de la figure 2.7, $\tilde{\mathbf{c}}_\alpha = -\tilde{\mathbf{c}}_\alpha$, l'algorithme s'écrit :

$$\hat{g}_\alpha(\tilde{\mathbf{x}}_f, \tilde{t}+1) = (1 - \chi) \hat{g}_\alpha^{coll}(\tilde{\mathbf{x}}_f, \tilde{t}) + \chi \hat{g}_\alpha^{eq}(\tilde{\mathbf{x}}_b, \tilde{t}) - 2\omega_\alpha \rho(\tilde{\mathbf{x}}_f, \tilde{t}) \frac{\tilde{\mathbf{c}}_\alpha \cdot \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{x}}_w, \tilde{t})}{\tilde{c}_s^2}$$

La fonction d'équilibre hybride $\hat{g}_\alpha^{eq}(\tilde{\mathbf{x}}_b, \tilde{t})$ fait intervenir la densité et la vitesse au point intérieur \mathbf{x}_f mais aussi la vitesse fictive au nœud solide \mathbf{x}_b . Cette vitesse est calculée par une extrapolation du second ordre de la vitesse au point \mathbf{x}_f et de la vitesse de frottement (imposée) $\tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{x}}_w, \tilde{t})$. Cette extrapolation du second ordre fait donc intervenir le paramètre de distance Δ . Ce paramètre de distance apparaît également dans l'expression du coefficient χ qui dépend aussi du temps de relaxation $\tilde{\tau}_g$. Mei *et al.*[142] proposent une optimisation des expressions de la vitesse $\tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{x}}_b, \tilde{t})$ et du coefficient χ pour améliorer la stabilité et la précision de la méthode de Filippova. Une précision d'ordre 2 peut être ainsi obtenue.

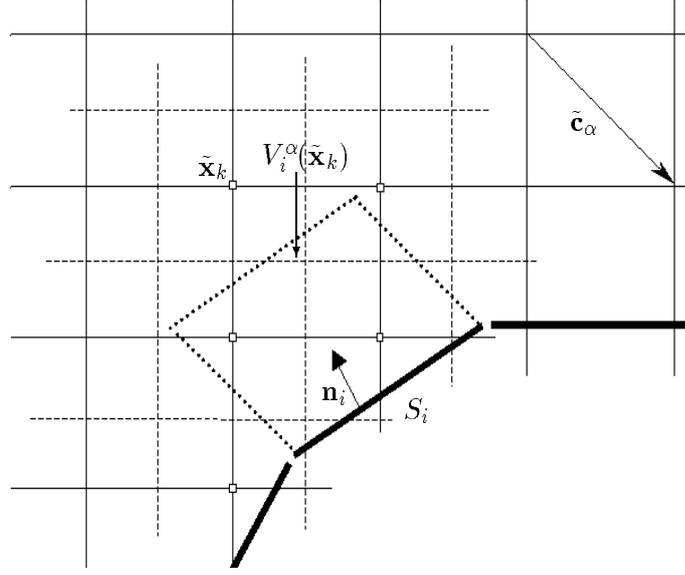


FIG. 2.8 – Illustration de la méthode volumique utilisée dans PowerFLOW pour la prise en compte des conditions aux limites sur des parois de géométrie complexe. \square nœuds du maillage fluide dont une fraction de la fonction de distribution \hat{g}_α va impacter l'élément de surface S_i . \mathbf{n}_i est la normale à l'élément de surface S_i . $V_i^\alpha(\tilde{\mathbf{x}}_k)$ est l'intersection des volumes $V(\tilde{\mathbf{x}}_k)$ – – – et du volume d'influence V_i^α ······ de S_i associé à $\tilde{\mathbf{c}}_\alpha$.

Conditions de paroi dans PowerFLOW

Une autre méthode[32, 216] pour prendre en compte des frontières non planes consiste à considérer que la population de particules $\hat{g}_\alpha(\tilde{\mathbf{x}}_k, \tilde{t})$ est uniformément répartie dans une cellule de volume $V(\tilde{\mathbf{x}}_k)$ centrée autour du nœud fluide $\tilde{\mathbf{x}}_k$. Pour une cellule fluide qui n'intercepte par une frontière du domaine, on a évidemment $V(\tilde{\mathbf{x}}_k) = \Delta x^3$. Cette approche, que l'on peut qualifier de volumique, permet donc de déterminer un coefficient qui décrit la proportion de particules contenues dans le volume de la cellule $V(\tilde{\mathbf{x}}_k)$ susceptible d'impacter la surface au cours de l'étape de propagation. Cette méthode est employée dans le logiciel PowerFLOW [32]. Le schéma de principe est représenté sur la figure 2.8. Le nombre de particules possédant la vitesse $\tilde{\mathbf{c}}_\alpha$ contenu dans la cellule associée à $\tilde{\mathbf{x}}_k$ est défini de façon évidente par :

$$N_\alpha(\tilde{\mathbf{x}}_k, \tilde{t}) = \frac{V(\tilde{\mathbf{x}}_k)}{m} \rho_0 \hat{g}_\alpha(\tilde{\mathbf{x}}_k, \tilde{t}) \quad (2.94)$$

Pendant l'étape de propagation, seules les particules contenues dans le cylindre de base S_i de génératrice $-\|\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{n}_i\| \Delta t \tilde{\mathbf{c}}_\alpha / \|\tilde{\mathbf{c}}_\alpha\|$ viendront impacter l'élément de surface S_i . Ce volume d'influence de la surface S_i pour la vitesse $\tilde{\mathbf{c}}_\alpha$ est donc donné par :

$$V_i^\alpha = \|\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{n}_i\| \Delta t S_i$$

On peut ainsi définir :

$$V_i^\alpha(\tilde{\mathbf{x}}_k) = V_i^\alpha \cap V(\tilde{\mathbf{x}}_k)$$

Pour la surface S_i , on peut alors calculer le nombre de particules de vitesse $\tilde{\mathbf{c}}_\alpha$ total provenant de toutes les cellules voisines :

$$\Gamma_i^{\alpha,out}(\tilde{t}) = \sum_{\tilde{\mathbf{x}}_k = \square} \frac{V_i^\alpha(\tilde{\mathbf{x}}_k)}{V(\tilde{\mathbf{x}}_k)} N_\alpha(\tilde{\mathbf{x}}_k, \tilde{t})$$

Cette grandeur représente donc le flux sortant de particules de direction α à travers l'élément de surface S_i . La spécification de la condition de frontière peut alors se faire en contrôlant les flux entrant $\Gamma_i^{\alpha,in}(\tilde{t})$. En effet, par définition, les flux de masse et de quantité de mouvement sont donnés par :

$$\mathcal{M}^i(\tilde{t}) = \frac{1}{S_i \Delta t} \left(\sum_{\alpha, \tilde{\mathbf{c}}_\alpha \cdot \mathbf{n}_i > 0} \Gamma_i^{\alpha,in}(\tilde{t}) - \sum_{\alpha, \tilde{\mathbf{c}}_\alpha \cdot \mathbf{n}_i < 0} \Gamma_i^{\alpha,out}(\tilde{t}) \right) \quad (2.95)$$

$$\mathcal{F}^i(\tilde{t}) = \frac{1}{S_i \Delta t} \left(\sum_{\alpha, \tilde{\mathbf{c}}_\alpha \cdot \mathbf{n}_i > 0} \tilde{\mathbf{c}}_\alpha \Gamma_i^{\alpha,in}(\tilde{t}) - \sum_{\alpha, \tilde{\mathbf{c}}_\alpha \cdot \mathbf{n}_i < 0} \tilde{\mathbf{c}}_\alpha \Gamma_i^{\alpha,out}(\tilde{t}) \right) \quad (2.96)$$

De façon naturelle, on peut donc imposer, par exemple, une condition de paroi solide sans glissement en annulant les flux de masse et de quantité de mouvement à travers chaque facette :

$$\Gamma_i^{\alpha,in}(\tilde{t}) = \Gamma_i^{\bar{\alpha},out}(\tilde{t}) \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{c}}_\alpha \cdot \mathbf{n}_i > 0 \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{c}}_{\bar{\alpha}} = -\tilde{\mathbf{c}}_\alpha$$

La spécification d'une condition de glissement est moins évidente. Les valeurs des variables macroscopiques doivent être connues sur la surface. Pour cela, la méthode utilisée dans PowerFLOW est une extrapolation du premier ordre[32] des fonctions de distributions \tilde{g}_α suivant la normale à la facette. La pression $\tilde{p}^i(\tilde{t})$, la vitesse $\tilde{\mathbf{u}}^i(\tilde{t})$ et la température $\tilde{\theta}^i(\tilde{t})$ peuvent être ainsi calculées sur la surface S_i , en imposant de plus la nullité de la composante de vitesse normale à la surface $\tilde{\mathbf{u}}_n^i = 0$. Le flux entrant est alors défini par :

$$\Gamma_i^{\alpha,in}(\tilde{t}) = V_i^\alpha \left(\tilde{g}_\alpha^{eq,i}(\tilde{t}) + \tilde{g}_{\bar{\alpha}}^{eq,i}(\tilde{t}) \right) - \Gamma_i^{\bar{\alpha},out} + \delta \Gamma_i^{\alpha,in}(\tilde{t}) \quad (2.97)$$

Les fonctions d'équilibre à la paroi sont calculées classiquement avec l'expression (2.77). Le calcul du flux de quantité de mouvement (2.96) avec ce choix du flux sortant conduit à la force surfacique $\mathcal{F}^i(\tilde{t}) = \mathcal{F}_n^i(\tilde{t}) = \tilde{p}^i(\tilde{t}) \mathbf{n}_i$. Cela correspond bien à la force exercée par une surface sans frottement sur le fluide adjacent. De plus, le dernier terme correctif dans l'expression de $\Gamma_i^{\alpha,in}$ permet d'assurer la nullité des flux de masse et d'énergie[32]. A l'aide de cette méthode, une force tangentielle à la paroi non nulle peut aussi être imposée. En particulier, pour l'application du modèle de couche limite turbulente[210], la force de frottement visqueux $\mathcal{F}_t^i(\tilde{t}) = -C'_f \rho^i |\tilde{\mathbf{u}}_t^i| \tilde{\mathbf{u}}_t^i / 2$ peut être imposée en ajoutant le terme :

$$\Delta \Gamma_i^{\alpha,in}(\tilde{t}) = -\frac{1}{2\tilde{\theta}^i} C'_f |\tilde{\mathbf{u}}_t^i| V_i^\alpha (\tilde{\mathbf{c}}_\alpha \cdot \mathbf{n}_i) \left(\tilde{g}_\alpha^{eq,i}(\tilde{t}) - \tilde{g}_{\bar{\alpha}}^{eq,i}(\tilde{t}) \right) \quad (2.98)$$

à l'expression initiale (2.97) de $\Gamma_i^{\alpha,in}$. Ainsi, dans PowerFLOW, le modèle de couche limite turbulent est imposé en contrôlant l'effort visqueux à la paroi. Le coefficient de frottement C'_f est calculé à partir de la loi logarithmique (voir 4.1.2).

A partir du calcul du flux rentrant de particules pour chaque facette de la frontière, on peut définir le nombre de particules diffractées par la surface pour chaque nœud fluide situé dans les volumes d'influence des vitesses sortantes $\tilde{\mathbf{c}}_{\alpha}$:

$$Q_{\alpha}(\tilde{\mathbf{x}}_k, \tilde{t}) = \sum_{S_i} \frac{V_i^{\tilde{\alpha}}(\tilde{\mathbf{x}}_k)}{V_i^{\tilde{\alpha}}} \Gamma_i^{\alpha, in}(\tilde{t})$$

Pendant l'étape de propagation (étape 2 de l'algorithme 2.5.2), une fraction $P_{\alpha}(\tilde{\mathbf{x}}_k)$ des particules seront convectées librement du point $\tilde{\mathbf{x}}_k$ au point $\tilde{\mathbf{x}}_k + \tilde{\mathbf{c}}_{\alpha}$. Par définition, on a :

$$P_{\alpha}(\tilde{\mathbf{x}}_k) = 1 - \sum_{S_i} \frac{V_i^{\alpha}(\tilde{\mathbf{x}}_k)}{V(\tilde{\mathbf{x}}_k)}$$

L'autre fraction sera diffractée par les différentes surfaces et redistribuée sur les différentes vitesses discrètes (fonction $Q_{\alpha}(\tilde{\mathbf{x}}_k, \tilde{t})$) de telle sorte que les flux de masse, de quantité de mouvement et d'énergie correspondent aux flux physiques désirés. Ainsi, l'étape de propagation de l'algorithme de la méthode Boltzmann sur Réseau est remplacée par l'opération :

$$\hat{g}_{\alpha}(\tilde{\mathbf{x}}_k + \tilde{\mathbf{c}}_{\alpha}, \tilde{t} + 1) = P_{\alpha}(\tilde{\mathbf{x}}_k) \hat{g}_{\alpha}^{coll}(\tilde{\mathbf{x}}_k, \tilde{t}) + \frac{m}{\rho_0 V(\tilde{\mathbf{x}}_k + \tilde{\mathbf{c}}_{\alpha})} Q_{\alpha}(\tilde{\mathbf{x}}_k + \tilde{\mathbf{c}}_{\alpha}, \tilde{t}) \quad (2.99)$$

On remarque évidemment, que pour un couple nœuds/vitesse situé hors des zones d'influence des différentes facettes (c'est à dire $V_i^{\alpha}(\tilde{\mathbf{x}}_k) = 0$ pour tout i), l'opération précédente se réduit à l'étape de propagation classique de la LBM.

2.7 Validations et études de la précision de la LBM

Malgré son utilisation relativement récente pour les simulations de mécanique des fluides[35], la méthode Boltzmann sur Réseau a fait l'objet de validations assez nombreuses. Seules les études concernant les écoulements isothermes seront abordées dans cette partie. Les modèles de vitesse utilisés ne seront pas systématiquement précisés dans la suite. Les modèles les plus couramment testés sont les modèles $D2Q7$, $D2Q9$, $D3Q15$, $D3Q19$, $D4Q54$ (modèle de PowerFLOW).

Le premier aspect à étudier est la validité des expressions théoriques de la vitesse du son c_s et de la viscosité ν (voir section 2.5). Cela a été réalisé de façon explicite[162, 203, 209], mais généralement, la validité des expressions théoriques est vérifiée de façon implicite dans les simulations en comparant la solution numérique à une solution analytique obtenue en utilisant les valeurs théoriques de la viscosité ou/et de la vitesse du son. Par exemple, la comparaison analytique/simulation de l'amortissement visqueux d'une onde plane acoustique proposée par Buick[25] pour le modèle $D2Q7$ fait intervenir à la fois la valeur de la vitesse du son et des viscosités de cisaillement et de volume pour ce modèle. Etant donné la très bonne corrélation obtenue entre les expressions théoriques et les valeurs numériques mesurées, on considère que les expressions de c_s et ν sont exactes.

Pour une taille de calcul donnée, on a vu (équation (2.84)) que le seul moyen d'obtenir des nombres de Reynolds importants est de faire tendre $\tilde{\tau}_g$ vers $1/2$. Or, pour des temps de relaxation trop proches de $1/2$, la LBM peut devenir numériquement instable pour certains cas de

simulation[124, 197] (voir §3.3). La plupart des études de validation et de précision de la méthode ont donc été réalisées pour des écoulements stationnaires à faible nombre de Reynolds ($Re_L < 10000$).

2.7.1 Écoulements stationnaires ou forcés

Le cas de validation le plus classique est l'écoulement laminaire de Poiseuille[93, 111, 113, 190, 217] en $2D$ et l'écoulement stationnaire dans un conduit $3D$ à section carrée ou circulaire[136, 142]. Le principal intérêt de ce type de simulations est que l'on connaît une solution analytique explicite de l'écoulement. On trouve donc aussi des simulations de l'amortissement d'un tourbillon de Taylor[13, 167], d'une onde de cisaillement[190, 209] ou encore de l'écoulement entraîné par une plaque plane oscillante[190]. Grâce à la connaissance des solutions analytiques, il est possible d'étudier la précision numérique de la méthode[135, 167, 190] et des conditions aux limites associées[142, 190, 217]. On peut par exemple, vérifier que la condition de paroi de type rebond total arrière (voir 2.6.2) est d'ordre 1 et que la modification du point milieu conduit à une méthode d'ordre 2[113]. Mais d'une manière générale, l'étude de la précision de la méthode Boltzmann sur Réseau n'est pas évidente, pour deux raisons.

Tout d'abord, même si elle est appliquée à des écoulements à faible nombre de Mach, cette méthode numérique est intrinsèquement compressible. Or, les expressions analytiques des écoulements simples $2D$ ou $3D$ connus sont solutions des équations de Navier-Stokes incompressibles. Cette différence peut entraîner dans certains cas[167, 190] une erreur dite de compressibilité. Ce problème se rencontre aussi lors de la comparaison d'une simulation de Boltzmann sur Réseau avec une autre méthode numérique purement incompressible[99, 137]. Même, si cela pose un problème pour l'étude de la précision de la méthode, cet effet de compressibilité en $O(M^2)$ ne doit pas être considéré comme une erreur. Une des méthodes pour s'affranchir de ce problème est de construire des méthodes de Boltzmann purement incompressible[89]. Dans la LBM, il existe cependant une erreur de compressibilité réelle[135, 167] : c'est l'erreur associée aux termes non linéaires en $O(M^3)$ qui apparaissent dans les équations de Navier-Stokes à cause de la troncature à l'ordre M^2 de la fonction d'équilibre pour les écoulements isothermes. Ainsi le nombre de Mach[135, 190] doit bien être un des paramètres d'étude de la précision de la méthode. Evidemment, la difficulté réside dans le fait que l'on ne peut en général pas séparer l'effet de compressibilité dû à la différence entre hypothèse incompressible / solution compressible et l'erreur réelle non physique dans la modélisation des équations de Navier-Stokes.

La seconde raison de la difficulté de l'étude de la précision de la méthode Boltzmann sur Réseau est le lien entre les pas d'espace Δx et de temps Δt . Contrairement aux autres méthodes numériques où l'on peut choisir indépendamment, en respectant cependant des critères de stabilité, les pas d'espace et de temps, ces deux paramètres sont étroitement liés dans la LBM (voir 2.5). Ainsi, par exemple, à nombres de Mach et de Reynolds égaux, deux calculs effectués avec un rapport de deux entre les tailles de maille auront également un facteur deux entre les pas de temps. Etant donné la possibilité de l'accumulation des différentes erreurs (arrondi, compressibilité,...) il n'est pas du tout équivalent[167] de comparer ces deux calculs à un nombre de pas de temps fixé ou pour un temps physique fixé. Cependant, pour les cas tests purement stationnaires (écoulement de

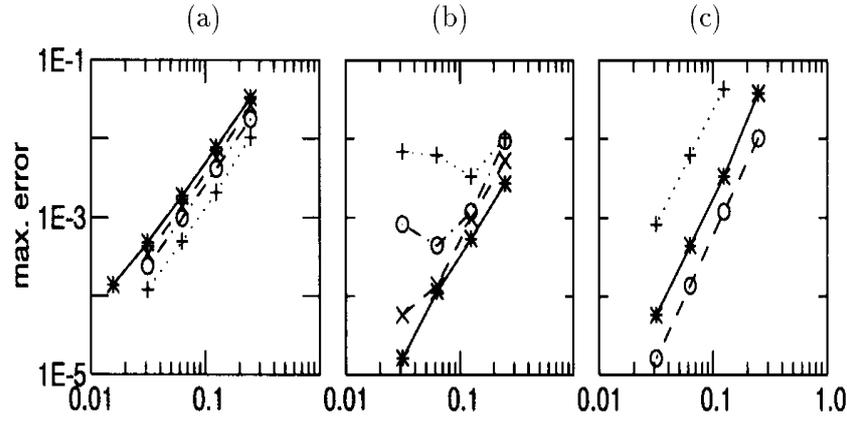


FIG. 2.9 – Etude[135] de l’erreur de la méthode Boltzmann sur Réseau en fonction de $1/\tilde{L}$ pour un écoulement 3D dans un conduit à section carrée de côté L . (a) : Conditions d’entrée et de sortie périodiques. (b) : Conditions de pression en entrée et en sortie, nombre de Mach constant. (c) : Conditions de pression en entrée et en sortie, nombre de Mach diminuant quand \tilde{L} augmente. Les différentes courbes sur les trois graphes représentent différents nombre de Mach. Par exemple sur le graphe (b) : + $M = 0.29$, o $M = 0.15$, x $M = 0.08$, * $M = 0.04$.

Poiseuille, de Couette,...) où l’erreur est mesurée après la convergence du calcul, cette spécificité de la méthode est peu contraignante.

Malgré ces difficultés, les différentes études de la précision de la LBM donnent globalement le même résultat, à savoir que la méthode Boltzmann sur Réseau est d’ordre 2 en espace et en temps[113, 136, 135, 142, 167, 190] ce qui est en accord avec l’erreur obtenue théoriquement (équation (2.75)). Cette relative unanimité cache en fait la multiplicité des résultats que l’on peut obtenir en fonction de la configuration d’étude. Par exemple, Maier[136, 135] met en évidence l’influence du nombre de Mach sur l’évolution de l’erreur en fonction de Δx (voir figure 2.9) pour un écoulement 3D dans un conduit de section carrée. L’erreur de compressibilité peut engendrer, dans certains cas (figure 2.9 (b)), un blocage de la décroissance quadratique de l’erreur. Cet effet de saturation de la précision peut être annulé si le nombre de Mach est réduit en même temps que le pas d’espace : on peut alors obtenir une décroissance de l’erreur supérieure à la décroissance quadratique (figure 2.9 (c)). On remarque aussi (figure 2.9 (a)) que ce phénomène de saturation de l’erreur n’apparaît pas, sur le cas présenté, pour des conditions aux limites périodiques en entrée et en sortie du conduit. Les conditions aux limites influent directement sur la précision du calcul. Par exemple, pour un écoulement de Poiseuille[113] ou un écoulement dans un conduit à section carrée[135], une précision globale d’ordre 1 est obtenue si les conditions aux limites de paroi sont gérées avec la condition de rebond total arrière.

D’autres calculs stationnaires de validation ont été réalisés sur des configurations géométriques un peu plus complexes. On trouve par exemple des simulations de cavités entraînées en 2D[87, 99, 209, 224] et en 3D[142, 209]. Les résultats des simulations LBM sont comparés aux résultats expérimentaux ou numériques obtenus avec les méthodes traditionnelles de discrétisation des équations de Navier-Stokes. De même, on trouve également des simulations bidimensionnelles de

l'écoulement autour d'un profil d'aile[130, 224] pour de faibles nombres de Reynolds.

2.7.2 Écoulements instationnaires et turbulents

Malgré sa nature instationnaire, la méthode Boltzmann sur Réseau a été relativement peu exploitée pour la simulation des écoulements instationnaires et turbulents. Le cas test le plus courant est l'écoulement oscillant (allée de von Kármán) induit par un obstacle cylindrique placé perpendiculairement par rapport à la direction principale de l'écoulement. On trouve par exemple des simulations 2D de l'écoulement derrière un solide de section circulaire[224, 58] ou carrée[13]. Généralement, le nombre de Strouhal correspondant au lâcher des tourbillons obtenu par le calcul est en bon accord avec les résultats expérimentaux.

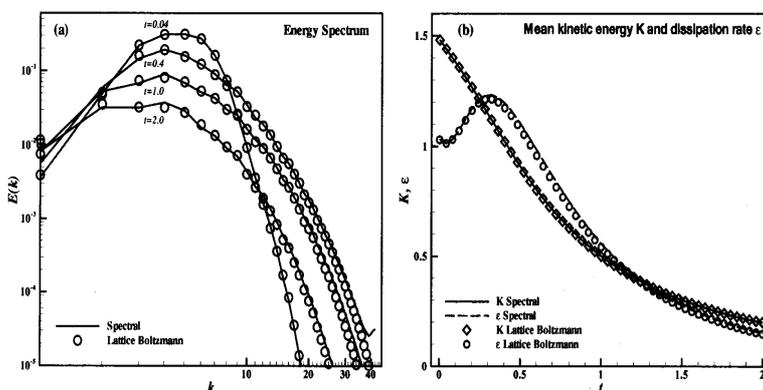


FIG. 2.10 – Comparaison de la méthode Boltzmann sur Réseau et d'une méthode pseudo-spectrale pour la simulation d'un écoulement 3D turbulent homogène et isotrope[133]. (a) : Spectre de l'énergie cinétique en fonction du temps. (b) : Décroissance de l'énergie cinétique moyenne et du taux de dissipation moyen en fonction du temps.

Il existe très peu de cas[191] de simulation d'écoulements turbulents un peu plus complexes avec la méthode Boltzmann sur Réseau. Par contre, des études basées sur les cas tests classiques de la simulation numérique directe de la turbulence ont été proposées. Par exemple, Martínéz *et al.*[137] ont comparé de façon précise la LBM avec une méthode pseudo-spectrale pour la simulation d'une couche de cisaillement libre périodique. La méthode Boltzmann sur Réseau permet de reproduire avec succès les principales caractéristiques de ce type d'écoulement (enroulement tourbillonnaire, appariement des tourbillons,...) et les différentes grandeurs statistiques mesurées sont très proches de celles obtenues par la méthode pseudo-spectrale. Qian *et al.*[163] ont étudié la cascade inverse d'énergie dans une simulation bidimensionnelle de turbulence forcée. Le cas de la décroissance de la turbulence homogène et isotrope a aussi été étudié en 2D[13] et 3D[31, 133]. Les évolutions temporelles de l'énergie cinétique et du taux de dissipation sont comparées aux expressions théoriques[13], ou aux résultats de simulations par des méthodes spectrales[31, 133]. Comme on peut le constater sur la figure 2.10, les résultats sont très satisfaisants. L'effet de la dissipation numérique de la LBM (qui est plus élevée que pour les méthodes pseudo-spectrales) est seulement visible pour les plus grands nombres d'onde.

Comme on le verra dans la suite (§3.2), il est relativement simple d'introduire un modèle de turbulence dans la méthode Boltzmann sur Réseau pour simuler les écoulements à nombre de Reynolds élevé. Les validations de cette approche sont basées généralement sur la simulation d'écoulements turbulents moyens (ou moyennés). Par exemple, Hou *et al.*[98] ont validé leur méthode basée sur l'utilisation du modèle de sous-maille de Smagorinsky en simulant une cavité entraînée $2D$ pour des nombres de Reynolds allant jusqu'à 10^6 . D'autres modèles de turbulence peuvent aussi être utilisés. Par exemple, Teixeira[210] a testé dans le logiciel PowerFLOW le modèle de longueur de mélange ainsi que les modèles $k - \epsilon$ standard et $k - \epsilon$ RNG (voir §4.1.2) sur le cas de la marche descendante $2D$ et pour un conduit $3D$ à section circulaire. Les résultats montrent que c'est le modèle $k - \epsilon$ RNG, associé à une loi de paroi logarithmique qui donne les meilleurs résultats. C'est donc ce modèle qui est utilisé dans PowerFLOW. L'étude de la précision de la simulation de l'écoulement turbulent autour d'un profil d'aile avec le logiciel PowerFLOW a été proposée par Lockard *et al.*[130]. PowerFLOW est comparé au code CFL3D qui est basé sur la discrétisation des équations de Navier-Stokes par la méthode des volumes finis. Il utilise un maillage structuré par blocs et les modèles de turbulence utilisés sont le modèle de Spalart-Allmaras ou le modèle de Wilcox $k - \omega$. Les résultats des coefficients de portance et de traînée, ainsi que les profils de vitesse autour du profil, obtenus avec PowerFLOW sont globalement moins bons que ceux obtenus avec CFL3D. Une des raisons proposées[130] pour expliquer la défaillance de la LBM sur ce type de cas est le maillage trop grossier de la couche limite lié à la contrainte des mailles carrées uniformes (section 2.5).

2.7.3 Propagation acoustique

De façon assez surprenante la nature compressible des calculs LBM est généralement considérée comme un défaut car elle conduit à une "erreur de compressibilité" quand on compare la méthode avec des solutions analytiques ou numériques purement incompressibles. En fait, la nature compressible de la méthode est un avantage très important par rapport aux autres méthodes de CFD. Etant donnée la limitation en nombre de Mach de la LBM, l'intérêt principal de la compressibilité est la prise en compte des phénomènes acoustiques. Cette caractéristique a été très peu étudiée et exploitée. Pourtant, la capacité de la LBM pour simuler la propagation des ondes acoustiques semble assez intéressante. La comparaison calcul/théorie de la propagation d'une onde plane en prenant en compte l'atténuation est très convaincante[25, 46]. Il est aussi possible de modéliser la propagation non-linéaire des ondes acoustiques de forte amplitude[25] (ondes en N).

2.7.4 Discrétisation de l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes

En marge de la méthode Boltzmann sur Réseau, il existe des études sur des méthodes numériques basées sur la discrétisation, par des schémas classiques, de l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes (2.50). Les principaux intérêts de cette approche par rapport à la LBM sont d'une part la possibilité d'utiliser, éventuellement, des schémas plus précis et d'autre part de pouvoir utiliser des maillages non uniformes et non structurés. Par exemple, Reider *et al.*[167] discrétise

l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes par le schéma de différences finies centrées d'ordre 4 pour le terme convectif associé au schéma d'intégration temporelle de Runge-Kutta d'ordre 4. Les autres schémas de différences finies moins précis peuvent aussi être utilisés. A l'aide de la méthode Chapman-Enskog, Sofonea *et al.*[195] déterminent la contribution de l'erreur de discrétisation à la viscosité apparente du fluide pour différents schémas de différences finies (premier ordre, second ordre centré et décentré, Lax-Wendroff, etc...) associés à différents schémas d'intégration temporelle.

Il est aussi possible de résoudre l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes par la méthode des volumes finis[4, 221]. Cette méthode permet de modéliser des configurations géométriques complexes en utilisant un nombre de mailles réduit. En contrepartie, le nombre d'opérations élémentaires effectuées à chaque pas de temps pour chaque élément de maillage est beaucoup plus important que dans la LBM. Par conséquent, seuls les schémas numériques les moins précis peuvent être utilisés si l'on désire obtenir un temps de calcul raisonnable. Cette contrainte est d'ailleurs aussi valable pour les schémas de différences finies. L'exemple[4] de la simulation numérique directe 3D d'un écoulement turbulent dans un conduit de section circulaire pour un nombre de Reynolds 6000 par la méthode de volumes finis d'ordre 2 en espace et d'ordre 1 en temps montre la limitation de cette approche en terme de précision.

2.8 Conclusions

Dans ce chapitre, la méthode Boltzmann sur Réseau a été présentée par deux approches distinctes. Tout d'abord, l'équation de Boltzmann sur Réseau peut être considérée comme une solution explicite de l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes. Cette solution itérative est en fait une fonction de distribution équivalente : le calcul de ses moments donne les mêmes variables macroscopiques que la fonction de distribution qui vérifie l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes. L'autre approche de la LBM est d'interpréter l'équation de Boltzmann sur Réseau comme une forme moyennée de l'équation discrète de la dynamique des particules (équation des Gaz sur Réseau) : la fonction de distribution représente alors un "paquet" de particules se déplaçant à une vitesse donnée pendant l'étape de propagation et qui rentre en collision avec les autres particules durant l'étape de collision. Les deux interprétations sont intéressantes et sont exploitées l'une et l'autre dans l'étude des différents aspects de la méthode numérique. Par exemple, on a vu que l'interprétation particulière est très utilisée pour le développement des conditions aux limites de paroi. Le lien avec l'équation de Boltzmann à vitesse discrète permet quant à lui d'exploiter les développements théoriques réalisés autour de l'équation de Boltzmann (principe de minimisation de l'entropie, conditions aux limites cinétiques,...).

Malgré cette différence d'interprétation, la méthode de construction d'un modèle de Boltzmann sur Réseau repose globalement sur les mêmes principes dans les deux cas et peut se résumer de la façon suivante : la construction d'un modèle de Boltzmann sur Réseau consiste à trouver un réseau de vitesses discrètes associé à une fonction d'équilibre de telle sorte que les équations de Navier-Stokes soient retrouvées par la méthode de développement de Chapman-Enskog. L'étude théorique rigoureuse proposée dans ce chapitre, basée sur le développement en polynômes d'Her-

mite de la fonction d'équilibre de Maxwell, établit les conditions nécessaires que doivent respecter la fonction d'équilibre du modèle et le système de vitesses pour retrouver exactement les équations hydrodynamiques. Qu'ils soient construits à l'aide d'une quadrature de Gauss-Hermite ou par la méthode d'identification, les modèles ne respectent en général pas complètement ces conditions : la fonction d'équilibre a une forme polynomiale de degré trop faible et le réseau de vitesse ne permet pas de calculer les moments de la fonction d'équilibre à des ordres suffisamment élevés. Cette limitation conduit à des termes non physiques dans les expressions du tenseur des efforts visqueux et du flux de chaleur. Ces erreurs sont cependant négligeables pour des écoulements à faible nombre de Mach. La limitation en nombre de Mach de la méthode est aussi liée à des problèmes de stabilité numérique de la méthode. En effet, l'équation de Boltzmann sur Réseau, dans sa forme classique, ne possède pas de théorème H global (principe de maximisation de l'entropie). Cela est en particulier dû à la forme polynomiale de la fonction d'équilibre qui, contrairement à l'expression exponentielle de Maxwell, n'assure pas la positivité systématique des fonctions de distribution. Cependant, étant donné qu'il est bien identifié, ce problème de stabilité numérique est assez facile à contrôler.

En terme de simulation numérique, la LBM est un schéma numérique très simple à programmer, totalement explicite et basé sur des opérations locales entre les nœuds. Ce schéma est particulièrement bien adapté au calcul parallèle. En comparaison avec la simplicité du schéma, la précision des résultats obtenus est très bonne. Cependant, pour les calculs d'aérodynamique, cette méthode est encore très peu utilisée. Cela provient certainement, en partie, de la limitation en nombre de Mach qui réduit le champ d'application de la LBM. D'autre part, pour les écoulements à nombre de Reynolds élevé, la LBM n'apporte pas d'avantages particuliers pour la modélisation de la turbulence par rapport aux méthodes traditionnelles. Par contre, une caractéristique intéressante de la LBM est la nature compressible du schéma. Cette spécificité, associée à son caractère instationnaire, rend la méthode Boltzmann sur Réseau particulièrement attractive pour les simulations en aéroacoustique.

Chapitre 3

La méthode Boltzmann sur Réseau pour la simulation en aéroacoustique

L'objectif de ce chapitre est d'étudier plus spécifiquement la méthode Boltzmann sur Réseau pour les simulations en aéroacoustique. Pour obtenir un meilleur contrôle des tests numériques et pour pouvoir intégrer des modèles spécifiques aux calculs aéroacoustiques, j'ai développé un code LBM bidimensionnel. Ce code est basé sur le modèle isotherme $D2Q9$. Ce modèle peut être considéré comme une projection du modèle $D3Q27$. Tous les calculs présentés dans ce chapitre ont été réalisés avec ce code. Dans le chapitre suivant (chapitre 4), les simulations sont réalisées avec le code commercial PowerFLOW.

Le code LBM est programmé en Fortran 90 et les calculs sont effectués sur une station de travail SGI muni d'un processeur R12000 cadencé à 300 MHz. Le codage des réels se fait par défaut en simple précision, et en double précision quand cela est indiqué.

3.1 Etude préliminaire

3.1.1 Rappel du modèle $D2Q9$

La LBM consiste à calculer de façon itérative l'équation suivante (équation (2.61)) :

$$\hat{g}_\alpha(\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{c}}_\alpha, \tilde{t} + 1) - \hat{g}_\alpha(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) = -\frac{1}{\tilde{\tau}_g} (\hat{g}_\alpha(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) - \hat{g}_\alpha^{eq}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t})) \quad (3.1)$$

Les variables macroscopiques sont calculées à chaque itération par :

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \sum_\alpha \hat{g}_\alpha \\ \hat{\rho} \tilde{\mathbf{u}} &= \sum_\alpha \tilde{\mathbf{c}}_\alpha \hat{g}_\alpha \end{aligned}$$

La fonction d'équilibre du modèle $D2Q9$ est (équation (2.57)) :

$$\hat{g}_\alpha^{eq} = \hat{\rho} \omega_\alpha \left(1 + \frac{\tilde{c}_{\alpha,i} \tilde{u}_i}{\tilde{c}_s^2} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_j (\tilde{c}_{\alpha,i} \tilde{c}_{\alpha,j} - \tilde{c}_s^2 \delta_{ij})}{2\tilde{c}_s^4} \right) \quad (3.2)$$

Les vitesses discrètes et les poids de la fonction d'équilibre sont :

$$\begin{aligned} \alpha = 0 & : \quad \tilde{\mathbf{c}}_\alpha = (0, 0) \quad \text{et} \quad \omega_\alpha = \frac{4}{9} \\ \alpha = 1, 2, 3, 4 & : \quad \tilde{\mathbf{c}}_\alpha = (\sin((\alpha - 1)\pi/2), \cos((\alpha - 1)\pi/2)) \quad \text{et} \quad \omega_\alpha = \frac{1}{9} \\ \alpha = 5, 6, 7, 8 & : \quad \tilde{\mathbf{c}}_\alpha = \sqrt{2}(\sin((2\alpha - 1)\pi/4), \cos((2\alpha - 1)\pi/4)) \quad \text{et} \quad \omega_\alpha = \frac{1}{36} \end{aligned}$$

Ce modèle permet de modéliser un écoulement isotherme d'un fluide visqueux compressible qui vérifie à $O(M^3)$ près les équations de Navier-Stokes compressibles. La vitesse du son c_s , la viscosité dynamique μ et le second coefficient de viscosité η de ce fluide sont :

$$c_s = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \mu = \frac{\rho}{3} \left(\tilde{\tau}_g - \frac{1}{2} \right) \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \quad \eta = \frac{2}{3} \mu$$

où Δt et Δx sont les pas de temps et d'espace. Pour les exemples numériques, le maillage utilisé sera toujours un maillage uniforme. Le fluide modélisé sera de l'air avec $c_s = 340$ m/s et $\nu = 1.5 \times 10^{-5}$ m²/s.

3.1.2 Lien entre l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes et l'équation de Boltzmann sur Réseau

On a vu dans le paragraphe 2.3 que l'équation de Boltzmann sur Réseau peut s'interpréter comme une solution explicite équivalente de l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes obtenue par intégration et changement de variable. Cette approche va à l'encontre de l'idée communément admise selon laquelle la LBE est une forme discrétisée au premier ordre de la DVBE. La précision au second ordre de la LBE étant alors montrée grâce au développement de Chapman-Enskog dans le domaine physique discret (paragraphe 2.4.2) : les termes d'ordre 2 du développement de Taylor du schéma de discrétisation peuvent être inclus dans la viscosité physique du fluide.

On se propose ici de montrer la validité de la première approche. En effet, on peut comparer les solutions numériques obtenues en résolvant, sur un même cas, à la fois l'équation de Boltzmann sur Réseau (3.1) et l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes (2.50) rappelée ici :

$$\frac{\partial \hat{f}_\alpha}{\partial \hat{t}} + \tilde{c}_{\alpha,i} \frac{\partial \hat{f}_\alpha}{\partial \hat{x}_i} = -\frac{1}{\tilde{\tau}} (\hat{f}_\alpha - \hat{f}_\alpha^{eq}) \quad (3.3)$$

où $\hat{f}_\alpha^{eq} = \hat{g}_\alpha^{eq}$. Cette équation peut être calculée, par exemple, par différences finies. Il sera alors possible de comparer non seulement les solutions de l'écoulement obtenues avec les deux équations mais surtout, on pourra vérifier le lien entre les fonctions de distribution \hat{f}_α et \hat{g}_α .

Pour éviter des discussions sur une éventuelle erreur commise dans le calcul de \hat{f}_α , un schéma assez précis de discrétisation est utilisé pour la résolution de la DVBE. La dérivée spatiale est calculée par un schéma aux différences finies centré d'ordre 4. L'intégration temporelle est réalisée avec un schéma de Runge-Kutta[112] d'ordre 4. L'algorithme de résolution de l'équation (3.3) est

donc :

$$\begin{cases} \hat{f}_\alpha^0 = \hat{f}_\alpha(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) \\ \hat{f}_\alpha^k = \hat{f}_\alpha^0 + a_k \left(\Omega^{k-1} - \tilde{c}_{\alpha,i} D_i^4 [\hat{f}_\alpha^{k-1}] \right) \text{ pour } k = 1, \dots, 4 \\ \hat{f}_\alpha(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t} + 1) = \hat{f}_\alpha^4 \end{cases}$$

où $\Omega^k = -(\hat{f}_\alpha^k - \hat{f}_\alpha^{eq,k})/\tilde{\tau}$, D_i^4 représente le schéma aux différences finies centré d'ordre 4 et a_k sont les coefficients du schéma de Runge-Kutta. Le domaine de calcul est de dimension $N_1 \times N_2 = 100 \times 100$. Des conditions aux limites périodiques sont imposées dans les quatre directions mais dans les calculs présentés, les perturbations n'atteignent jamais les frontières. Deux types d'écoulement sont simulés : la propagation d'une impulsion Gaussienne de pression dans un écoulement uniforme et la convection d'un tourbillon par un écoulement uniforme. Pour les deux cas tests, le nombre de Mach est $M = U_0/c_s = 0.1$. L'impulsion de pression est initialisée au centre du domaine de calcul $(\tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0) = (50, 50)$ par :

$$\begin{cases} \hat{\rho} = 1 + a_P \exp \left[-\frac{\ln 2}{b_P} \left((\tilde{x}_1 - \tilde{x}_1^0)^2 + (\tilde{x}_2 - \tilde{x}_2^0)^2 \right) \right] \\ \tilde{u}_1 = U_0 \\ \tilde{u}_2 = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

avec $a_P = 0.03$ et $b_P = 5$. Le tourbillon est défini par :

$$\begin{cases} \hat{\rho} = 1 \\ \tilde{u}_1 = \tilde{U}_0 + a_T \tilde{U}_0 (\tilde{x}_2 - \tilde{x}_2^0) \exp \left[-\frac{\ln 2}{b_T} \left((\tilde{x}_1 - \tilde{x}_1^0)^2 + (\tilde{x}_2 - \tilde{x}_2^0)^2 \right) \right] \\ \tilde{u}_2 = -a_T \tilde{U}_0 (\tilde{x}_1 - \tilde{x}_1^0) \exp \left[-\frac{\ln 2}{b_T} \left((\tilde{x}_1 - \tilde{x}_1^0)^2 + (\tilde{x}_2 - \tilde{x}_2^0)^2 \right) \right] \end{cases} \quad (3.5)$$

avec $a_T = 0.5$ et $b_T = 25$.

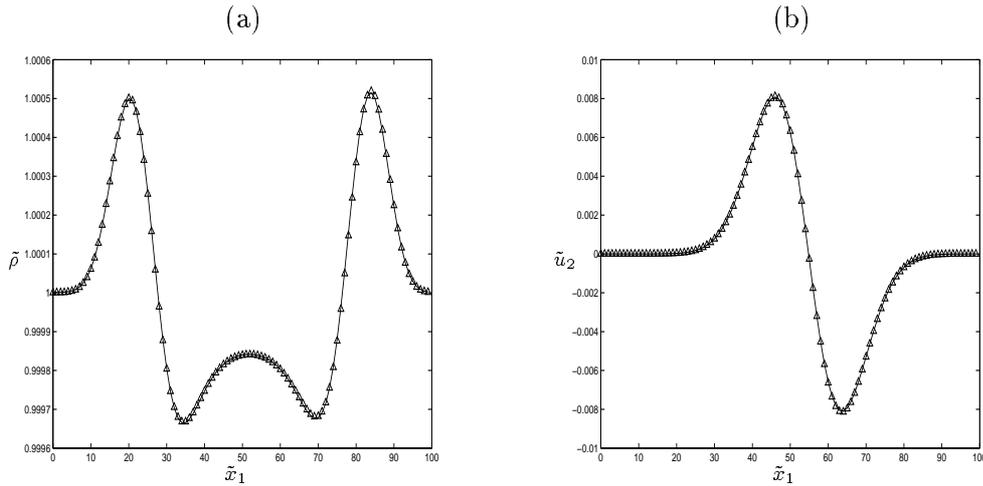


FIG. 3.1 – (a) Impulsion de pression. Profil de densité à $\tilde{t} = 50$ le long de la ligne $\tilde{x}_2 = \tilde{x}_2^0$: — Calcul LBM; \triangle Calcul DVBE. (b) Tourbillon convecté. Profil de vitesse \tilde{u}_2 à $\tilde{t} = 100$ le long de la ligne $\tilde{x}_2 = \tilde{x}_2^0$: — Calcul LBM; \triangle Calcul DVBE.

La résolution de l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes se fait avec les mêmes pas de temps et d'espace que ceux utilisés pour la résolution de l'équation de Boltzmann sur Réseau. Ainsi le nombre CFL est $c_{\alpha,i}\Delta t/\Delta x = 1$. La limite CFL de stabilité du schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 associé au schéma de différences finies d'ordre 4 est de 2.06[127]. Le schéma est donc a priori stable. Cependant, nos premières simulations ont montré que ce schéma n'est pas stable pour des valeurs trop faibles de $\tilde{\tau}$. Cette constatation avait déjà été faite par Reider & Sterling[167]. Dans la configuration étudiée, la valeur limite de $\tilde{\tau}$ se situe aux alentours de 0.8. Ainsi, le pas de temps ne peut être, au mieux, que légèrement supérieur au temps de relaxation du fluide. Cette condition est liée à l'hypothèse de faible variation de la fonction de distribution autour de sa valeur d'équilibre. Cette condition ne peut pas être maintenue entre deux itérations si le pas de temps est trop grand par rapport au temps de relaxation.

Pour cette étude, le temps de relaxation est fixé à $\tilde{\tau} = 0.93$. Le temps de relaxation pour l'équation de Boltzmann sur Réseau est donc égal à $\tilde{\tau}_g = 0.93 + 0.5 = 1.43$. Pour les deux cas de simulation, on peut vérifier immédiatement que la solution obtenue par les deux méthodes est bien la même. Par exemple, la figure 3.1 permet de comparer les deux résultats à partir des profils des variables macroscopiques dans le domaine de calcul.

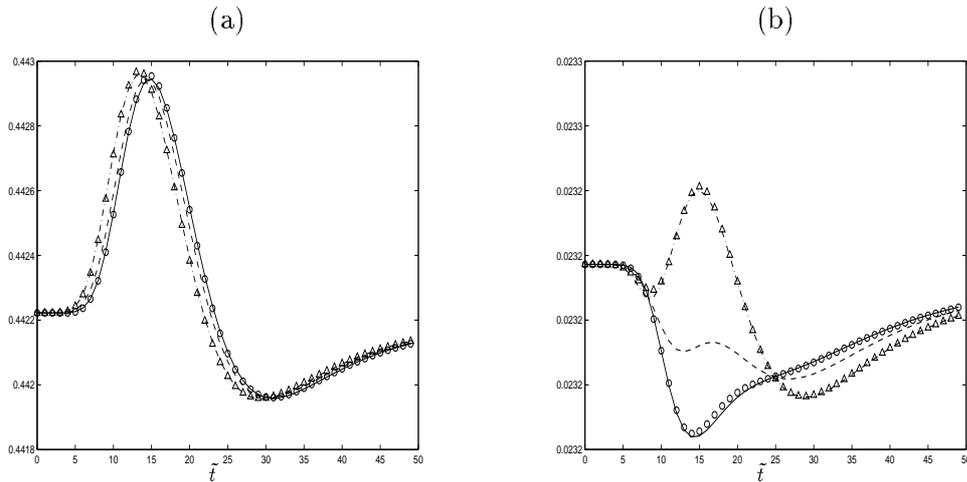


FIG. 3.2 – Evolutions temporelles des fonctions de distribution au point $(\tilde{x}_1^0 + 10, \tilde{x}_2^0 + 5)$ pour l'impulsion de pression : (a) $\alpha=0$, (b) $\alpha=6$. — \hat{g}_α ; - · - · \hat{g}_α^{eq} ; - - - \hat{f}_α ; Δ \hat{f}_α^{eq} ; \circ \hat{d}_α .

A partir des fonctions de distribution obtenues par résolution de la DVBE, on calcule les fonctions \hat{d}_α définies par $\hat{d}_\alpha = \hat{f}_\alpha + (\hat{f}_\alpha - \hat{f}_\alpha^{eq})/2\tilde{\tau}$. Ces fonctions \hat{d}_α sont alors comparées à \hat{g}_α . Par exemple, la figure 3.2 compare l'évolution temporelle de \hat{g}_0 et \hat{d}_0 (figure 3.2 (a)) et de \hat{g}_6 et \hat{d}_6 (figure 3.2 (b)). Les fonctions d'équilibre \hat{f}_α^{eq} et \hat{g}_α^{eq} sont aussi représentées. Bien entendu, étant donné que l'évolution des variables macroscopiques est identique pour les deux simulations, les fonctions d'équilibre sont confondues. Par contre, \hat{f}_α et \hat{g}_α ne sont pas du tout superposées. Il faut effectuer le changement de variable $\hat{f}_\alpha \rightarrow \hat{d}_\alpha$ pour retrouver les fonctions de distribution calculées par la LBE. Le test numérique effectué sur le cas du tourbillon convecté (figures 3.3 (a) et (b)) confirme bien l'égalité $\hat{g}_\alpha = \hat{d}_\alpha$. Les figures 3.4 (a) et (b) montrent les résultats des mêmes calculs obtenus avec le schéma aux différences finies centré d'ordre 6 associé à l'intégration de Runge-

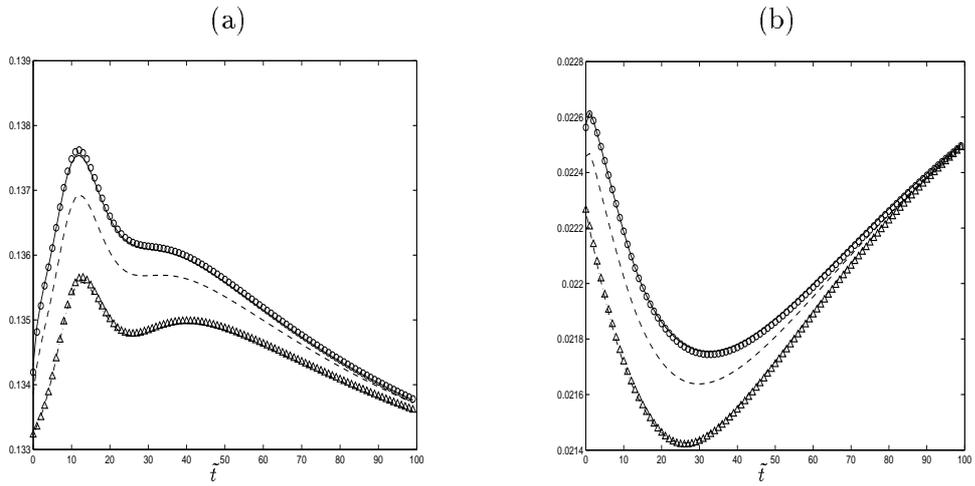


FIG. 3.3 – Evolutions temporelles des fonctions de distribution au point $(\tilde{x}_1^0+10, \tilde{x}_2^0+5)$ pour le tourbillon convecté: (a) $\alpha=1$, (b) $\alpha=6$. Mêmes notations que dans la figure 3.2.

Kutta d'ordre 5. Les résultats sont identiques à ceux obtenus avec le schéma de discrétisation moins précis.

Cette étude confirme donc la relation entre les fonctions de distribution calculées par la LBE et les fonctions de distribution de la DVBE :

$$\hat{g}_\alpha = \hat{f}_\alpha + \frac{1}{2\tilde{\tau}} (\hat{f}_\alpha - \hat{f}_\alpha^{eq})$$

avec $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_g - 1/2$.

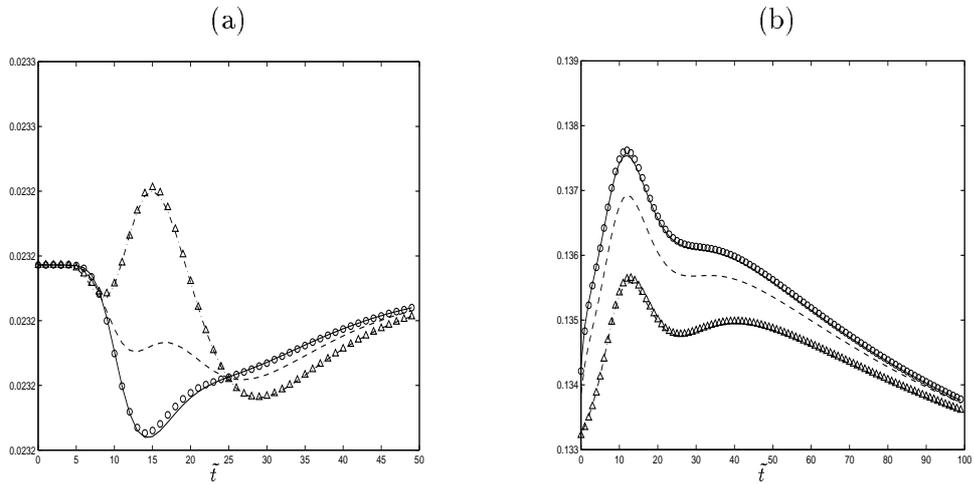


FIG. 3.4 – Evolutions temporelles des fonctions de distribution au point $(\tilde{x}_1^0+10, \tilde{x}_2^0+5)$ pour (a) l'impulsion de pression ($\alpha=6$) et (b) le tourbillon convecté ($\alpha=1$). Résolution de la DVBE par le schéma aux différences finies d'ordre 6 associé au schéma de Runge-Kutta d'ordre 5. Mêmes notations que dans la figure 3.2.

3.2 Modélisation de la turbulence

Comme toutes les méthodes numériques basées sur une représentation discrète de l'espace et du temps, la LBM ne permet pas de résoudre explicitement toutes les échelles de la turbulence pour les écoulements à nombre de Reynolds élevé. De façon classique, étant donné que l'on ne peut pas calculer directement les petites structures turbulentes, on va se contenter de prendre en compte uniquement l'effet des fluctuations turbulentes non calculées sur l'écoulement moyen et sur les grandes échelles résolues de la turbulence.

3.2.1 Modèles du type $k - \epsilon$

Pour étudier l'influence des petites échelles non calculées, on peut imaginer que les grandes structures évoluent dans un milieu plus ou moins homogène constitué par l'ensemble des petits tourbillons. En adoptant une approche similaire à la théorie cinétique des gaz, on peut assimiler ces petites structures tourbillonnaires à des particules de fluide. Or, on a vu dans le paragraphe 2.1 que les caractéristiques intrinsèques du fluide sont contenues uniquement dans l'opérateur de collision. En particulier l'opérateur BGK définit un fluide Newtonien dont les coefficients de transport sont directement proportionnels au temps de relaxation. On peut donc aussi modéliser les petites échelles de la turbulence en exprimant les coefficients de transport associés aux particules fictives tourbillonnaires. De la même façon que la température représente l'énergie d'agitation des molécules de gaz centrée autour de l'écoulement macroscopique, l'énergie cinétique turbulente $k = \overline{|\mathbf{u}'|^2}/2$ peut être interprétée comme la température associée à l'agitation des petits tourbillons. Cette agitation entraîne un retour progressif à l'équilibre des grosses structures avec un temps caractéristique noté τ_T . On peut donc naturellement définir une viscosité turbulente $\nu_T = k\tau_T$. Ainsi, pour intégrer l'effet des fluctuations de sous-maille non calculées dans la méthode Boltzmann sur Réseau, il suffit d'ajouter au temps de relaxation moléculaire τ un temps de relaxation tourbillonnaire τ_T : $\tau^e = \tau + \tau_T$. Evidemment, la difficulté réside alors dans le calcul de τ_T .

Ce calcul se fait par l'intermédiaire de la viscosité turbulente. Par exemple, pour la turbulence homogène isotrope dans un écoulement à nombre de Reynolds élevé, le temps caractéristique du retour à l'équilibre des grosses structures (décroissance énergétique) est proportionnel à k/ϵ ($\tau_T = C_\mu k/\epsilon$) où ϵ est le taux moyen de dissipation turbulente. On obtient donc la relation :

$$\nu_T = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (3.6)$$

Les valeurs de k et ϵ sont calculés à l'aide de leur équation de transport respective obtenue par des recalages expérimentaux associés à des analyses phénoménologiques ou par des techniques de renormalisation[223]. Les autres modèles de fermeture à deux équations peuvent aussi être utilisés pour le calcul de ν_T . Tous ces modèles sont basés sur la formule de Prandtl : $\nu_T = C_\mu l \sqrt{k}$, où l est une longueur caractéristique de la turbulence qui est reliée au temps de relaxation turbulente par $l = \tau_T \sqrt{k}$. La longueur l est alors obtenue à partir du calcul d'une autre variable de l'écoulement (par exemple une fréquence caractéristique $\omega = \sqrt{k}/l$ dans le cas du modèle $k - \omega$ de Wilcox). Pour des écoulements faisant apparaître des facteurs importants d'anisotropie (fort cisaillement,

vorticité,...), le temps de relaxation peut inclure l'influence des différentes échelles de temps caractéristiques des grosses structures (tenseur des taux de déformation S_{ij} , hélicité H_e ,...). On obtient ainsi un modèle dynamique $\tau_T = C_\mu(S_{ij}, H_e, \dots)k/\epsilon$.

Au final, cette approche pour la modélisation de la turbulence, appliquée par exemple dans le logiciel PowerFLOW, est équivalente aux modélisations de la turbulence utilisées dans les méthodes numériques classiques de mécanique des fluides. Cependant, en se basant sur la technique de renormalisation, Yakhot *et al.*[222] expliquent que, pour les écoulements fortement anisotropes, l'intégration du modèle de turbulence via le temps de relaxation est plus rigoureuse sur le plan théorique que la modification simple de la viscosité effective dans les équations de Navier-Stokes.

Sur le plan théorique, on peut noter aussi que le temps de décroissance de la turbulence homogène isotrope k/ϵ caractérise le temps de dissipation des structures énergétiques de l'écoulement, c'est-à-dire les plus grosses structures turbulentes. Ainsi, la contribution la plus importante à l'énergie cinétique turbulente totale k est celle des grandes échelles de la turbulence. Cette approche ne permet donc pas de modéliser uniquement les structures turbulentes de taille inférieure à la taille des mailles locales. Au contraire, la viscosité turbulente définie par la relation (3.6) est un coefficient de transport qui prend en compte la totalité du spectre de la turbulence. Pour les autres modèles de calcul de ν_T , l'analyse est la même puisque la longueur l est une échelle caractéristique des tourbillons porteurs de l'énergie turbulente. Cette approche ne semble donc pas valable si l'on veut modéliser uniquement les fluctuations turbulentes de sous-maille. Ces modèles ont d'ailleurs été développés initialement pour la modélisation de la turbulence dans des calculs stationnaires. Quand on applique ces modèles pour le calcul d'un écoulement instationnaire, la taille minimale des structures turbulentes que l'on peut calculer est généralement très supérieure à la taille que l'on aurait pu espérer obtenir avec le maillage utilisé. Mis à part les limitations dues à la dissipation numérique du schéma, ce phénomène est directement lié au fait que la viscosité turbulente est surestimée par le modèle : la valeur de ν_T intègre l'influence de fluctuations turbulentes qui auraient pu être supportées par le maillage. Même si l'on peut essayer d'optimiser ce type de modèle pour les calculs instationnaires, en diminuant par exemple la constante C_μ [9, 120], la limitation en fréquence de ce type d'approche semble donc rédhibitoire. Récemment, une technique de réduction de la viscosité turbulente a été proposée[10] dans laquelle la constante C_μ est multipliée par un coefficient (inférieur à 1) qui dépend de la taille locale de la maille. Cette technique se rapproche donc d'une approche de modélisation de type LES.

En effet, pour augmenter la fréquence maximale des tourbillons calculés et limiter la modélisation de la turbulence aux seules structures turbulentes dont la taille est inférieure à la taille des mailles, les modèles utilisés pour la simulation des grandes échelles (LES) semblent plus adaptés.

3.2.2 Simulation des grandes échelles

La méthode de simulation des grandes échelles est basée sur un filtrage spatial des équations de transport. Pour un domaine de calcul \mathcal{D} , on peut obtenir ce filtrage à l'aide de la convolution des variables physiques avec une fonction filtre $G_\Delta(\mathbf{x})$, où Δ est la largeur du filtre. Ainsi, pour

toutes variables v , on définit le filtrage :

$$\langle v \rangle (\mathbf{x}, t) = \int_{\mathcal{D}} v (\mathbf{y}, t) G_{\Delta} (\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) d\mathbf{y}$$

En appliquant cette opération de filtrage à l'équation de Boltzmann sur Réseau (3.1) (on pourrait également faire la même analyse avec l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes), on obtient :

$$\langle \hat{g}_{\alpha} \rangle (\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{c}}_{\alpha}, \tilde{t} + 1) - \langle \hat{g}_{\alpha} \rangle (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) = -\frac{1}{\tilde{\tau}_g} (\langle \hat{g}_{\alpha} \rangle (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) - \langle \hat{g}_{\alpha}^{eq} \rangle (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}))$$

Pour plus de simplicité, on se placera dans l'hypothèse d'incompressibilité de l'écoulement, c'est-à-dire $\rho \approx \rho_0$. La fonction d'équilibre filtrée s'écrit donc :

$$\langle \hat{g}_{\alpha}^{eq} \rangle = \underbrace{\hat{\rho} \omega_{\alpha} \left(1 + \frac{\tilde{c}_{\alpha,i} \langle \tilde{u}_i \rangle}{\tilde{c}_s^2} + \frac{\langle \tilde{u}_i \rangle \langle \tilde{u}_j \rangle (\tilde{c}_{\alpha,i} \tilde{c}_{\alpha,j} - \tilde{c}_s^2 \delta_{ij})}{2\tilde{c}_s^4} \right)}_{\hat{g}_{\alpha}^{(eq)}} - \underbrace{\hat{\rho} \omega_{\alpha} \frac{\tilde{c}_{\alpha,i} \tilde{c}_{\alpha,j} - \tilde{c}_s^2 \delta_{ij}}{2\tilde{c}_s^4} M_{ij}}_{\epsilon \hat{h}_{\alpha}^{(neq)}}$$

avec :

$$M_{ij} = \langle \tilde{u}_i \rangle \langle \tilde{u}_j \rangle - \langle \tilde{u}_i \tilde{u}_j \rangle = \underbrace{M_{ij} - \frac{1}{D} M_{kk} \delta_{ij}}_{T_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{D} M_{kk} \delta_{ij}}_{D_{ij}}$$

Le problème de la modélisation de la turbulence de sous-maille consiste donc à exprimer le terme M_{ij} en fonction des variables calculées. Généralement, le terme diagonal D_{ij} est supposé nul dans l'hypothèse d'un écoulement à faible nombre de Mach. L'hypothèse la plus classique pour exprimer T_{ij} est de considérer que le tenseur des contraintes de sous-maille est proportionnel au tenseur des taux de déformation du champ filtré :

$$T_{ij} = \tilde{\nu}_T \left(2\langle \tilde{S}_{ij} \rangle - \frac{2}{D} \langle \tilde{S}_{kk} \rangle \delta_{ij} \right)$$

Le facteur de proportionnalité est la viscosité turbulente ν_T qui peut être calculée, par exemple, à l'aide du modèle de Smagorinsky[194] :

$$\tilde{\nu}_T = \left(C_s \tilde{\Delta} \right)^2 |\langle \tilde{S} \rangle|$$

avec :

$$|\langle \tilde{S} \rangle| = \sqrt{2\langle \tilde{S}_{ij} \rangle \langle \tilde{S}_{ij} \rangle} \quad (3.7)$$

La modélisation de la turbulence par cette approche revient donc à résoudre l'équation de Boltzmann sur Réseau pour les variables filtrées munie d'une fonction d'équilibre modifiée[52] :

$$\langle \hat{g}_{\alpha}^{eq} \rangle = \hat{g}_{\alpha}^{(eq)} + \epsilon \hat{h}_{\alpha}^{(neq)}$$

avec, après simplification :

$$\epsilon \hat{h}_{\alpha}^{(neq)} = \hat{\rho} \omega_{\alpha} \tilde{\nu}_T \frac{\tilde{c}_{\alpha,i} \tilde{c}_{\alpha,j}}{\tilde{c}_s^4} \left(\langle \tilde{S}_{ij} \rangle - \frac{1}{D} \langle \tilde{S}_{kk} \rangle \delta_{ij} \right)$$

La fonction d'équilibre filtrée intègre donc un terme modélisant le transport et la dissipation de la composante hors équilibre (c'est-à-dire les gradients de vitesse pour un écoulement isotherme

incompressible) de l'écoulement filtré par les fluctuations de sous-maille. Ce terme en $O(\epsilon)$ a pour effet de rajouter une viscosité turbulente à la viscosité moléculaire. On pourrait vérifier cela en appliquant le développement de Chapman-Enskog avec la nouvelle fonction d'équilibre. La viscosité effective du fluide simulé est donc : $\tilde{\nu}^e = \tilde{\nu} + \tilde{\nu}_T$. Ainsi, de la même façon que pour les modélisations de type $k - \epsilon$, l'autre idée naturelle[98] pour intégrer le modèle de sous-maille est de modifier simplement le temps de relaxation du système. On obtient alors :

$$\tilde{\nu}^e = \tilde{\nu} + \tilde{\nu}_T = \hat{\theta} \left(\tilde{\tau}_g - \frac{1}{2} + \tilde{\tau}_T \right)$$

En posant $\tilde{\tau}_g^e = \tilde{\tau}_g + \tilde{\tau}_T$, il vient :

$$\tilde{\tau}_g^e = \frac{1}{\hat{\theta}} (\tilde{\nu} + \tilde{\nu}_T) + \frac{1}{2}$$

Dans la première approche pour intégrer le modèle de sous-maille, $\langle \tilde{S}_{ij} \rangle$ et $|\langle \tilde{S} \rangle|$ doivent être calculés. Dans la seconde, seul le calcul de $|\langle \tilde{S} \rangle|$ est nécessaire.

Pour simplifier les écritures, les variables filtrées seront notées sans les $\langle \cdot \rangle$.

3.2.3 Calcul du taux de déformation

Hou *et al.*[98] ont proposé une méthode originale de calcul de $|\tilde{S}|$ sans avoir recours à l'évaluation de dérivées spatiales. En effet, on a vu (équation (2.30) ou (2.75)) que le tenseur des contraintes visqueuses s'exprime sous la forme :

$$\tilde{\tau}_{ij} = - \sum_{\alpha} \tilde{c}_{\alpha,i} \tilde{c}_{\alpha,j} \hat{f}_{\alpha}^{neq} = - \sum_{\alpha} \tilde{c}_{\alpha,i} \tilde{c}_{\alpha,j} \left(1 - \frac{1}{2\tilde{\tau}_g^e} \right) \hat{g}_{\alpha}^{neq} \quad (3.8)$$

avec $\hat{f}_{\alpha}^{neq} = \hat{f}_{\alpha} - \hat{f}_{\alpha}^{eq}$ et $\hat{g}_{\alpha}^{neq} = \hat{g}_{\alpha} - \hat{g}_{\alpha}^{eq}$. Pour un modèle isotherme, et en négligeant les termes en $O(M^3)$, ce tenseur vaut :

$$\tilde{\tau}_{ij} = 2\tilde{\mu}^e \tilde{S}_{ij}$$

Si l'on veut calculer $|\tilde{S}|$ à partir des fonctions de distribution de l'équation de Boltzmann sur Réseau, on pose $Q_g = \mathcal{G}_{ij} \mathcal{G}_{ij}$ avec :

$$\mathcal{G}_{ij} = \sum_{\alpha} \tilde{c}_{\alpha,i} \tilde{c}_{\alpha,j} \hat{g}_{\alpha}^{neq}$$

On a ainsi la relation :

$$\left(1 - \frac{1}{2\tilde{\tau}_g^e} \right) \sqrt{Q_g} = \tilde{\mu}^e \sqrt{2} |\tilde{S}|$$

En remplaçant dans cette expression $\tilde{\tau}_g^e$ et $\tilde{\mu}^e$ en fonction de $\tilde{\nu}$ et $\tilde{\nu}_T = (C_s \Delta)^2 |\tilde{S}|$, on obtient un polynôme du second degré en $|\tilde{S}|$ dont la seule racine positive est :

$$|\tilde{S}| = \frac{1}{4(C_s \tilde{\Delta})^2} \left[- (2\tilde{\nu} + \hat{\theta}) + \sqrt{(2\tilde{\nu} + \hat{\theta})^2 + \frac{8(C_s \tilde{\Delta})^2 \sqrt{2Q_g}}{\hat{\rho}}} \right] \quad (3.9)$$

Cette équation est différente de celle proposée initialement par Hou *et al.*[98]. En effet, dans leur calcul, ils n'ont pas tenu compte du fait que les fonctions \hat{g}_{α} ne sont pas les fonctions de distribution

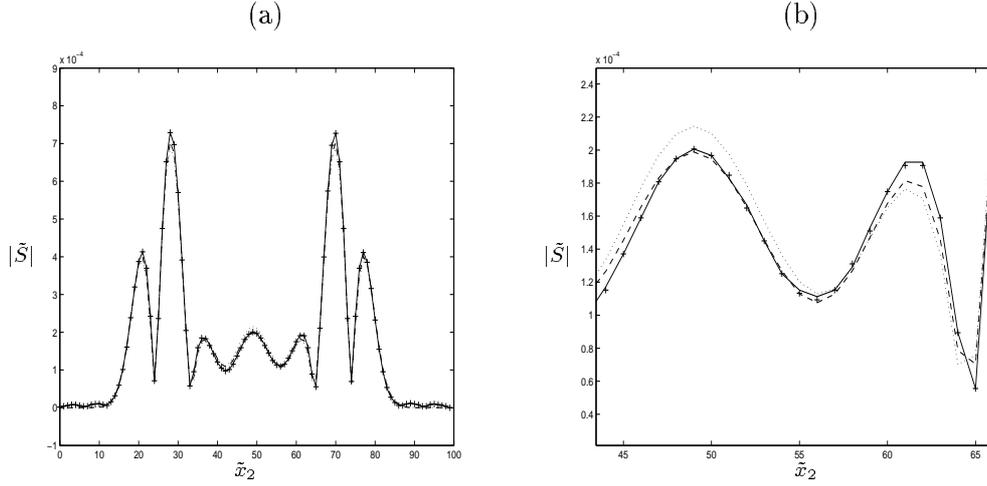


FIG. 3.5 – *Comparison du calcul du taux de déformation $|\tilde{S}|$ par : ——— équation (3.9); + équation (3.10); ····· définition (3.7) et différences finies d'ordre 2; - - - définition (3.7) et différences finies d'ordre 4. (b) zoom d'une partie du graphe (a).*

de l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes. Pour évaluer le tenseur des contraintes visqueuses, le terme $1 - 1/2\tilde{\tau}_g^e$ doit être intégré (équation (3.8)). Bien entendu, il est aussi possible de calculer $|\tilde{S}|$ à partir des \hat{f}_α . Pour cela, on pose $Q_f = \mathcal{F}_{ij}\mathcal{F}_{ij}$ avec :

$$\mathcal{F}_{ij} = \sum_{\alpha} \tilde{c}_{\alpha,i} \tilde{c}_{\alpha,j} \hat{f}_{\alpha}^{n,eq}$$

On a donc la relation $\sqrt{Q_f} = \tilde{\mu}^e \sqrt{2} |\tilde{S}|$ et on obtient :

$$|\tilde{S}| = \frac{1}{2(C_s \tilde{\Delta})^2} \left[-\tilde{\nu} + \sqrt{\tilde{\nu}^2 + \frac{4(C_s \tilde{\Delta})^2 \sqrt{Q_f/2}}{\hat{\rho}}} \right] \quad (3.10)$$

On peut vérifier la validité de ces expressions en comparant la valeur de $|\tilde{S}|$ obtenue par l'équation (3.9) ou (3.10) et sa valeur obtenue en calculant directement les dérivées de la vitesse sur un exemple de simulation. Le cas du tourbillon convecté dans un écoulement uniforme à $M = 0.1$ (équation (3.5)) peut être par exemple utilisé. La résolution par la LBM est effectuée avec $\tilde{\tau} = 0.026$. Durant le calcul, on évalue également les fonctions \hat{f}_α à partir de \hat{g}_α . La figure 3.5 compare les résultats du calcul de $|\tilde{S}|$ par les différentes méthodes. Pour le calcul des dérivées de la vitesse (calcul de $|\tilde{S}| = \sqrt{2\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{ij}}$), les schémas aux différences finies centré d'ordre 2 et d'ordre 4 sont successivement utilisés. Dans cet exemple, on a pris $C_s = 0.18$ et $\tilde{\Delta} = 1$. On remarque sur la figure 3.5 (b) que c'est le calcul réalisé avec le schéma aux différences finies d'ordre 4 qui se rapproche le plus de la valeur calculée à partir des fonctions hors équilibre. Ainsi, les formules (3.9) ou (3.10) donnent une très bonne estimation du taux de déformation.

A partir de $|\tilde{S}|$, il est bien entendu immédiat de remonter à la valeur de $\tilde{\nu}_T$ (et donc à $\tilde{\tau}_g^e$) et de calculer ensuite, si besoin, le tenseur des taux de déformation \tilde{S}_{ij} à partir de l'une des deux expressions de $\tilde{\tau}_{ij}$ données par (3.8).

3.2.4 Conclusion

Sur le plan théorique, la méthode Boltzmann sur Réseau n'apporte pas de solution particulière au problème de la modélisation de la turbulence dans les calculs à nombre de Reynolds élevé. Comme dans les méthodes numériques classiques, l'approche basée sur l'intégration d'une viscosité turbulente est également utilisée dans la LBM. Tous les modèles développés pour les calculs RANS peuvent être exploités, avec les mêmes avantages et les mêmes défauts (dissipation trop importante pour les calculs instationnaires). Or, justement, la LBM est un schéma numérique instationnaire par nature, qui est relativement précis (voir 2.7). Il semble donc bien adapté à l'application de modèles de turbulence moins dissipatifs comme ceux développés pour la LES. Cette approche est d'autant plus attrayante que le calcul de la viscosité de sous-maille peut se faire directement à partir des fonctions de distribution, sans passer par le calcul de dérivées spatiales pour évaluer le tenseur des taux de déformation.

3.3 Stabilité numérique de la méthode

Même si le problème de stabilité des calculs LBM pour des viscosités faibles ($\tilde{\tau}_g$ proche de 1/2) est une des caractéristiques reconnues de la méthode[46, 124, 197, 217], il existe très peu d'études théoriques sur ce sujet. D'une manière générale, il est très difficile d'étudier la stabilité du schéma car, même avec l'opérateur de collision BGK, la méthode Boltzmann sur Réseau repose sur la résolution de Q équations couplées et non-linéaires. Le couplage entre les équations et la non-linéarité sur les \hat{g}_α sont introduits par la fonction d'équilibre du système. Ainsi, la première étape pour analyser la stabilité du schéma est de définir un système d'équations linéarisées autour d'un état moyen uniforme et constant[124, 131, 197] (vitesse \mathbf{U}_0 , densité ρ_0). En passant alors dans le domaine des nombres d'onde $\tilde{\mathbf{k}}$, l'équation de Boltzmann sur Réseau linéarisée s'écrit sous la forme :

$$\hat{g}_\alpha(\tilde{\mathbf{k}}, \tilde{t} + 1) = \sum_{\beta} \delta_{\alpha\beta} e^{-i\tilde{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{c}}_\alpha} L_{\alpha\beta} \hat{g}_\beta(\tilde{\mathbf{k}}, \tilde{t}) \quad (3.11)$$

Les vecteurs propres de la matrice $L_{\alpha\beta}$ représentent les différents modes supportés par le modèle. Cette approche étant limitée aux ondes planes propagatives, on retrouve uniquement les deux modes de propagation acoustique longitudinale et le mode de propagation transverse de cisaillement[124]. On obtient également des modes non-physiques de propagation qui correspondent aux invariants du réseau. Les invariants de réseau sont des répartitions particulières des fonctions de distribution dans le domaine qui sont conservées par $2n$ applications du schéma de relaxation[113, 124, 161]. En particulier, avec $n = 1$, le mode associé aux invariants du réseau a une longueur d'onde caractéristique de $2\Delta x$.

L'étude des valeurs propres de chaque mode, qui dépendent typiquement de τ_g , \mathbf{k} et \mathbf{U}_0 , permet de déterminer les domaines de stabilité linéaire de la méthode[124, 197]. En particulier, la valeur limite de stabilité $\tilde{\tau}_g = 1/2$, obtenue dans les tests numériques, est bien retrouvée. Même si ces résultats théoriques sont intéressants, les nombreuses hypothèses simplificatrices ne permettent pas de fournir une indication pratique sur les critères de stabilité d'un calcul. En effet, il apparaît que les problèmes de stabilité sont liés à une excitation des invariants de réseau associée

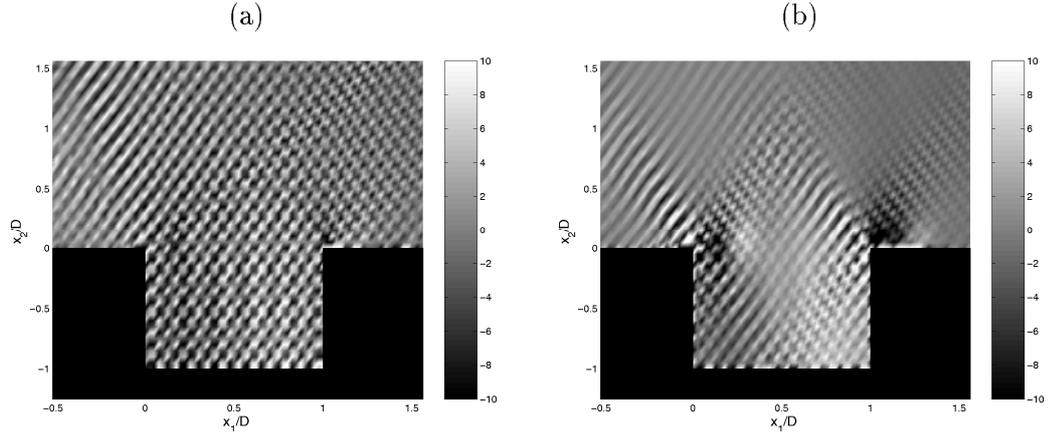


FIG. 3.6 – *Écoulement affleurant une cavité rectangulaire. Champ de pression après 500 pas de temps de calcul (phase d'initialisation), échelle en Pascals. Les paramètres du calcul sont $\tilde{\tau} = 1.6 \times 10^{-4}$; $Re_D = 9600$; $M = 0.044$; $\tilde{L} = 40$. (a) $\tilde{\nu}_a = 0$; (b) $\tilde{\nu}_a = 0.2$.*

à des caractéristiques de l'écoulement non pris en compte dans l'approche théorique. Les modes non-physiques sont par exemple excités dans les zones cisailées sous-résolées[46]. L'autre facteur important de génération des instabilités haute fréquence associées aux invariants du réseau est la modélisation des diverses conditions aux limites. Par exemple, d'après nos tests numériques, la condition de rebond total arrière pour les parois et les méthodes basées sur l'extrapolation des variables macroscopiques ou des fonctions de distribution sont particulièrement propices à l'excitation des invariants de réseau quand le temps de relaxation est proche de $1/2$.

Les modes des invariants de réseau sont des modes haute fréquence dont la longueur d'onde caractéristique est de $2n\Delta x$, avec $n = 1, 2, 3 \dots$. Si l'amplitude de ces instabilités reste finie, ces modes ont peu d'influence sur le résultat final de la simulation : ils apparaissent comme un bruit de fond numérique. Malheureusement, la non-linéarité de la fonction d'équilibre peut entraîner une amplification de ces ondes : le calcul devient instable quand les fonctions de distribution atteignent des valeurs négatives au cours de leur oscillation. La possibilité d'obtenir des fonctions de distribution négatives est liée à la forme polynomiale des fonctions d'équilibre. Dans la théorie cinétique continue, la forme exponentielle de la fonction d'équilibre assure la positivité des fonctions de distribution. Pour limiter l'amplification des instabilités numériques, une des solutions proposées est d'augmenter artificiellement la valeur de la viscosité en volume du fluide[46]. Pour les écoulements à haut nombre de Reynolds, la viscosité turbulente permet également d'atténuer fortement les oscillations numériques haute fréquence[138].

Dans notre modèle, le filtre sélectif proposé par Tam *et al.*[207] est utilisé pour amortir les ondes de faible longueur d'onde. Typiquement, ce filtrage n'atténue que les ondes de longueur d'onde inférieure à $6 \Delta x$. A chaque pas de temps, le filtre est appliqué aux variables macroscopiques $\phi = \hat{\rho}, \tilde{u}_1$ et \tilde{u}_2 :

$$\phi(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \phi(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) - \tilde{\nu}_a \sum_{j=-3}^{j=3} (d_j \phi(\tilde{x}_1 + j, \tilde{x}_2) + d_j \phi(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 + j))$$

où $d_j = d_{-j}$ sont les coefficients du filtre.

La figure 3.6 montre l'efficacité de ce filtre sur l'exemple d'un écoulement affleurant une cavité rectangulaire. Dans les deux cartographies de la pression, on distingue aisément la nature périodique des oscillations numériques. Dans ce cas, la longueur d'onde des invariants de réseau est de $4\Delta x$. Même si le filtrage sélectif ne fait pas disparaître totalement les fluctuations numériques, la diminution est suffisante pour éviter la divergence du calcul. Sur la figure 3.6 (b), on remarque que les oscillations numériques prennent naissance au niveau des angles de la cavités. On distingue aussi des directions privilégiées de propagation de ces invariants de réseau.

3.4 Etude de la propagation acoustique

Les exemples de calcul de LBM prenant en compte la compressibilité de la méthode sont très rares[25, 46]. Une des difficultés de l'aéroacoustique numérique[128] est de calculer simultanément l'écoulement aérodynamique et le champ acoustique éventuellement généré par ce dernier. Cette difficulté provient du fait qu'il y a une différence très importante entre les ordres de grandeur des variables qui caractérisent les deux types d'écoulement. Par exemple, en décomposant la vitesse en $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + (\mathbf{u}_r - \bar{\mathbf{u}}) + \mathbf{u}_a$ où $\mathbf{u}_r - \bar{\mathbf{u}}$ sont les fluctuations aérodynamiques et \mathbf{u}_a sont les fluctuations acoustiques, on a généralement $|\mathbf{u}_a| \ll |\mathbf{u}_r - \bar{\mathbf{u}}| < |\bar{\mathbf{u}}|$. Ainsi, un schéma numérique satisfaisant pour le calcul de $\mathbf{u}_r - \bar{\mathbf{u}}$ aura peut-être une dissipation et/ou une dispersion trop importante pour calculer correctement \mathbf{u}_a .

3.4.1 Modèle linéaire et simulation à viscosité nulle

Dans sa forme classique, la LBM permet de résoudre des écoulements de fluide visqueux. Ainsi, pour l'étude de la propagation acoustique, l'effet dissipatif de la viscosité sur les ondes acoustiques doit être pris en compte. Par exemple, pour une onde plane infinie, le terme d'amortissement en amplitude est de la forme[157] $\exp(-\varsigma t/T)$, avec $\varsigma = 2(2\pi)^2\vartheta/3\lambda_a c_s$ et $\vartheta = \mu/\rho + (\mu/3 + \eta)/2\rho$. Pour le modèle isotherme *D2Q9*, on a donc $\vartheta = 3\nu/2$. Sur la figure 3.7 (a), on vérifie que la décroissance de l'onde plane infinie obtenue numériquement est bien conforme à l'expression analytique. Pour ce calcul, une onde plane de direction de propagation \mathbf{x}_1 et de longueur d'onde $\tilde{\lambda}_a = 30$ est initialisée dans un domaine de dimension $N_1 \times N_2 = 30 \times 30$. Des conditions aux limites périodiques sont utilisées dans les quatre directions. Le signal temporel est mesuré au milieu du domaine.

Dans le contexte d'une simulation LBM, le taux de dissipation de l'onde acoustique par période est de $\exp(-\tilde{\tau}/\tilde{\lambda}_a \tilde{c}_s)$. Ainsi, pour étudier cette méthode numérique pour la propagation linéaire acoustique, ce taux doit pouvoir être négligé : cela est possible soit en augmentant $\tilde{\lambda}_a$, soit en réduisant $\tilde{\tau}$. Le cas idéal est bien entendu $\tilde{\tau} = 0$ (soit $\tilde{\tau}_g = 1/2$). Or, cette valeur, qui correspond à un fluide à viscosité nulle, est la limite de stabilité de la méthode (voir 3.3). Mais on a vu également que ce problème d'instabilité du calcul était lié à la croissance d'instabilités numériques de faible longueur d'onde associées aux invariants non physiques du réseau. Ainsi, si l'on arrive à limiter au maximum la naissance et la croissance de ces instabilités, le calcul à viscosité nulle peut être numériquement stable. C'est le cas quand on utilise des conditions aux limites périodiques qui n'introduisent aucune erreur et aucun déséquilibre dans les fonctions de distribution à la frontière

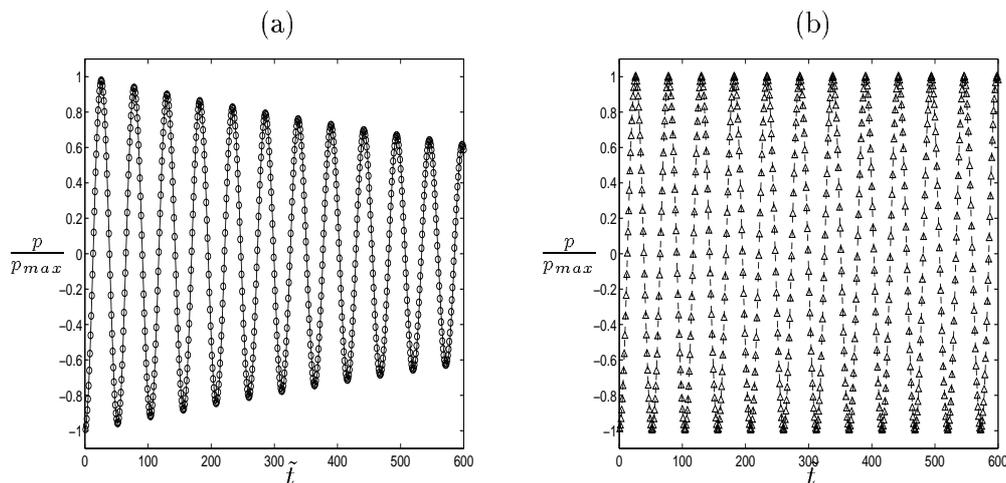


FIG. 3.7 – Signal temporel obtenu pour la simulation de la propagation d'une onde plane infinie de direction \mathbf{x}_1 et de longueur d'onde $\tilde{\lambda}_a = 30$. (a) ——— Modèle LBM avec $\tilde{\tau} = 5.55 \times 10^{-2}$; \circ signal théorique. (b) - - - Modèle LBM avec $\tilde{\tau} = 0$; \triangle modèle linéaire.

du domaine.

L'exemple de la propagation de l'onde plane infinie dans un fluide non dissipatif peut être simulé avec $\tilde{\tau} = 0$ (figure 3.7 (b)). Dans ce cas, la taille de maille Δx peut être choisie librement. Le pas de temps Δt est toujours lié à Δx via la valeur de la vitesse du son.

Des écoulements plus compliqués peuvent aussi être simulés. Par exemple, la figure 3.8 montre le résultat de la simulation de la propagation d'un monopole acoustique placé au centre d'un jet à Mach 0.3. Le profil uniforme du jet est défini par un profil en tangente hyperbolique. La largeur du jet est de $32 \Delta x$ et l'épaisseur de quantité de mouvement des deux couches cisillées du jet bidimensionnel est de $1 \Delta x$. La longueur d'onde acoustique est de $12 \Delta x$. Les dimensions du domaine sont $N_1 \times N_2 = 300 \times 260$, des conditions aux limites périodiques sont appliquées dans les quatre directions : le calcul est arrêté avant que les perturbations acoustiques n'atteignent les frontières du domaine de calcul. On retrouve dans cette simulation les caractéristiques principales de ce type de problème à savoir la *zone de silence* en aval de l'écoulement, la forte amplitude des ondes de pression en amont, et la directivité latérale du rayonnement associée à une déformation des fronts d'onde. La propagation non-linéaire des ondes acoustiques est due aux termes quadratiques des équations d'Euler.

Les termes non-linéaires des équations de transport sont aussi responsables de la croissance des instabilités aérodynamiques et éventuellement numériques. Pour éliminer le risque de divergence du calcul à cause des instabilités numériques, on peut supprimer totalement les termes non-linéaires du modèle. Dans ce cas, on se place alors automatiquement dans des conditions de propagation purement linéaire. Sur la base du réseau de vitesse du modèle *D2Q9*, on peut définir un modèle Boltzmann sur Réseau linéaire en enlevant simplement les termes non-linéaires de la fonction d'équilibre (3.2) :

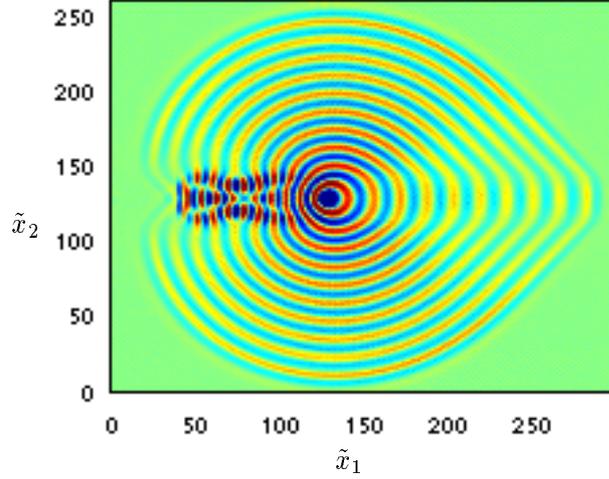


FIG. 3.8 – Propagation d’une onde acoustique issu d’une source monopolaire placée au centre d’un jet à Mach 0.3. $\tilde{\tau} = 0$, $\Delta x = 0.001$ m. Cartographie du signal instantané de pression pour une amplitude comprise entre -60 Pa et $+60$ Pa.

$$\hat{g}_\alpha^{eq,lin} = \hat{\rho}\omega_\alpha \left(1 + \frac{\tilde{c}_{\alpha,i}\tilde{u}_i}{\tilde{c}_s^2} \right) \quad (3.12)$$

Par la méthode de développement de Chapman-Enskog (§2.1.4), on peut montrer immédiatement que l’on obtient, au premier ordre en ϵ , les équations de conservation linéaires :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial \rho c_s^2 \delta_{ij}}{\partial x_i} = 0 \quad (3.14)$$

avec $c_s = \Delta x / \sqrt{3} \Delta t$. D’après l’analyse présentée dans le paragraphe 2.2.2, étant donné que la fonction d’équilibre est tronquée à l’ordre 1, tous les termes d’ordre 2 obtenus dans le calcul des moments de l’équation de Boltzmann tronquée à l’ordre 2 en ϵ seront non physiques. Cela n’a pas d’importance puisque l’on utilise ce modèle avec $\tilde{\tau}_g = 1/2$. Sur la figure 3.7 (b), on a représenté le résultat de la simulation de la propagation de l’onde plane infinie par ce modèle linéaire.

En complément, on peut remarquer que pour ce type de modèle linéaire, le réseau de vitesse à neuf vitesses semble sur-dimensionné. En effet, on voit que le calcul des équations de conservation nécessite le calcul des moments de la fonction d’équilibre jusqu’à l’ordre 2 uniquement. La fonction d’équilibre étant d’ordre 1, on doit assurer l’égalité des moments seulement jusqu’à l’ordre 3. Or, le modèle à neuf vitesses est construit à partir de la quadrature de Gauss-Hermite d’ordre 3 qui est exacte pour le calcul des moments de $\hat{g}_\alpha^{eq,lin}$ jusqu’à l’ordre 5 (§2.2.3). La quadrature de Gauss-Hermite d’ordre 2 (voir annexe C) est donc suffisante pour les modèles linéaires. On obtient alors un réseau à quatre vitesses données par les permutations de $(\pm 1, \pm 1)$ et les poids des fonctions de distribution associées à ces vitesses sont $\omega_\alpha = 1/4$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$. La vitesse du son de ce modèle est de $\tilde{c}_s = 1$. Un modèle similaire à quatre vitesses peut être construit par simple rotation de

45% du système de vitesses précédent. Les vitesses sont alors données par $(0, \pm 1)$ et $(\pm 1, 0)$. Les poids sont $\omega_\alpha = 1/4$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$ et la vitesse du son est $\tilde{c}_s = 1/\sqrt{2}$.

En intégrant les expressions de $\hat{\rho} = \sum \hat{g}_\alpha$ et de $\hat{\rho}\tilde{u}_i = \sum \tilde{c}_{\alpha,i}\hat{g}_\alpha$ dans l'expression de la fonction d'équilibre linéaire (3.12), on voit que l'on peut écrire l'équation de Boltzmann sur Réseau (3.1) sous la forme linéaire :

$$\hat{g}_\alpha(\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{c}}_\alpha, \tilde{t} + 1) = \sum_{\beta} L_{\alpha\beta} \hat{g}_\beta(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) \quad (3.15)$$

Cette relation n'est autre que l'équation calculée dans la méthode de calcul TLM (Transmission Line Matrix) utilisée pour la simulation numérique des phénomènes de propagation d'onde. La méthode TLM a été développée initialement pour les calculs de propagation en électromagnétisme[96]. Cet outil numérique, associé à des conditions aux limites solides de type rebond total arrière (§2.6.2), avec éventuellement la prise en compte d'une dissipation des ondes sur les surfaces solides (réflexion non totale) permet de calculer les cartographies d'un champ propagatif (ondes sonores, ondes électro-magnétiques) dans un milieu complexe (zone urbaine[134], imagerie médicale[1]).

3.4.2 Dispersion et dissipation

Pour la simulation de la propagation acoustique, il est utile d'étudier la dispersion et la dissipation introduite par le schéma numérique. Pour le problème de la dispersion, le développement de Chapman-Enskog permet de calculer la valeur de la vitesse du son c_s dans la limite $\mathbf{k} = 0$. Il n'est pas assuré que cette valeur soit valable pour les nombres d'onde non nuls[124]. De même, comme tout schéma de discrétisation en espace et en temps, une dissipation numérique est introduite : elle dépend du nombre de point utilisé pour mailler une longueur d'onde caractéristique.

Pour étudier ces propriétés de la LBM en fonction du nombre d'onde, une perturbation à spectre Gaussien[17] est placée dans un domaine de dimension $N_1 \times N_2 = 2000 \times 3$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\rho} = 1 + a_G \sin\left(\frac{2\pi(\tilde{x}_1 - N_1/4)}{b_G}\right) \exp\left[-\ln 2 \left(\frac{\tilde{x}_1 - N_1/4}{c_G}\right)^2\right] \\ \tilde{u}_1 = \hat{\rho}\tilde{c}_s(\hat{\rho} - 1) \\ \tilde{u}_2 = 0 \end{array} \right. \quad (3.16)$$

avec $a_G = 1 \times 10^{-3}$, et $c_G = 16$. Cette perturbation a un spectre nombre d'onde Gaussien centré autour d'un nombre d'onde $\tilde{k}_1 = 2\pi/\tilde{\lambda}_a$ qui dépend du coefficient b_G . Des conditions aux limites périodiques sont utilisées dans les quatre directions. Les simulations sont effectuées à la fois avec le modèle $D2Q9$ classique (avec $\tilde{\tau} = 1.25 \times 10^{-4}$) et avec le modèle $D2Q9$ linéaire défini dans le paragraphe précédent. La figure 3.9 montre trois exemples de résultats après une propagation de la perturbation sur 10 longueurs d'onde. On remarque qu'il y a un décalage dans la position de la perturbation par rapport à la position théorique. Le retard de l'onde est d'autant plus grand que $\tilde{\lambda}_a$ est petit. Nous reviendrons sur cet aspect un peu plus loin.

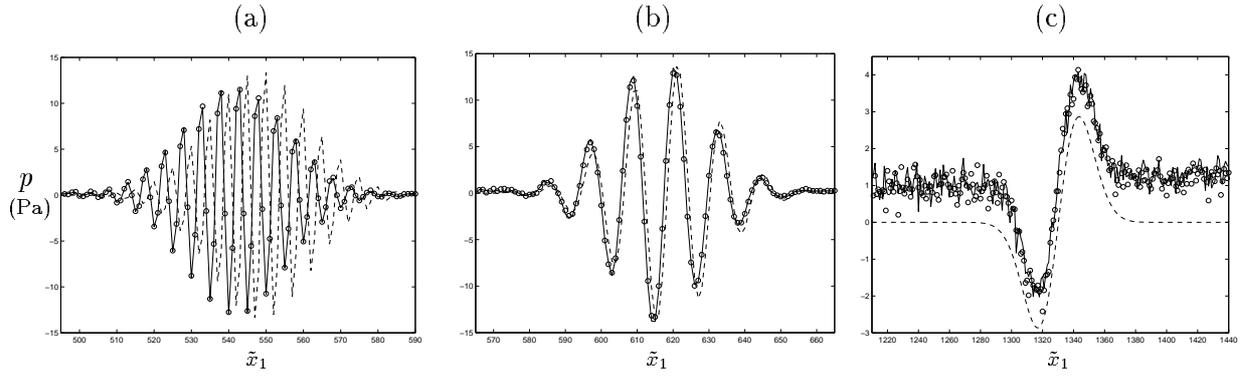


FIG. 3.9 – Propagation de la perturbation acoustique à spectre Gaussien sur 10 longueurs d’onde caractéristiques. — — Profil de pression théorique; — simulation LBM avec $\tilde{\tau} = 1.25 \times 10^{-4}$; \circ simulation LBM linéaire. (a) $\tilde{\lambda}_a = 5$; (b) $\tilde{\lambda}_a = 12$; (c) $\tilde{\lambda}_a = 83$.

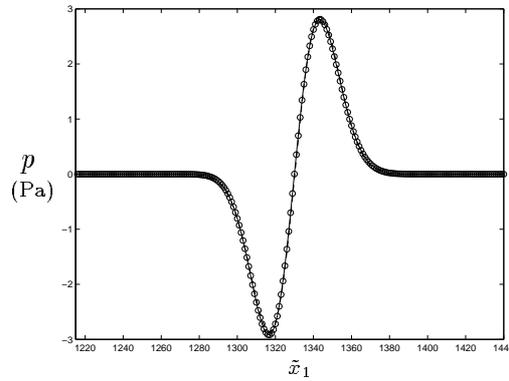


FIG. 3.10 – Propagation de la perturbation acoustique à spectre Gaussien sur 10 longueurs d’onde caractéristiques avec $\tilde{\lambda}_a = 83$. Codage en double précision. — — Profil de pression théorique; — simulation LBM avec $\tilde{\tau} = 1.25 \times 10^{-4}$; \circ simulation LBM linéaire.

On remarque également sur la figure 3.9 (c) un décalage de la pression moyenne dans le domaine, associé à un fort niveau de bruit de fond numérique. Même s’il est aussi présent sur les deux autres exemples de simulation, le bruit de fond est beaucoup moins grand : cela est dû au fait que le nombre d’itération réalisée pour ces deux cas est beaucoup moins important que pour le troisième. En effet, on peut rapidement vérifier que la déviation de la pression moyenne et le bruit de fond numérique sont liés à l’erreur d’arrondi des réels à virgule flottante qui peut éventuellement s’accumuler au cours des itérations. Si l’on considère par exemple la calcul de la densité, qui est centrée autour de 1 dans les calculs, l’erreur d’arrondi pour un codage en simple précision est de l’ordre de 10^{-8} ce qui représente $c_s^2 \rho_0 \approx 1 \times 10^{-3}$ Pa. Après 1000 itérations (le calcul de la figure 3.9 (c) est réalisé sur 1440 itérations), en supposant une accumulation de l’erreur, la déviation de la pression est de 1 Pa ce qui est exactement l’ordre de grandeur du décalage obtenu dans le troisième calcul. Ce problème peut être résolu de manière évidente en utilisant un codage en double précision. La figure 3.10 montre le résultat obtenu dans ce cas pour la perturbation de longueur d’onde $\tilde{\lambda}_a = 83$. L’accord avec le profil théorique est alors excellent. Dans la suite de ce paragraphe, tous les calculs seront réalisés en double précision.

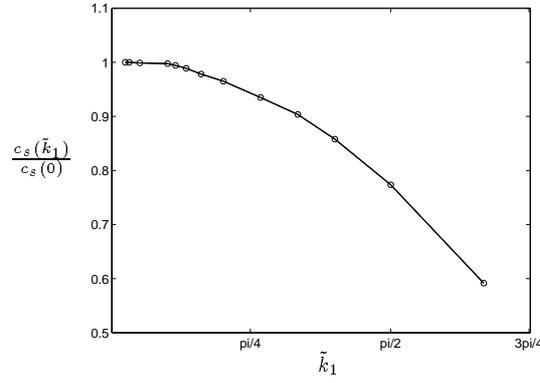


FIG. 3.11 – *Etude numérique de la dispersion pour la propagation d'une onde acoustique suivant la direction \mathbf{x}_1 . — modèle LBM classique, $\tilde{\tau} = 1.25 \times 10^{-4}$; \circ modèle LBM linéaire.*

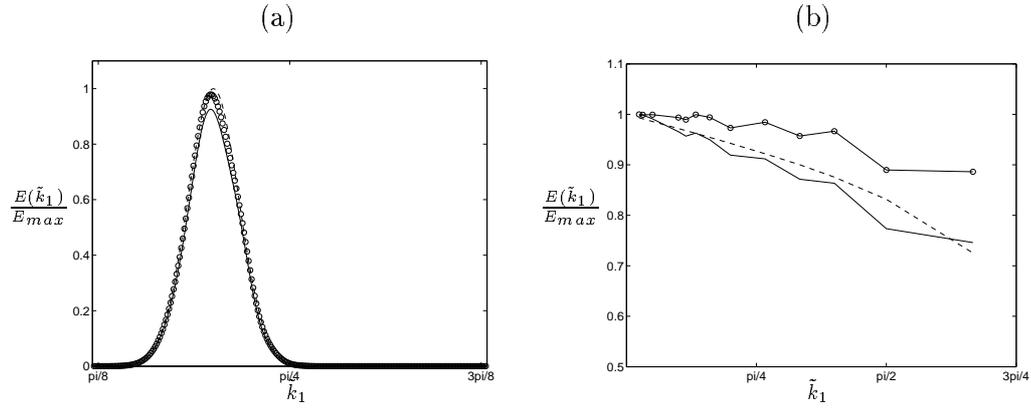


FIG. 3.12 – (a) *Spectre nombre d'onde ($\Delta\tilde{k}_1 = 3 \times 10^{-3}$) de l'énergie d'une perturbation acoustique de longueur d'onde $\tilde{\lambda}_a = 10$ après une propagation sur $100 \tilde{\lambda}_a$. - - - Spectre théorique; — LBM classique ($\tilde{\tau} = 1.25 \times 10^{-4}$); \circ LBM linéaire. (b) *Evolution de la perte d'énergie pour une propagation sur $100 \tilde{\lambda}_a$. — \circ LBM classique ($\tilde{\tau} = 1.25 \times 10^{-4}$); — \circ LBM linéaire; - - - dissipation théorique de l'énergie des ondes acoustiques.**

La relation de dispersion $c_s(\tilde{k}_1)$ est étudiée en calculant la propagation de la perturbation acoustique sur toute la longueur du domaine. Le déphasage du signal avec la valeur théorique est alors mesurée. La figure 3.11 présente le résultat de cette étude numérique. Comme on l'avait déjà remarqué sur la figure 3.9, la vitesse du son effective diminue quand le nombre d'onde augmente. Aucune différence n'est constatée entre le modèle LBM visqueux et le modèle linéaire. Au-delà de $\tilde{k}_1 = \pi/8$ ($\tilde{\lambda}_a = 16$), la différence entre la vitesse du son théorique et la vitesse du son effective est relativement importante. Pour $\tilde{\lambda}_a = 10$, on a déjà $c_s(\tilde{k}_1) = 0.96 c_s(0)$. La propagation sur de longues distances nécessitera donc un maillage assez fin des ondes acoustiques.

Pour l'étude de la dissipation des ondes sonores, la propagation des perturbations à spectre Gaussien est réalisée sur 100 longueurs d'onde. Le spectre est alors calculé par transformée de Fourier spatiale dans la direction \mathbf{x}_1 . Ce spectre est comparé au spectre théorique. Un exemple de résultat de cette procédure est donné sur la figure 3.12 (a). On relève alors le rapport $E(\tilde{k}_1)/E_{max}$ pour le nombre d'onde central du pic. Le résultat de cette analyse est montré sur la figure 3.12 (b).

Sur cette figure, on a aussi représenté l'évolution de la dissipation théorique de l'énergie des ondes par la viscosité du fluide. Pour cela, l'expression du taux de dissipation des ondes planes infinies donnée dans le paragraphe précédent est utilisé. On voit qu'en tenant compte de l'atténuation des ondes par la viscosité, la dissipation numérique est très faible. Comme prévu, elle augmente progressivement quand le nombre d'onde augmente. Pour $\tilde{\lambda}_a = 10$, la dissipation introduite par le schéma numérique est de seulement 2% après une propagation de la perturbation sur 100 longueurs d'onde.

3.4.3 Etude de la convergence

Pour des problèmes de propagation acoustique en écoulement, on peut aussi étudier la convergence de la méthode numérique. Pour cela, l'exemple de l'impulsion de pression placée dans un écoulement uniforme à $M = 0.2$ est simulé (équation (3.4)). Pour cet écoulement, on connaît la solution analytique[78] notée p_{ref} . L'erreur est alors calculée par la relation :

$$Err = \left(\frac{1}{N_1} \sum_{k=1}^{N_2} \frac{(p(k, N_2/2) - p_{ref}(k, N_2/2))^2}{\rho_0 c_s^2 a_P} \right)$$

La demi-largeur physique $\sqrt{b_P} \Delta x$ est maintenue constante, ainsi que les dimensions du domaine de calcul $N_1 \Delta x \times N_2 \Delta x = 16 \Delta x^2 \sqrt{b_P} \times \sqrt{b_P}$. L'erreur est calculée en faisant varier la valeur du pas d'espace Δx . Le temps de relaxation est donc aussi modifié ($7.5 \times 10^{-7} < \tilde{\tau} < 1.0 \times 10^{-5}$) pour maintenir une viscosité constante, égale à une valeur qui permet de négliger les effets de la dissipation visqueuse de l'onde.

Pour étudier l'effet de l'erreur d'arrondi, le calcul est effectué soit pour un nombre d'itération donné ($\tilde{t} = 20$), soit pour un temps physique donné ($t = 2.07$ ms). On rappelle qu'étant donné que le CFL est constant et fixe dans la LBM, le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre un temps physique donné augmente quand la discrétisation spatiale du signal augmente.

La figure 3.13 montre que, pour les calculs réalisés en simple précision, l'erreur atteint un minimum lié à l'erreur d'arrondi commise sur les valeurs des variables réelles. Pour un nombre d'itération fixé, cette erreur semble identique quelque soit le niveau de discrétisation. Bien entendu, l'effet de l'erreur d'arrondi n'apparaît que quand l'erreur de discrétisation est suffisamment faible. Si l'on observe l'évolution de l'erreur pour un temps physique donné, on constate que, après avoir atteint le seuil pour lequel l'erreur d'arrondi est supérieur à l'erreur de discrétisation, l'accumulation des erreurs d'arrondi engendre une augmentation linéaire de l'erreur totale.

Cette influence de l'erreur d'arrondi peut être annulée par le codage en double précision des réels. Dans ce cas, on observe une décroissance régulière de l'erreur en fonction de la discrétisation du signal. La pente obtenue est de 2.4. Cette convergence est supérieure à la convergence quadratique prévue théoriquement par l'analyse de Chapman-Enskog décrite dans le paragraphe 2.4.2. Elle est cependant inférieure à la convergence cubique obtenue par la méthode d'intégration des trapèzes (§2.3.1). Nous n'avons pas d'interprétation de cette différence entre les taux de convergence obtenus par les deux approches théoriques de la méthode Boltzmann sur Réseau. En

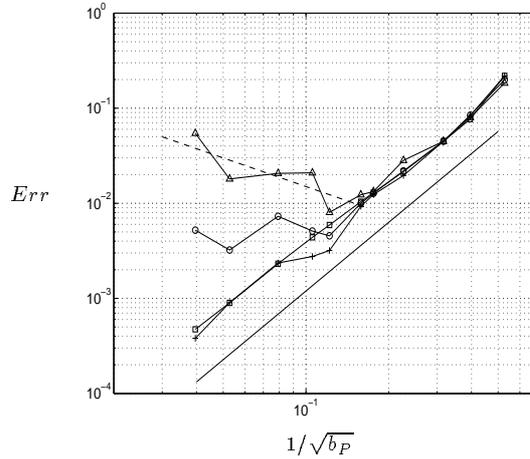


FIG. 3.13 – *Etude de la convergence du modèle D2Q9 sur le problème de la propagation d’une impulsion de pression dans un écoulement uniforme à Mach 0.2.* \circ Calcul en simple précision pour un nombre d’itération donné; \triangle Calcul en simple précision pour un temps physique donné; $+$ Calcul en double précision pour un nombre d’itération donné; \blacksquare Calcul en double précision pour temps physique donné. — Droite de pente 2.4; - - - Droite de pente -1.

particulier, il est difficile de dire lequel des deux taux est le plus proche de la réalité. Bien que la plupart des précédentes études de la convergence de la LBM permettaient de conclure à une convergence quadratique (voir §2.7), nous avons fait remarquer la possibilité d’une limitation de cette convergence par la précision des conditions aux limites utilisées dans ces études qui sont généralement, au mieux, d’ordre 2. Ainsi, en utilisant des conditions aux limites périodiques pour le cas test du tourbillon de Taylor, Reider *et al.*[167] trouvent, dans certaines configurations, des précisions d’ordre supérieur à 2.5. Cependant, jamais une convergence d’ordre 3 n’a été obtenue lors des différentes études numériques.

3.4.4 Conclusion

Dans cette partie, nous avons étudié la capacité de la LBM à simuler des problèmes de propagation acoustique. Nous avons vu en particulier que la faible dissipation de cet algorithme permet de calculer des fluctuations de faible amplitude (de l’ordre du Pascal pour la pression) se propageant dans un écoulement moyen aérodynamique (la pression moyenne est de l’ordre de 10^5 Pascals). Cette méthode peut donc être utilisée pour des calculs aéroacoustiques. Le principal défaut de la LBM pour ces calculs est la dispersion importante observée pour la propagation des ondes acoustiques de longueur d’onde inférieure à une dizaine de maille. Le calcul de la propagation sur de longues distances nécessitera donc un maillage assez fin.

L’étude numérique de la dispersion et de la dissipation présentée dans ce chapitre est limitée à une direction de propagation particulière (direction parallèle à un des axes cartésiens). Les quelques études théoriques[131, 124] basées sur une analyse dans l’espace des nombres d’onde d’une forme linéarisée de la LBM montrent en effet que ce schéma n’est pas isotrope pour $\mathbf{k} > 0$.

Nous avons vu que les formes linéarisées de la LBM se rapprochent des algorithmes utilisés dans la méthode TLM. Etant donné que cette méthode a été développée pour la simulation de

la propagation (acoustique, electro-magnétique,...), il serait utile d'exploiter les différents développements, théoriques ou numériques, effectués depuis quelques années dans ce domaine. Par exemple, les relations de dispersion théoriques pour les directions de propagation cartésiennes et diagonales sont connues pour le modèle à 4 vitesses[1, 134]. Comme pour le modèle $D2Q9$, la vitesse du son diminue quand le nombre d'onde augmente pour les directions cartésiennes. Par contre, dans les directions diagonales, on $c_s(\tilde{\mathbf{k}}) = c_s(0)$ pour tout $\tilde{k} < \pi$ ($\tilde{\lambda}_\alpha > 2$). Nous avons pu vérifier numériquement ce résultat.

3.5 Conditions aux limites optimisées

Dans le code développé pour l'étude de la LBM pour les simulations aéroacoustiques, seules des frontières planes qui coïncident avec des directions de propagation du réseau sont utilisées. Comme on l'a vu dans le paragraphe 2.6, cela simplifie beaucoup le développement de conditions aux limites précises et robustes.

3.5.1 Fonctions d'équilibre étendues pour la condition de paroi

Pour les conditions de paroi, les différents algorithmes existant (§2.6) ont été testés. On a pu constater que la condition la plus précise et la plus stable est celle basée sur l'utilisation de la fonction d'équilibre modifiée :

$$\hat{g}_\alpha^{eq*}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) = \hat{g}_\alpha^{eq}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) + \hat{h}_\alpha^{neq}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) \quad (3.17)$$

A chaque pas de temps, les fonctions de distribution rentrantes inconnues sont fixées égales à \hat{g}_α^{eq*} . Le temps de relaxation à la paroi est donc égal à 1. La valeur de la viscosité effective du fluide intérieur est alors retrouvée en intégrant une fonction hors équilibre dans la fonction d'équilibre. La forme générale de la fonction hors équilibre est :

$$\hat{h}_\alpha^{neq} = \hat{\rho} \left(\epsilon r(\alpha) \tilde{c}_{\alpha,i} \tilde{c}_{\alpha,j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j} + \epsilon s(\alpha) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_i} \right) \quad (3.18)$$

avec $r(0) = 0$ et $s(0) = s_0$; $r(\alpha) = r_1$ et $s(\alpha) = s_1$ pour $\alpha = 1, 2, 3, 4$; $r(\alpha) = r_2$ et $s(\alpha) = s_2$ pour $\alpha = 5, 6, 7, 8$. Pour que la relation (2.51) soit vérifiée, les coefficients doivent respecter la condition : $\epsilon s_0 + 4\epsilon s_1 + 4\epsilon s_2 + 2\epsilon r_1 + 4\epsilon r_2 = 0$. La condition (2.52) ne fournit pas de contrainte supplémentaire sur les coefficients ϵr_i et ϵs_i . On peut fixer librement deux des coefficients : $\epsilon r_2 = \epsilon r_1/4$ et $\epsilon s_2 = \epsilon s_1/4$. En appliquant la procédure de Chapman-Enskog (§2.1.4 ou 2.4.2), on obtient, une expression modifiée du tenseur des efforts visqueux :

$$\tilde{\tau}_{ij}^* = 2\hat{\rho}(\tilde{\nu} - \epsilon r_2) \tilde{S}_{ij} - 2(\epsilon r_2 + 6\epsilon s_2) \tilde{S}_{kk} \delta_{ij} \quad (3.19)$$

Dans cette relation, la viscosité $\tilde{\nu}$ est calculée par l'équation (2.83) avec $\tilde{\tau}_g = 1$. On peut donc fixer ϵr_2 tel que $(\tilde{\nu} - \epsilon r_2)$ soit égal à la viscosité cinématique du fluide intérieur. Le coefficient ϵs_2 est alors calculé de telle sorte que $\epsilon r_2 + 6\epsilon s_2 = 0$ pour retrouver la valeur de la viscosité en volume du fluide intérieur.

Pour l'application de cet algorithme, il est nécessaire de connaître les variables macroscopiques sur la paroi. La vitesse est nulle $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2 = 0$. La densité est calculée à partir de la relation (2.88) et de ses variantes pour les autres orientations de la frontière. Les gradients de vitesse sont calculés à l'aide du schéma aux différences finies décentré d'ordre 2.

3.5.2 Condition de rayonnement

Comme on l'a expliqué dans le paragraphe 2.6, une condition de rayonnement libre nécessite le calcul de trois fonctions de distribution rentrantes et des trois variables macroscopiques. On propose ici une méthode qui permet de calculer ces inconnues avec un minimum de contraintes sur les variables. Cette approche est basée sur la résolution de l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes (3.1.2) par un schéma aux différences finies associé à une intégration temporelle de Runge-Kutta. Pour les gradients parallèles à la frontière, le schéma centré d'ordre 2 est utilisé. Pour les gradients normaux à la frontière, le schéma décentré d'ordre 2 est employé. Malheureusement, pour les fonctions rentrantes, ce schéma est un schéma décentré aval qui est inconditionnellement instable. On doit donc supposer que :

$$\frac{\partial \hat{f}_{\alpha_{in}}}{\partial n} = 0 \quad (3.20)$$

Le schéma explicite de Runge-Kutta d'ordre 4 est utilisé pour l'intégration temporelle. La résolution de l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes n'est réalisée que pour les nœuds des frontières fluides. Les valeurs des fonctions de distribution du domaine intérieur pour les sous-étapes de l'algorithme de Runge-Kutta ne sont donc pas calculées. Les gradients faisant intervenir des points intérieurs ne sont donc intégrés que dans la dernière étape de l'algorithme. Par exemple, pour une surface parallèle à la direction \mathbf{x}_1 , on a :

$$\begin{cases} \hat{f}_\alpha^0 = \hat{f}_\alpha(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) \\ \hat{f}_\alpha^k = \hat{f}_\alpha^0 + a_k \left(\Omega^{k-1} - \tilde{c}_{\alpha, x_1} \frac{\partial \hat{f}_\alpha^{k-1}}{\partial \tilde{x}_1} \right) \text{ pour } k = 1, \dots, 3 \\ \hat{f}_\alpha^4 = \hat{f}_\alpha^0 + a_4 \left(\Omega^3 - \tilde{c}_{\alpha, x_1} \frac{\partial \hat{f}_\alpha^3}{\partial \tilde{x}_1} - \tilde{c}_{\alpha, x_2} \frac{\partial \hat{f}_\alpha^0}{\partial \tilde{x}_2} \right) \\ \hat{f}_\alpha(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t} + 1) = \hat{f}_\alpha^4 \end{cases}$$

Cette méthode permet donc de calculer simultanément les fonctions de distribution sur la frontière et les variables macroscopiques. Pour l'application de ce schéma, le changement de variable $\hat{g}_\alpha \rightarrow \hat{f}_\alpha$ (puis $\hat{f}_\alpha \rightarrow \hat{g}_\alpha$ à la fin de l'algorithme) est nécessaire pour tous les points de la frontière ainsi que les points intérieurs intervenant dans le calcul des dérivées spatiales.

Comme on l'avait déjà remarqué dans le paragraphe 3.1.2, la stabilité du schéma aux différences finies est limitée par la valeur du temps de relaxation. Pour le schéma présenté ci-dessus, la valeur limite de $\tilde{\tau}$ est de 0.5. Cette valeur du temps de relaxation est donc fixée sur les frontières fluides. Bien entendu, à l'intérieur du domaine, une valeur beaucoup plus faible (typiquement $\tilde{\tau} < 10^{-2}$) est nécessaire pour réaliser des calculs à des nombres de Reynolds assez élevés. Ainsi, à l'approche d'une frontière fluide, $\tilde{\tau}$ est progressivement augmenté jusqu'à atteindre la valeur de 0.5. Cette augmentation est rapide : une fonction exponentielle est utilisée.

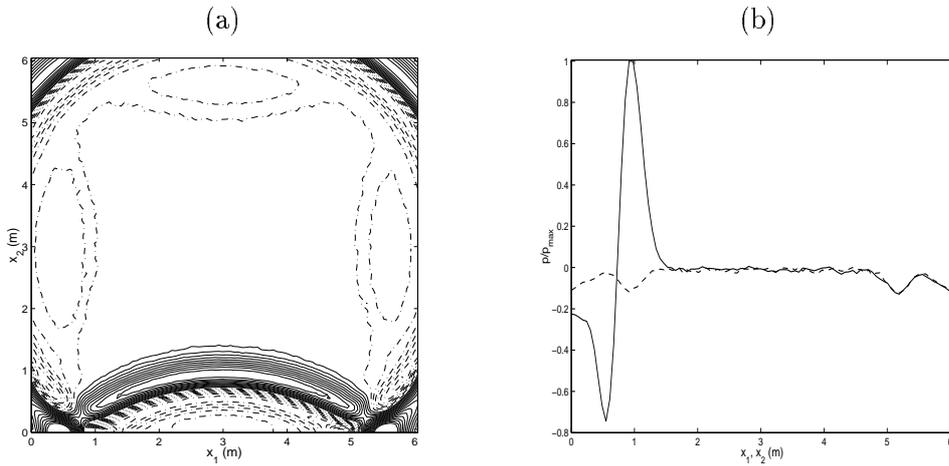


FIG. 3.14 – Impulsion placée dans un milieu au repos. $\tilde{\tau} = 1.25 \times 10^{-6}$, $\tilde{t} = 120$. (a) Isocontours de pression par pas de 1 Pa; — isocontours positifs; - - - isocontours négatifs. (b) Profil de la pression suivant l'axe (—) x_2 et (- - -) x_1 passant par le centre du domaine.

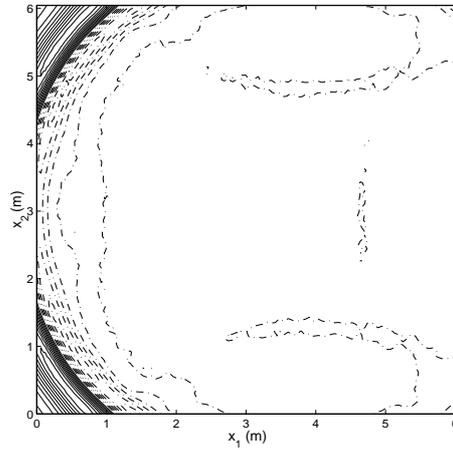


FIG. 3.15 – Impulsion placée dans un écoulement uniforme à Mach 0.2. $\tilde{\tau} = 1.25 \times 10^{-6}$, $\tilde{t} = 120$. (a) Isocontours de pression par pas de 1 Pa; — isocontours positifs; - - - isocontours négatifs.

Le taux de réflexion de cette condition aux limites soumise à une excitation acoustique est étudié en simulant la propagation de l'impulsion de pression définie par l'équation (3.4) avec $U_0 = 0$, $a_P = 0.001$ et $b_P = 12$. Le domaine de calcul est de dimension 100×100 . La frontière inférieure du domaine est définie comme une condition de paroi (§3.5.1). Pour les trois autres, on applique la condition aux limites définie dans ce paragraphe. La figure 3.14 montre les isocontours de pression après 120 itérations. On voit que les conditions aux limites de rayonnement ne sont pas parfaites et génèrent une onde réfléchie dans le domaine. En considérant que l'on a un taux de réflexion de 100% sur la paroi solide, on peut évaluer le taux de réflexion de la condition aux limites de rayonnement. D'après la figure 3.14 ce taux est de 10%. Le même type de calcul est maintenant réalisé avec un écoulement moyen uniforme à Mach 0.2 (figure 3.15). La frontière inférieure du domaine est dans ce cas définie par la condition aux limites de rayonnement. On

voit que la présence d'un écoulement moyen modifie peu le comportement de cette condition aux limites. En fait, il n'y aucune différence de traitement entre les simulations avec et sans écoulement moyen. En particulier, en entrée du domaine, aucun rappel sur la vitesse n'est nécessaire pour conserver un écoulement moyen constant : la valeur importante du temps de relaxation permet de maintenir une vitesse moyenne constante en entrée.

Même si cette condition de sortie des ondes acoustiques est relativement satisfaisante dans le cadre de cette première étude de la LBM pour des simulations aéroacoustiques, elle est moins performante que certaines conditions de rayonnement utilisées en CAA[18].

3.6 Simulation du bruit de cavité

Dans ce dernier paragraphe, nous allons appliquer le modèle LBM intégrant certains développements présentés dans ce chapitre sur un problème classique de simulation en aéroacoustique : la simulation du bruit de cavité.

3.6.1 Précédentes études numériques

Les premiers calculs instationnaires bidimensionnels ont été réalisés à la fin des années 70 par Hankey & Shang[77] à l'aide d'un code RANS compressible associé à un modèle de viscosité turbulente de Cebeci-Smith. A l'époque, l'essentiel des études[82, 178] sur le sujet était lié au problème des oscillations de l'écoulement supersonique affleurant les soutes à bombes des avions de chasse. La plupart des simulations numériques[77, 172] étaient donc réalisées en supersonique sur des cavités rectangulaires simples, peu profondes ($L/D > 2$). Même si effectivement, cette problématique était certainement très importante à l'époque (elle le reste encore aujourd'hui[189]), l'absence d'étude numérique du phénomène d'auto-oscillation pour des écoulements subsoniques était également due à la limitation des schémas numériques compressibles en terme de précision pour aborder des simulations aéroacoustiques plus fines, c'est-à-dire où le rapport entre les amplitudes des fluctuations aérodynamiques et celles des fluctuations acoustiques est plus élevé. Dans les calculs supersoniques, l'onde de pression responsable de la rétroaction acoustique est très intense : dans les visualisations expérimentales[81] et dans les simulations numériques[226], elle apparaît comme une onde de choc qui remonte l'écoulement dans la zone cisailée. De nombreux modèles de turbulence ont été utilisés (Baldwin-Lomax[172], $k - \epsilon$ [188], $k - \omega$ [226]) pour cette application et des modifications géométriques ou des systèmes de contrôle visant à réduire les auto-oscillations ont été testés numériquement[11].

Il faudra attendre la fin des années 90, pour obtenir les premiers calculs aéroacoustiques du bruit de cavité[39, 186] pour des écoulements subsoniques. Auparavant, des méthodes hybrides basées sur le calcul de l'auto-oscillation par un schéma incompressible associé à un modèle de source aéroacoustique (modèle basé sur l'analogie de Lighthill/Curle[226] ou approche de séparation des variables de Hardin & Pope[79]) avaient été développées. Le calcul direct du bruit généré par des cavités excitées par des écoulements subsoniques fait appel à des algorithmes numériques développés spécialement pour la CAA[128]. Ces méthodes sont très précises mais aussi très coûteuses en temps de calcul et limitées à des géométries très simples (cavités rectangulaires).

Ainsi, ces calculs sont exploités pour l'étude des phénomènes physiques[179, 69], la validation des méthodes intégrales de calcul du bruit d'origine aérodynamique[69] ou le développement de méthodes mathématiques d'analyse de l'écoulement[179].

La plupart des calculs CAA sur le bruit des cavités sont réalisés pour des écoulements assez rapides ($M > 0.3$). Un cas test proposé au troisième Workshop d'aéroacoustique numérique[83] portait sur la simulation d'un écoulement affleurant une césure de portière de véhicule (joint de la porte), bien entendu avec une géométrie 2D très simplifiée. Le nombre de Mach était donc faible ($M = 0.15$). Malheureusement, cette configuration ne fait pas apparaître, dans la pratique, d'oscillation auto-entretenu car le rapport L/θ_0 est trop faible. Dans les mesures expérimentales, il y a une incertitude sur la valeur exacte de l'épaisseur de la couche limite amont. De plus, pour obtenir des oscillations auto-entretenu, certains chercheurs ont réduit l'épaisseur de la couche limite[186, 122] par rapport à la description initiale du cas test. Ainsi, les comparaisons calculs/essais sont assez difficiles. Diverses méthodes numériques ont été employées par les différents participants au Workshop. Kurbatskii & Tam[122] ainsi que Heo & Lee[84] utilisent des algorithmes classiques de la CAA. Shieh & Morris[186] associent leurs algorithmes de CAA avec une modélisation de la turbulence de type DES. Ashcroft *et al.*[7] exploitent le code RANS CFL-3D basé sur une formulation en volumes finis et qui intègre un modèle de turbulence $k - \omega$.

Pour réaliser des calculs 3D à des nombres de Reynolds élevés, un calcul LES a aussi été proposé sur une cavité profonde à $M = 0.8$ [126]. Pour limiter la taille du calcul, une loi de paroi est utilisée. On peut donc qualifier cette approche de méthode hybride RANS/LES.

On peut enfin noter des calculs réalisés directement en relation avec des applications industrielles comme par exemple, les calculs de Radavich *et al.*[165] sur le couplage acoustique de l'oscillation de l'écoulement affleurant un résonateur quart d'onde dans un conduit. Ce même type de simulation a été développé par Dequand *et al.*[48] à l'aide d'un code résolvant les équations d'Euler. La cavité résonante est alors une cavité de Helmholtz. L'objectif de ce travail est d'étudier l'influence de la géométrie du col du résonateur sur l'amplitude et la fréquence de l'oscillation. Dans le domaine automobile, Ribaldone *et al.*[168] utilisent le code commercial CFD++ pour étudier les oscillations des écoulements affleurant des cavités résonantes et non résonantes pour des configurations géométriques simples.

3.6.2 Configuration et paramètres de calcul

La configuration du domaine de calcul utilisée pour nos simulations est représentée sur la figure 3.16.

La condition qui minimise les réflexions des ondes acoustiques sur les frontières (§3.5.2) est appliquée pour l'entrée, la sortie et la frontière supérieure du domaine. Cependant, on n'utilise pas cette condition dans les zones proches de la paroi (en entrée et en sortie). En effet, l'augmentation progressive, mais importante, de la viscosité nécessaire pour l'application de la condition de rayonnement génère de forts gradients de pression dans les zones cisailées (couche limite).

Pour la sortie de la couche limite, les fonctions de distributions inconnues (les trois fonctions rentrantes) sont calculées par extrapolation du premier ordre des fonctions de distribution

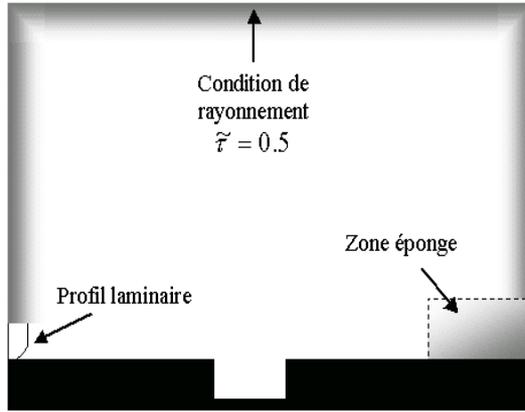


FIG. 3.16 – Schéma du domaine de calcul pour les simulations des écoulements affleurant une cavité.

intérieures. On devine que cette méthode peut être acceptable dans le cas où l'écoulement est stationnaire et où les gradients normaux à la surface sont faibles mais elle n'est pas adaptée pour traiter la sortie des instabilités tourbillonnaires. Pour réduire au maximum les fluctuations turbulentes au niveau de la sortie du domaine, une zone éponge est placée en aval de la cavité. Cette technique est très souvent utilisée dans les calculs d'aéroacoustique numérique [7, 39, 69, 84]. Elle consiste à rajouter dans les équations de transport un terme qui tend à ramener les différentes variables de l'écoulement vers leur valeur moyenne. Cela consiste donc à réaliser une opération de relaxation des variables macroscopiques $\phi = \hat{\rho}, \tilde{u}_1$ et \tilde{u}_2 vers leur moyenne \bar{v} :

$$\phi = \phi - \tilde{\sigma}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)(\phi - \bar{\phi})$$

Dans notre modèle, $\tilde{\sigma}$ est amené progressivement à sa valeur maximale (de l'ordre de 10^{-2}) par une fonction tangente hyperbolique appliquée dans les directions \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 .

Pour la condition d'entrée de la couche limite, les fonctions de distribution inconnues sont également évaluées par extrapolation pour le calcul des variables macroscopiques. Par contre, cette extrapolation aval peut conduire à une instabilité du calcul si ces fonctions sont utilisées pour calculer les distributions rentrantes *après collision*. Ainsi, la méthode basée sur le calcul de la fonction d'équilibre étendue est utilisée (voir §3.5.1) pour déterminer les fonctions *après collision*.

Une expression polynomiale approchée du profil de couche limite de Blasius est imposée en entrée (le domaine de calcul est initialisé avec cet écoulement). Pour maintenir ce profil en entrée durant le calcul, un rappel sur la vitesse est effectué à chaque pas de temps, uniquement pour la portion de la frontière traitée par la méthode extrapolation / fonction d'équilibre étendue.

La technique de maillage uniforme par blocs (voir §2.5.3) n'a pas été implantée dans notre modèle. La taille de maille sera donc constante dans tout le domaine de calcul. Cette contrainte importante ne permet pas de mailler très finement les couches limites. Pour l'écoulement en amont de la cavité, un écoulement laminaire stationnaire (couche limite laminaire) sera considéré : il n'y a donc pas de contrainte sur les tailles de maille. Par contre, en aval et surtout à l'intérieur de la cavité, l'écoulement est instationnaire, et si le nombre de Reynolds est suffisamment élevé, il

doit être considéré comme turbulent. Dans ce cas, dans une approche de simulation numérique directe, et même en LES, un maillage des écoulements de paroi jusqu'à la sous-couche visqueuse est théoriquement nécessaire. Ceci ne sera évidemment pas possible dans notre cas.

En fait, pour les simulations des écoulements de cavité, ce n'est pas le manque éventuel de cellules près des parois qui dégrade les résultats numériques par rapport aux observations expérimentales mais plutôt le caractère bidimensionnel du calcul. En effet, même si le phénomène d'oscillation auto-entretenu de l'écoulement affleurant est par nature bidimensionnel[2, 150], un développement réaliste, notamment à l'intérieur de la cavité, de la turbulence n'est possible qu'en tridimensionnel. En effet, le phénomène d'étirement tridimensionnel de la vorticité est un des mécanismes fondamentaux pour le développement de la turbulence et notamment pour le mélange de zones de vorticité de signe opposé. Cette mauvaise représentation de l'écoulement de recirculation à l'intérieur de la cavité semble être à l'origine du désaccord entre les simulations numériques directes de cavités rectangulaires[39, 68, 179, 186] et les observations expérimentales pour des rapports L/θ_0 supérieurs à 100. Dans ces différents travaux de simulation, on observe la disparition du phénomène de sheartone à partir de cette limite approximative qui dépend en fait du rapport L/D , du nombre de Mach, du nombre de Reynolds, etc.

Quand L/θ_0 est trop grand par rapport à la longueur de la cavité, l'écoulement passe d'une organisation de type couche de cisaillement (c'est le *mode de cisaillement*[65] associé éventuellement à une auto-oscillation)   une organisation de type sillage (*mode de sillage*[65]). Le terme sillage indique que l'écoulement qui se développe après la séparation est similaire à celui se développant derrière un obstacle. En particulier, l'écoulement turbulent se développe indépendamment de la présence du bord aval de la cavité[65]. Comme le souligne Gloerfelt[67], ce comportement se rapproche de celui des écoulements au-dessus de cavités *fermées*, c'est-à-dire des cavités représentant une marche descendante suivie d'une marche montante[211]. Dans leurs travaux expérimentaux, Gharib & Roshko[65] observent le changement d'organisation de l'écoulement pour $L/\theta_0 \approx 160$. Cette transition se produit beaucoup plus tôt dans les différentes simulations numériques[39, 68, 179, 186]. Quand on visualise les écoulements obtenus par simulation, il semble que cela soit l'absence de mélange tridimensionnel dans la cavité qui engendre cette transition prématurée en mode de sillage[67]. De plus, on peut remarquer que le mode de sillage *numérique* fait apparaître un phénomène périodique de forte amplitude lié à l'éjection de la grosse structure tourbillonnaire qui s'accumule dans la cavité. Dans les expériences, un tel mécanisme ne semble pas se produire[65, 211].

La mise en cause du caractère $2D$ des calculs dans la mauvaise prédiction de l'écoulement pour des couches limites trop fines est confirmée par les calculs de Shieh & Morris[187]. En effet, ils comparent pour une même configuration ($L/D = 4.4$, $M = 0.6$ et $\delta_0/D = 0.2$) un calcul $2D$ et un calcul $3D$ ($b/D = 1$). L'écoulement bidimensionnel est organisé en mode de sillage, alors que l'écoulement tridimensionnel est bien dans un mode de cisaillement, comme le prévoit l'expérience[211].

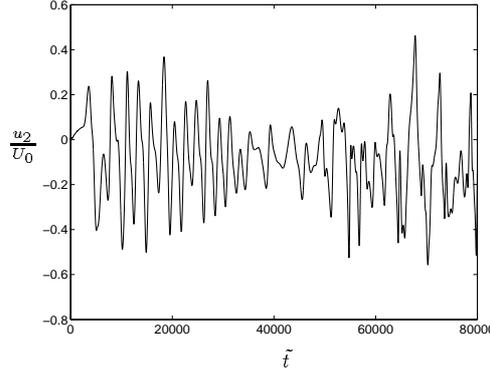


FIG. 3.17 – Cavit e $L/\theta_0 = 102$, $M = 0.044$, $Re_{\theta_0} = 310$. Signal de la vitesse transverse au point $x_1/L = 0.92$, $x_2/L = 0$.

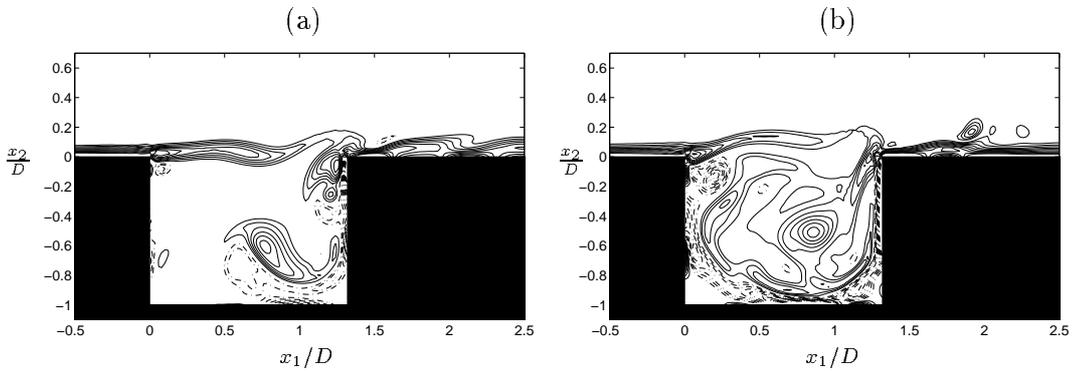


FIG. 3.18 – Cavit e $L/\theta_0 = 102$, $M = 0.044$, $Re_{\theta_0} = 310$. Isocontours de vorticit e entre -11000 et $+16000 \text{ s}^{-1}$: — isocontours n egatifs; - - - isocontours positifs. (a) $\tilde{t} = 20000$; (b) $\tilde{t} = 80000$.

3.6.3 Oscillation d'un écoulement à faible nombre de Mach

Une première série de simulations est effectuée à très faible nombre de Mach ($M = 0.044$). Le nombre de Reynolds $Re_{\theta_0} = 310$ et le rapport $D/\theta_0 = 80$ sont constants pour toutes les simulations. Ces calculs peuvent être comparés aux expériences de Sarohia[182], Gharib & Roshko[65] ou encore Rockwell & Knisely[174]. Concernant le maillage, on a $\tilde{D} = 50$ et les dimensions du domaine extérieur sont $N_1 \times N_2 = 300 \times 200$. Le temps de relaxation est fixé à $\tilde{\tau} = 1.6 \times 10^{-4}$ et la viscosité artificielle pour assurer la stabilité du calcul est de $\tilde{\nu}_a = 0.1$.

La figure 3.17 montre le signal temporel de vitesse mesuré dans la couche de mélange pour un calcul effectué avec $L/\theta_0 = 102$. Au début du calcul ($\tilde{t} < 30000$), on constate que le signal est périodique ce qui semble indiquer la présence d'une oscillation auto-entret ne de l'écoulement. Ceci est confirmé par la visualisation de la vorticité à $\tilde{t} = 20000$ (figure 3.18 (a)). On distingue un tourbillon en train de s'écraser sur le bord aval tandis qu'un autre est situé au milieu de l'ouverture. On est donc dans un mode 2 d'oscillation. En ne considérant que la première partie du signal, le nombre de Strouhal est $St = 1.01$.

Pour $\tilde{t} > 30000$, l'oscillation disparaît progressivement et le signal devient fortement perturbé :

le caractère périodique a disparu. Sur la visualisation 3.18 (b), on voit effectivement que l'écoulement n'est plus organisé en mode. En comparaison avec la figure 3.18 (a), on constate que la cavité est maintenant complètement occupée par un champ de vorticit e assez complexe. Ce champ de vorticit e est à la fois liée à l'entraînement global de fluide int erieur par l'écoulement affleurant, mais il est surtout alimentée par l'injection p eriodique de vorticit e positive et n egative au bord aval de la cavit e (figure 3.18 (a)). Comme on l'a notée dans le paragraphe pr ec edent, les zones de vorticit e contra-rotative ne peuvent pas se m elanger en $2D$. Dans notre cas, l'écoulement de recirculation dans la cavit e, qui n'est pas physique, vient pousser la couche de m elange en amont de l'ouverture ce qui entraîne une d eviation globale de l'écoulement vers le haut. Comme le montre le signal temporel, ce m ecanisme est instationnaire mais il emp eche l'organisation coh erente des instabilit es de la couche de cisaillement. Dans certaines de ses simulations, Rowley[179] a également observée la disparition des oscillations auto-entretenues apr es quelques p eriodes. Dans son cas, l'écoulement passe en mode de sillage.

Plusieurs autres calculs ont  t e r ealis es en modifiant uniquement la longueur de la cavit e L . Ce m eme ph enom ene de blocage des oscillations par la recirculation dans la cavit e a  t e observée. Etant donnée que les calculs ne convergent pas vers une solution physique de l'écoulement, nous allons analyser les r esultats obtenus en ne consid erant que la premi ere partie des signaux ($\tilde{t} < 20000$).

Les figures 3.19, 3.20 et 3.21 montrent les r esultats des simulations pour trois autres valeurs du rapport L/θ_0 . Comme dans le premier calcul pr esent e ($L/\theta_0 = 102$), les simulations avec $L/\theta_0 = 61$ et $L/\theta_0 = 80$ font apparaître des oscillations auto-entretenues. Les nombres de Strouhal sont respectivement 0.57 et 0.91. Par contre, pour le dernier calcul effectuée avec $L/\theta_0 = 168$, il n'y a pas de ph enom ene p eriodique marquée: ce cas correspond à un cas de mode de sillage. En fait, la perte de coh erence de l'écoulement se produit à partir de $L/\theta_0 = 110$ environ.

On peut v erifier que les oscillations observ ees pour les cavit es $L/\theta_0 = 61$, $L/\theta_0 = 80$ et $L/\theta_0 = 102$ correspondent bien au m ecanisme de couplage aérodynamique (sheartone) en mesurant l'évolution de la phase des fluctuations de vitesse le long de l'ouverture. La phase est évaluée à partir du calcul de l'intercorr elation temporelle des signaux. En consid erant que l'on est en r egime quasi-p eriodique, la phase peut être imm ediatement d eduite du temps de retard entre le signal du point courant et un signal de r ef erence. Le signal de r ef erence est mesurée pr es du bord aval de l'ouverture. Pour limiter l'influence de l'écoulement de recirculation sur cette mesure, on se place dans la partie sup erieure de la couche de m elange[65, 227]. Le r esultat de cette analyse est donnée sur la figure 3.22. On retrouve bien la relation caract eristique de diff erence de phase $\Delta\Phi = 2n\pi$ entre les deux bords de l'ouverture (voir §1.1.2) avec $n = 1$ pour $L/\theta_0 = 61$ et $n = 2$ pour $L/\theta_0 = 80$ et $L/\theta_0 = 102$. On obtient une organisation en mode aérodynamique en accord avec les r esultats exp erimentaux[65, 182] pour ces trois valeurs de L/θ_0 .

Pour compl eter cette validation, le croissancement lin eaire de l'épaisseur de quantit e de mouvement moyenne de la couche de m elange peut être v erifi e. La figure 3.23 montre que l'on obtient bien une augmentation lin eaire de θ . De plus, on remarque que le taux de d eveloppement est sensiblement le m eme dans les trois cas ($d\theta/dx_1 \approx 0.024$). Ce r esultat est également en accord avec

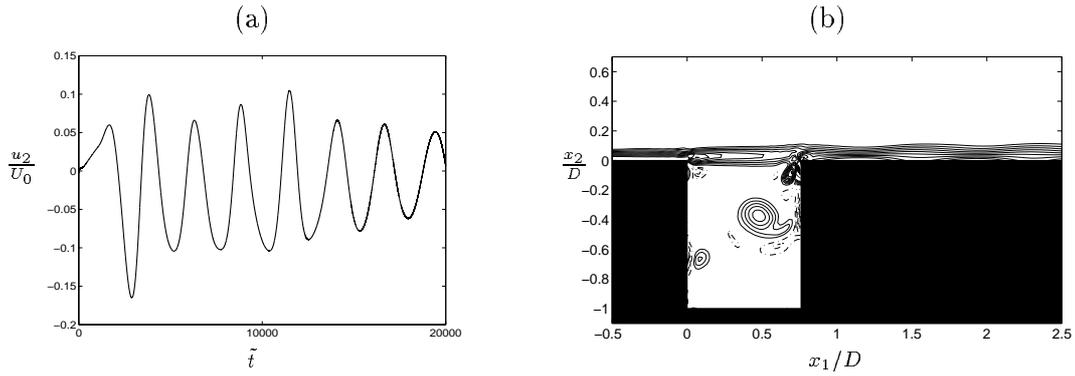


FIG. 3.19 – Cavité $L/\theta_0 = 61$, $M = 0.044$, $Re_{\theta_0} = 310$. (a) Signal de la vitesse transverse au point $x_1/L = 0.92$, $x_2/L = 0$. (b) Isocontours de vorticité entre -11000 et $+16000 \text{ s}^{-1}$: — isocontours négatifs; - - - isocontours positifs.

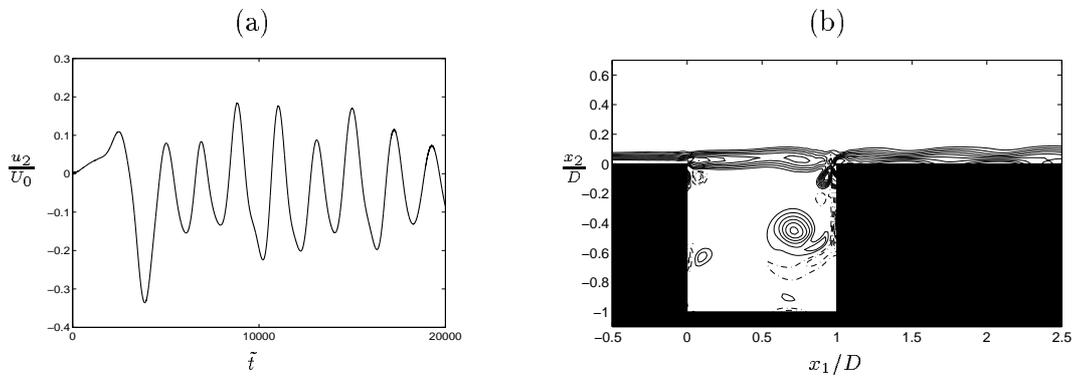


FIG. 3.20 – Cavité $L/\theta_0 = 80$, $M = 0.044$, $Re_{\theta_0} = 310$. (a) Signal de la vitesse transverse au point $x_1/L = 0.92$, $x_2/L = 0$. (b) Isocontours de vorticité entre -11000 et $+16000 \text{ s}^{-1}$: — isocontours négatifs; - - - isocontours positifs.

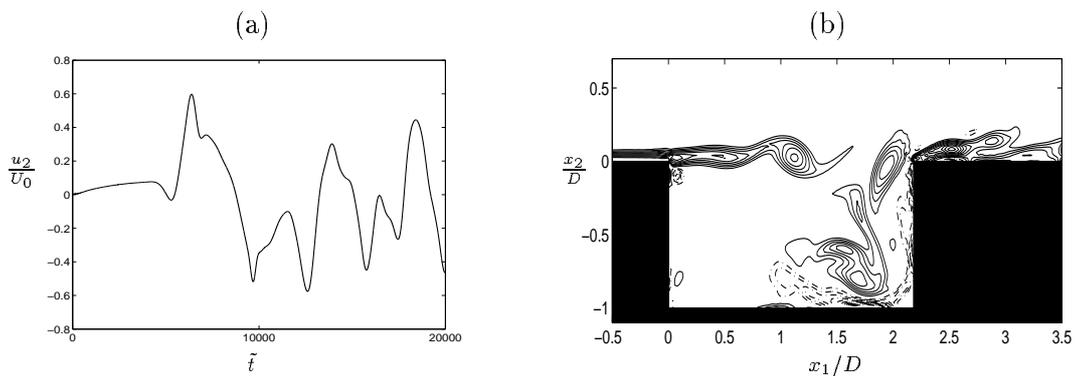


FIG. 3.21 – Cavité $L/\theta_0 = 168$, $M = 0.044$, $Re_{\theta_0} = 310$. (a) Signal de la vitesse transverse au point $x_1/L = 0.92$, $x_2/L = 0$. (b) Isocontours de vorticité entre -11000 et $+16000 \text{ s}^{-1}$: — isocontours négatifs; - - - isocontours positifs.

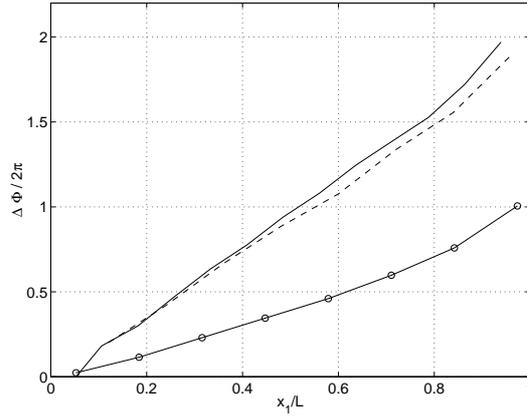


FIG. 3.22 – Evolution de la phase des fluctuations cohérentes dans le couche de mélange le long de la ligne $x_2/\theta_0 = 4.7$. \circ $L/\theta_0 = 61$; $- - -$ $L/\theta_0 = 80$; $—$ $L/\theta_0 = 102$.

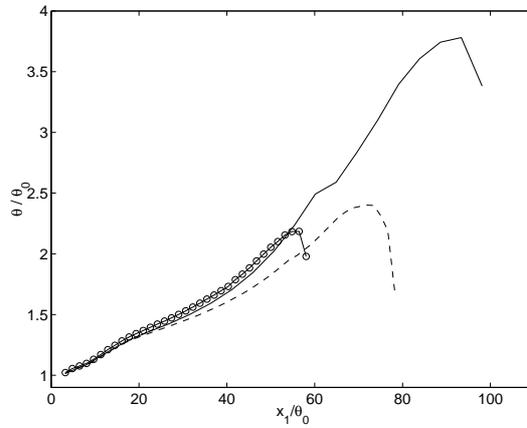


FIG. 3.23 – Evolution de l'épaisseur de quantité de mouvement le long de l'ouverture. \circ $L/\theta_0 = 61$; $- - -$ $L/\theta_0 = 80$; $—$ $L/\theta_0 = 102$.

les différentes données expérimentales[65, 174, 182]. Gharib & Roshko[65] trouvent une valeur de 0.031 pour les différents rapports L/θ_0 testés. Sarohia[182] obtient quant à lui $d\theta/dx_1 \approx 0.022$ en moyenne pour les configurations faisant apparaître des oscillations auto-entretenues.

Pour étudier le rayonnement acoustique généré par l'écoulement dans un domaine de calcul de taille limitée, il est nécessaire de se placer à un nombre de Mach plus élevé. En effet, en notation adimensionnelle, $\tilde{\lambda}_a$ est proportionnel à $\tilde{\theta}_0(\tilde{L}/\tilde{\theta}_0)/M$. Le rapport $\tilde{L}/\tilde{\theta}_0$ doit être compris globalement entre 50 et 100 pour pouvoir obtenir des auto-oscillations et $\tilde{\theta}_0$ ne doit pas être trop faible ($\tilde{\theta}_0 > 1$) pour obtenir une bonne représentation du profil de la couche limite amont.

3.6.4 Calcul du rayonnement acoustique émis par un écoulement affleurant à $M = 0.25$ une cavité rectangulaire de rapport $L/D = 2$

La taille maximale du domaine de calcul qu'il est possible d'atteindre sur la station de travail SGI utilisée est de $N_1 \times N_2 = 650 \times 520$ (338 000 nœuds). En prenant $\tilde{\theta}_0 = 1.95$, $L/\theta_0 = 52$ et $M = 0.25$, on peut espérer obtenir $\tilde{\lambda}_a \approx 400$ ($N_2/\lambda_a \approx 1.3$) si l'écoulement oscille sur son mode 2.

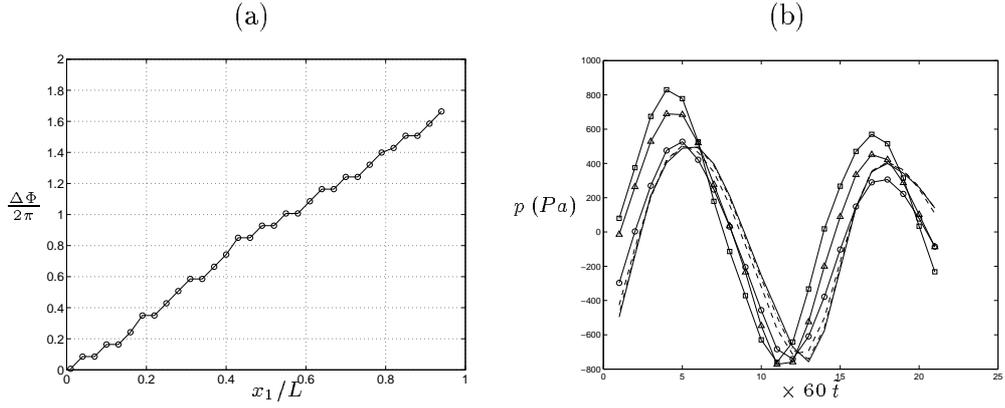


FIG. 3.24 – (a) Mesure de la phase des fluctuations de vitesse transverse le long de la ligne $x_2/\theta_0 = 3$. Portion des signaux temporels de pression le long de la ligne $x_2 = -D$: — $x_1 = 0$; \cdots $x_1/L = 0.2$; $---$ $x_1/L = 0.4$; \circ $x_1/L = 0.6$; \triangle $x_1/L = 0.8$; \square $x_1/L = 1$.

Le nombre de Reynolds est fixé à $Re_{\theta_0} = 167$ et on simule une cavité de dimension $L/D = 2$. Le temps de relaxation est de $\tilde{\tau} = 5.05 \times 10^{-3}$ et $\tilde{\nu}_a = 0.15$. Comme pour les simulations à nombre de Mach plus faible, la stabilité des auto-oscillations est détruite par l'effet de la recirculation de la vorticité à l'intérieur de la cavité. Moins d'une dizaine de périodes d'oscillation peut être obtenue. On peut remarquer que Rowley[179] n'obtient pas non plus d'oscillation auto-entretenue pour des simulations effectuées à $M = 0.2$ et $M = 0.3$ pour une cavité de dimension $L/D = 0.2$, avec $L/\theta_0 = 58.8$.

Au début du calcul, l'oscillation auto-entretenue se produit pour un nombre de Strouhal égal à 0.89. L'écoulement est donc organisé suivant le mode 2 aérodynamique. Comme précédemment, on peut vérifier cela en mesurant les variations de la phase des fluctuations de vitesse dans la couche de mélange. La figure 3.24 (a) montre que dans ce cas, la différence de phase entre les perturbations aux coins amont et aval de la cavité n'est pas égal à un multiple de 2π . On a $\Delta\Phi \approx 1.8 \times 2\pi$. Ceci n'est pas étonnant puisque pour un écoulement dont la vitesse n'est pas négligeable devant la vitesse du son, le temps de retour de la perturbation acoustique générée au coin aval n'est pas négligeable devant le temps de convection des tourbillons dans l'ouverture. Pour retrouver la condition de bouclage de phase entre le champ excitateur et les instabilités aérodynamiques au bord amont, le déphasage de la pression acoustique de rétroaction doit être pris en compte. Pour minimiser l'influence des fluctuations de pression aérodynamiques générées par la convection des tourbillons dans la couche de mélange, on mesure la pression au fond de la cavité[67, 179]. Sur la figure 3.24 (b), on a représenté une portion du signal de pression temporel pour six points de mesure. On voit que les signaux sont en phase sur toute la première moitié de la cavité. Sur la seconde moitié, le déphasage augmente mais reste faible. Cette évolution non-linéaire de la phase des fluctuations de pression au fond de la cavité est en accord avec les précédentes études numériques[67, 179]. Le déphasage total entre les bords amont et aval est de l'ordre de $0.16 \times 2\pi$. Le déphasage entre les fluctuations aérodynamiques au bord de séparation et le champ excitateur dans cette même zone est donc bien un multiple de 2π .

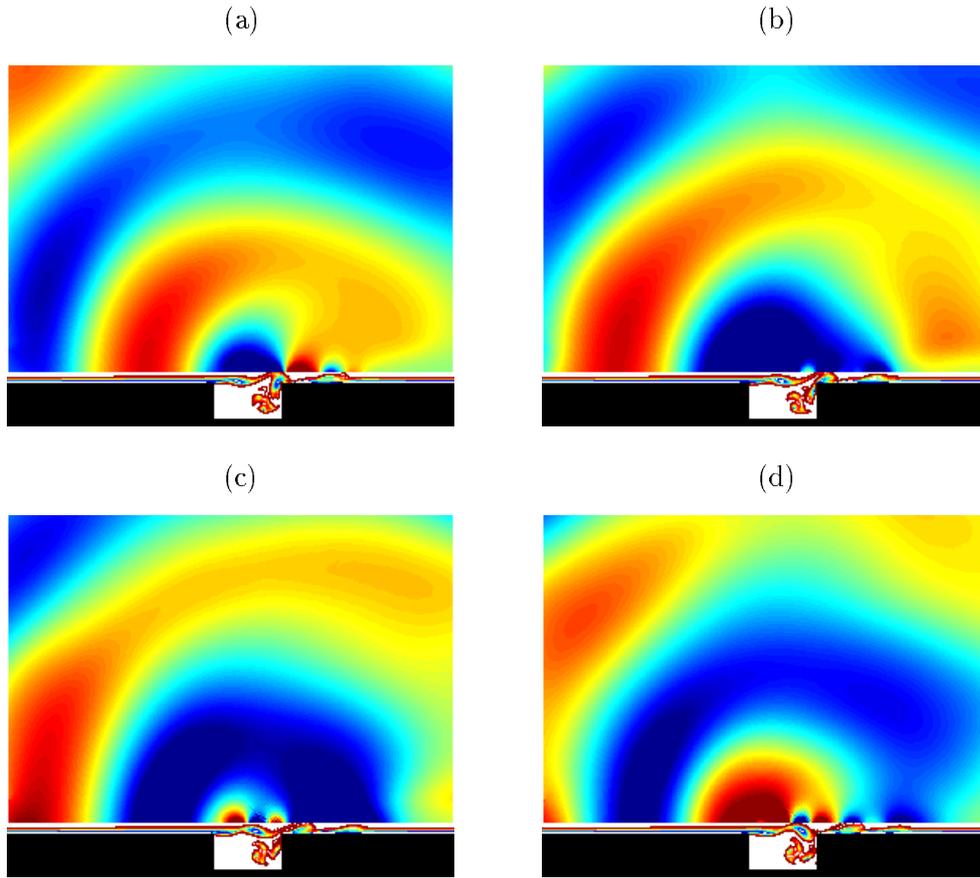


FIG. 3.25 – Cavité $L/\theta_0 = 52$, $M = 0.25$, $Re_{\theta_0} = 167$. Visualisation des isocontours de vorticité et des cartographies de pression pour quatre instants successifs d’un cycle d’oscillation. La pression est représentée entre -200 et $+200$ Pa et la vorticité entre $-700\,000$ et $-100\,000$ s^{-1} .

La figure 3.25 présente les cartographies de la pression dans le domaine de calcul et les champs de vorticité au-dessus de la cavité pour quatre instants au cours d’un cycle d’oscillation.

On remarque tout d’abord sur les cartographies que la zone éponge en sortie de domaine génère une déformation assez importante des ondes de pression. On voit également que les perturbations tourbillonnaires convectées dans la couche limite en aval de la cavité sont dissipées très rapidement en arrivant dans la zone éponge. La valeur du coefficient de dissipation ($\tilde{\sigma} = 1.5 \times 10^{-2}$) choisie dans ce calcul est donc visiblement trop importante. La zone éponge ramène de façon trop brutale les différentes variables macroscopiques, y compris la pression, vers leur valeur moyenne.

La figure 3.25 (a) correspond au moment où un tourbillon est en train de s’écraser sur le bord aval de la cavité. Un autre tourbillon est déjà visible dans le premier tiers de l’ouverture (mode 2 d’oscillation). La déformation du tourbillon au niveau du bord aval génère une onde de dépression importante qui semble se propager dans la direction amont. La figure 3.25 (b) confirme que le signal de pression négative se propage vers l’amont de l’écoulement. A l’instant de cette visualisation, le tourbillon a été compl t ment coupé en deux : une partie est convectée dans la couche limite aval et l’autre partie est injectée dans la cavité. A ce moment, c’est la zone de suppression de la couche de mélange, située entre deux tourbillons successifs, qui se trouve au

niveau du bord aval. Sur la figure 3.25 (c), on voit que l'onde de surpression se propage également de manière préférentielle dans la direction amont. On constate aussi sur cette figure qu'un autre front d'onde de pression négative semble se détacher de la cavité dans la direction aval. Cette onde qui apparaît avec retard par rapport la première perturbation négative de pression générée par l'impact du tourbillon semble provenir de la zone amont de la cavité. Ce signal correspond donc certainement à la réflexion de la perturbation principale négative sur la face verticale amont de la cavité. Sur la figure 3.25 (c), on voit nettement que les fronts d'onde se propageant en amont et en aval de la cavité ne sont pas concentriques : ils ne semblent pas issus de la même zone. Cette caractéristique est aussi visible sur les ondes de la figure 3.25 (b) qui sortent du domaine.

Il est difficile de valider ce résultat de simulation car il n'existe pas d'études numériques ou expérimentales qui décrivent la structure du champ rayonné par une cavité non résonante soumise à un écoulement à nombre de Mach faible. La plupart des simulations CAA du bruit des cavités ont été réalisées avec $M > 0.5$ sur des cavités peu profondes ($L/D > 2$) [39, 84, 69, 179, 186]. Dans toutes ces études, la directivité du rayonnement était nettement marquée dans la direction amont de l'écoulement. Pour des nombres de Mach plus faibles, seules des cavités résonantes ont été étudiées. Dans ce cas, le rayonnement est globalement omnidirectionnel [7, 122].

On peut cependant dire que la simulation présentée ici permet de reproduire les phénomènes de génération du bruit des cavités. En effet, on retrouve bien le mécanisme de source principal décrit dans les précédentes études [69] : une onde de dépression violente est générée au moment où le tourbillon entre en interaction avec le bord aval de l'ouverture. C'est la déformation brutale de la vorticité dans cette zone qui crée l'onde acoustique. Pour ce ph enom ne principal, la directivité amont est bien retrouvée.

La perturbation secondaire qui se propage en aval de la cavité peut être associée à la réflexion de l'onde principale sur les parois internes de la cavité. Bien entendu, les diff erents mécanismes de réflexion et d'interférence acoustique qui se produisent au voisinage de la cavité dépendent des rapports de longueur L/λ_a et D/λ_a ainsi que du nombre de Mach si celui-ci n'est pas négligeable. On ne peut donc pas comparer directement les rayonnements acoustiques obtenus dans des simulations réalisées avec des nombres de Mach et des rapports L/D diff erents.

3.7 Conclusions

Dans sa forme initiale, la méthode Boltzmann sur Réseau est un schéma instationnaire compressible qui résout les écoulements de fluide visqueux. Les premiers résultats d'un exemple de simulation classique (la cavité) dans le domaine de l'aéroacoustique numérique confirme bien la capacité de la méthode à calculer simultanément les fluctuations aérodynamiques et acoustiques. Ce résultat encourageant a été obtenu sans modification particulière du schéma numérique *de base*.

Dans ce chapitre, on donne également quelques voies de développement possibles pour optimiser les calculs aéroacoustiques. En particulier, nous avons vérifié numériquement le lien entre l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes et l'équation de Boltzmann sur Réseau. Le principal intérêt de ce résultat est de pouvoir intégrer dans la LBM des méthodes développées dans le cadre

des modèles de Boltzmann à vitesses discrètes[132], et éventuellement dans la théorie cinétique continue. Dans notre modèle, le lien entre les deux approches est utilisé pour la construction d'une condition aux limites qui minimise les réflexions acoustiques. D'autres travaux ont déjà été proposés concernant des conditions aux limites cinétiques pour les surfaces solides[5]. On pourrait aussi essayer d'exploiter la représentation du fluide au niveau particulaire pour tenter de définir une nouvelle approche de la modélisation de la turbulence[45].

Nous avons aussi étudié le problème de la propagation en écoulement ou de la propagation linéaire. La LBM est peu dissipative pour la propagation des ondes acoustiques, par contre sur le plan de la dispersion, elle est moins performante : pour la propagation sur de longues distances, un maillage assez fin est nécessaire. Des calculs à viscosité nulle (équations d'Euler) sont possibles. Dans ce cas, il faut pouvoir contrôler de façon fiable les instabilités numériques liées aux invariants de réseau pour assurer la stabilité du calcul. La technique du filtrage sélectif peut être utilisée.

Dans le cadre de la propagation linéaire, le lien avec la méthode TLM a été mis en évidence. Là encore, les méthodes spécifiquement développées dans cette approche pourraient être exploitées dans la LBM. Par exemple, des algorithmes permettant de modéliser des conditions aux limites non réfléchissantes ont été proposés[1].

Chapitre 4

Simulation du battement de toit ouvrant avec le code PowerFLOW

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que la LBM était un schéma numérique susceptible d'être exploité pour les calculs d'aéroacoustique. Bien entendu, ce schéma n'est pas aussi précis que les schémas spécifiquement développés pour la CAA[19, 17, 206]. Le problème est que ces schémas, généralement basés sur une formulation aux différences finies, sont très lourds en terme de taille et de temps de calcul. Ils sont de plus limités à des configurations géométriques très simples (maillage structuré cartésien ou curviligne). Pour des applications industrielles telles que le calcul du battement de toit ouvrant, un outil permettant le maillage d'une géométrie *3D* quelconque est nécessaire. De plus, dans le cadre d'une utilisation systématique de la méthode numérique dans les phases de développement des projets véhicules, une interface utilisateur simple est souhaitable. Ces contraintes ont conduit Renault à privilégier des codes commerciaux pour ses applications de calculs industriels, notamment dans le domaine de la mécanique des fluides. Dans cette optique, le choix de la LBM en comparaison aux autres méthodes numériques (discrétisation des équations de Navier-Stokes par éléments finis ou volumes finis) utilisées dans les codes commerciaux de CFD courants se justifie mieux. En fait, plusieurs de ces codes ont été évalués dans le cadre du problème de battement de toit ouvrant. Ainsi, certains des cas tests présentés dans ce chapitre ont été simulés avec ces différents codes. L'objectif était d'étudier la qualité des résultats numériques obtenus au regard des trois points du cahier des charges physique présentés dans la conclusion du premier chapitre (calcul instationnaire, modélisation fiable de la turbulence, calcul compressible) augmentés d'une quatrième contrainte de nature industrielle. Cette quatrième contrainte regroupe en fait différents aspects :

- Mise en œuvre facile et rapide des calculs (temps de préparation d'un calcul);
- robustesse du calcul (stabilité numérique) ;
- taille mémoire et surtout temps de calcul.

Dans ce document, nous ne présenterons pas les résultats comparatifs des différents codes pour diverses raisons. Tout d'abord, tous les cas tests n'ont pas été simulés avec tous les logiciels. La

comparaison ne serait donc pas exhaustive. De plus, comme cela est souvent le cas dans le domaine de la CFD, la qualité d'un résultat de calcul dépend fortement du temps passé à l'optimisation de la procédure de calcul (choix du maillage, choix du modèle de turbulence, choix des conditions aux limites, choix du solveur le cas échéant,...). Ainsi, après quelques efforts, certains codes se sont montrés performants sur certains cas tests. Avec d'autres codes, les simulations sur ces mêmes cas tests n'ont pas pu être suffisamment optimisées par manque de temps ou de moyen de calcul. En conclusion, bien que certains logiciels aient fait apparaître des défauts importants par rapport au cahier des charges (solveur instationnaire instable, pas de modèle compressible, utilisation d'un maillage structuré,...), le choix d'un code plutôt qu'un autre pourrait paraître assez subjectif. Cependant, comme on va le voir dans la suite de ce chapitre, c'est bien au regard du respect des quatre points du cahier des charges que le logiciel PowerFLOW, seul logiciel commercial basé sur la LBM, a été choisi pour la simulation du battement de toit ouvrant.

Il existe peu de travaux publiés concernant la simulation du battement de toit ouvrant. Ota *et al.*[155] proposent une simulation $2D$ (section médiane du véhicule) avec le code GOLDE qui résout les équations de Navier-Stokes compressibles (formulation volumes finis). La discrétisation spatiale est réalisée avec un maillage structuré par blocs. Le modèle de turbulence Baldwin-Lomax est utilisé. A l'aide d'une montée en vitesse, ils montrent que le phénomène de résonance peut être capté par le code. Malheureusement, l'hypothèse bidimensionnelle ne permet d'obtenir ni la bonne fréquence de battement, ni un niveau de pulsation correct. Ukita *et al.*[213] se placent en tridimensionnel mais leurs simulations sont réalisées avec un solveur incompressible (code NAGARE, formulation éléments finis). Aucun modèle de turbulence n'est utilisé. Sur un véhicule $3D$ complet, une seule simulation est effectuée à la vitesse critique expérimentale. Une oscillation auto-entretenu est obtenue à une fréquence assez proche de la fréquence de battement. On peut considérer que cette oscillation résulte du phénomène de couplage aérodynamique et qu'elle ne fait pas intervenir la résonance acoustique de l'habitacle (calcul incompressible). D'ailleurs, les fluctuations de pression sont mesurées non pas dans l'habitacle mais directement dans la couche de mélange, près du bord aval du toit ouvrant. L'effet de l'introduction d'un déflecteur est également étudié: une réduction du niveau des fluctuations est obtenue. Les visualisations montrent que l'écoulement est dévié au-dessus de l'ouverture. Ce même type d'approche est également proposé par Karbon & Singh[114]. Ils utilisent le code PAMFLOW qui résout les équations de Navier-Stokes incompressibles à l'aide d'une formulation éléments finis. Pour la modélisation de la turbulence, une viscosité de sous-maille de type Smagorinsky[194] est introduite. Pour la vitesse critique expérimentale, plusieurs calculs sont effectués en intégrant des modifications géométriques (déflecteur, toit ouvrant en partie refermé). Le signal de pression est mesuré dans l'habitacle. La variation de l'amplitude du battement par rapport au cas initial de référence (pas de déflecteur, toit complètement ouvert) est comparée à la variation obtenue expérimentalement. Pour les cas présentés, le calcul permet de retrouver les bonnes tendances.

4.1 Présentation du logiciel commercial PowerFLOW

Le logiciel commercial PowerFLOW, développé par la société Exa Corp.[56], est basé sur la méthode Boltzmann sur Réseau.

4.1.1 Rappel des principaux aspects du code PowerFLOW

Le modèle utilisé est le modèle $D4Q54$ [33] présenté dans le paragraphe 2.4.4. C'est un modèle thermique mais dans toute la suite nous ne nous intéresserons pas à cet aspect : à faible nombre de Mach et en l'absence de source de chaleur, l'écoulement est considéré comme isotherme.

Le modèle est tridimensionnel. Pour les cas bidimensionnels, la simulation est effectuée avec le même modèle sur un domaine de calcul d'une largeur de 3 cellules. Des conditions aux limites périodiques sont alors utilisées sur les faces latérales du domaine de calcul pour se placer dans les conditions $2D$.

L'algorithme[32] permettant de modéliser les différentes conditions aux limites est présenté dans le paragraphe 2.6.4. Il est basé sur le contrôle des flux de masse et de quantité de mouvement à travers les surfaces élémentaires qui composent la frontière. Les variables macroscopiques sont calculées à partir des fonctions de distribution dont les valeurs à la paroi sont obtenues par extrapolation de leurs valeurs aux nœuds intérieurs. Une approche de type volumique permet de prendre en compte, éventuellement, des conditions aux limites de géométrie quelconque.

Le maillage est un maillage cubique uniforme par blocs (voir §2.5.3). La gestion de ce type de maillage est bien sûr très facile mais le principal inconvénient est la difficulté de mailler avec précision les couches limites[130]. Dans notre application, nous verrons qu'il est nécessaire de mailler correctement uniquement la couche limite amont.

Sur le plan numérique, les valeurs des fonctions de distribution sont stockées en binaire comme des entiers sur 16 bits[209]. Concrètement, cela signifie que le calcul de l'équation de Boltzmann sur Réseau est réalisé sur le nombre de particule N_α occupant un état de vitesse. Cette fonction est définie par l'équation (2.94). Cela réduit la taille de stockage par rapport à un codage des g_α par des variables réelles à virgule flottante mais cela augmente le bruit de fond numérique[30].

4.1.2 Modélisation de la turbulence

Les fondements théoriques de l'intégration des modèles de turbulence dans la LBM ont été décrits dans le paragraphe 3.2. Pour résumer, on peut dire que la méthode de modélisation revient à introduire une viscosité turbulente ν_T dans le modèle initial : $\nu^e = \nu + \nu_T$. C'est donc une approche identique aux méthodes classiques de modélisation de la turbulence utilisées dans la simulation des équations de Navier-Stokes moyennées, basées sur l'expression du tenseur de Reynolds à partir du tenseur des taux de déformation.

Le modèle $k - \epsilon$ RNG

Le logiciel PowerFLOW dispose d'un seul modèle de turbulence : le modèle $k - \epsilon$ RNG[223]. Les équations de transport de l'énergie cinétique et du taux de dissipation sont rappelées dans l'annexe

D. Ces équations différentielles sont résolues sur le même maillage que celui utilisé pour l'équation de Boltzmann sur Réseau par un schéma de différences finies de Lax-Wendroff (second ordre) associé à un schéma explicite d'intégration temporelle[156]. Cependant, outre la dépendance de ν_T à k/ϵ , la viscosité turbulente dépend de manière dynamique des autres temps caractéristiques de l'écoulement via le coefficient C_μ . Cette modification est nécessaire pour atténuer l'effet de la surévaluation de la viscosité turbulente par ce type de modèle dans les calculs instationnaires (voir §3.2.1). En particulier, une dépendance construite sur l'hélicité de l'écoulement ($H_e = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\Omega}$) a été développée par Yakhot & Orszag. Ce modèle est utilisé de manière exclusive dans PowerFLOW. Il permet d'obtenir une viscosité turbulente relativement faible quand le taux d'hélicité est important. Ce modèle, protégé par contrat, n'a pas été rendu public.

Loi de paroi

Pour des applications industrielles à nombre de Reynolds élevé, une modélisation de la turbulence pour l'écoulement proche de la paroi est aussi nécessaire. Pour prendre en compte la nature turbulente de la couche limite, la loi logarithmique est utilisée. Cette loi de paroi indique que la vitesse tangentielle à la surface $|\mathbf{u}_t|$ est donnée par la relation suivante :

$$\frac{|\mathbf{u}_t|}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y_s u_*}{\nu} \right) + B \quad (4.1)$$

où $\kappa = 0.41$, $B = 5.0$ et y_s est la distance à la paroi du point considéré. Cette formule est théoriquement valable pour $y_s^+ = y_s u_* / \nu \geq 30$ mais elle commence à être acceptable pour $y_s^+ \geq 10$. La vitesse de frottement est définie par $u_* = \sqrt{\tau_p / \rho}$ où $\tau_p = \tau_v + \tau_t$ est le frottement total à la paroi. On peut définir un coefficient local de frottement C'_f par la relation suivante :

$$C'_f = \frac{\tau_p}{\rho |\mathbf{u}_t|^2 / 2} = \frac{\rho u_*^2}{\rho |\mathbf{u}_t|^2 / 2} \quad (4.2)$$

On remarque que ce coefficient ne correspond pas au coefficient de frottement classique défini à partir de la vitesse caractéristique de la couche limite $U(y_s \rightarrow \infty)$. Ce coefficient de frottement est construit à partir de la vitesse de glissement $|\mathbf{u}_t|$. Dans PowerFLOW, l'algorithme permettant d'imposer la loi de paroi turbulente est le suivant. Tout d'abord, la vitesse de glissement $|\mathbf{u}_t|$ est obtenue par extrapolation des fonctions de distribution intérieures. Le système de deux équations (4.1) et (4.2) à deux inconnues u_* et C'_f est résolu. Le coefficient de frottement visqueux est alors introduit dans la relation (2.98) (voir §2.6.4) pour imposer à la paroi la force de frottement tangentielle totale. On voit donc que la modélisation de la couche limite turbulente se fait par le contrôle de la force de frottement à la paroi et non pas par le contrôle de la vitesse de glissement. Pour une meilleure prédiction des phénomènes de décollement, un terme prenant en compte les gradients de pression adverses est introduit[210] dans la loi-log classique (4.1). Dans tous nos cas de simulations, le point de séparation de l'écoulement est fixé par une rupture soudaine du profil géométrique.

Dans une approche de CFD classique, on ne connaît pas a priori la vitesse de frottement à la paroi. La définition de la résolution spatiale à la paroi se fait donc par une succession de

simulations tests pour obtenir, au final, une taille de maille qui permette une application correcte de la loi de paroi ($y_s^+ \approx 30$). Dans notre cas, il est cependant possible d'évaluer une taille de maille approximative Δx valide de façon systématique. En effet, à la paroi, le frottement turbulent τ_t est négligeable devant le frottement visqueux τ_v et on a $\tau_v = \mu \partial |\mathbf{u}_t| / \partial n$. Si l'on suppose que le profil de vitesse moyenne est donné par la loi exponentielle (1.1), on obtient immédiatement que :

$$y_s^+ = \frac{\Delta x}{\theta_0} \sqrt{\frac{1}{2} Re_{\theta_0}} \quad (4.3)$$

Pour tous les cas de simulation effectués avec PowerFLOW et présentés dans la suite, le nombre de Reynolds Re_{θ_0} est compris entre 100 et 10000. En choisissant systématiquement $\Delta x \approx \theta_0$ pour le maillage de la couche limite amont, on assure la validité de l'application de la loi logarithmique puisque $8 \leq y_s^+ \leq 70$.

4.1.3 Contrôle de la stabilité numérique : viscosité de base

Comme tous les modèles Boltzmann sur Réseau, le modèle utilisé dans PowerFLOW souffre d'un problème de stabilité numérique quand $\tilde{\tau}_g$ tend vers $1/2$. D'après les relations (2.82) et (2.83) qui lient Δx , Δt et $\tilde{\tau}_g$, on voit que l'utilisateur ne peut choisir librement qu'un seul de ces trois paramètres. Dans la pratique, l'utilisateur fixe toujours Δx en fonction de la configuration simulée. La valeur de $\tilde{\tau}_g$ est alors :

$$\tilde{\tau}_g = \frac{\nu^e \tilde{c}_s}{c_s \hat{\theta} \Delta x} + \frac{1}{2}$$

Dans le cas de l'utilisation d'un maillage uniforme par bloc, Δx est bien entendu la valeur de la taille de maille du bloc. Ainsi, plus Δx est grand et plus $\tilde{\tau}_g$ est proche de $1/2$ ce qui peut compromettre la stabilité numérique si l'écoulement est en fort déséquilibre (gradients importants) dans la zone considérée (voir §3.3).

Pour éviter cet écueil, la solution radicale suivante est utilisée dans PowerFLOW : une valeur minimale limite de $\tilde{\tau}_g$ notée $\tilde{\tau}_{g,b}$ est fixée de telle sorte que le calcul soit stable dans toutes les configurations. La valeur limite $\tilde{\tau}_{g,b} = 0.505$ a été déterminée à l'aide de cas tests numériques basés sur des configurations extrêmes, c'est-à-dire des cas de simulation faisant apparaître des zones fortement sous-résolues[30]. Etant donné que le choix de Δx reste libre, cette sécurité implique une valeur minimale de la viscosité dans les différents blocs de résolution. Cette valeur minimale est appelée *viscosité de base* et elle est donnée par $\tilde{\nu}_b = (\tilde{\tau}_{g,b} - 1/2)\hat{\theta}$. Concrètement, cela signifie donc que, si $c_s = 340$ m/s, la viscosité effective du fluide simulé prend la valeur fixe $\nu_b \approx 0.9\Delta x$ si $\nu^e < \nu_b$.

Cette sécurité numérique semble donc très discutable puisque dans la plupart des cas, la viscosité de base est supérieure à la viscosité moléculaire. Il faut tout d'abord noter que cette sécurité n'est pas appliquée pour les cellules intervenant dans la condition de paroi solide. Ainsi, à la paroi, la viscosité effective est toujours égale à la viscosité moléculaire. Pour les autres zones de l'écoulement, deux arguments peuvent être apportés[30] pour justifier cette méthode de contrôle de la stabilité numérique. Tout d'abord, les zones maillées grossièrement sont généralement situées dans des zones à faible gradient de vitesse où l'écoulement est supposé être de type Eulerien. La valeur exacte de la viscosité n'a donc pas beaucoup d'importance. En ce qui concerne les zones

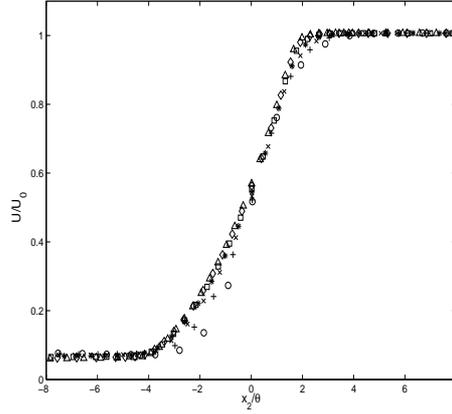


FIG. 4.1 – Vitesse moyenne $U = |\bar{u}|$ normalisée dans la couche de mélange. $x/\theta_0 = 26$; + : $x/\theta_0 = 53$; \times : $x/\theta_0 = 80$; * : $x/\theta_0 = 106$; \square : $x/\theta_0 = 133$; \diamond : $x/\theta_0 = 160$; \triangle : $x/\theta_0 = 186$.

cisaillées qui sont (en principe) maillées plus finement, la valeur généralement élevée de la viscosité turbulente ν_T permet d’assurer la condition $\nu^e > \nu_b$. Il reste cependant une zone caractéristique dans laquelle on peut craindre une différence importante entre la viscosité physique et la viscosité effective numérique. Il s’agit de la zone située juste après la séparation d’un écoulement d’une surface solide. En effet, dans cette zone, la viscosité passe progressivement de sa valeur moléculaire à une valeur plus élevée intégrant la viscosité turbulente. Or, comme on l’a vu dans le chapitre 1, pour un écoulement affleurant une cavité, cette zone est très importante pour l’excitation initiale des instabilités de la couche de mélange.

4.2 Simulations de principe

La première étape de la validation du code PowerFLOW pour la simulation du battement de toit ouvrant est de vérifier sur des cas tests simples que cet outil permet de simuler indépendamment les différents mécanismes physiques qui entrent en jeu dans le phénomène d’oscillation auto-entretenu d’un écoulement affleurant une cavité. Dans cette optique, la décomposition des différents mécanismes est la même que celle définie dans le chapitre 1, c’est-à-dire : instabilité d’une couche de mélange libre, couplage aérodynamique (sheartone), résonance acoustique de la cavité, couplage aérodynamique / acoustique.

4.2.1 Couche de mélange libre

Le premier cas test consiste à simuler une couche de mélange libre qui se développe après la séparation d’un écoulement d’une plaque plane. Le nombre de Reynolds est de $R_{\theta_0} = 110$. La vitesse de l’écoulement, au-dessus de la plaque, est de $U_0 = 18$ m/s. Sous la plaque de séparation, de hauteur $h/\theta_0 = 4.3$, l’écoulement moyen est nul. Ce cas correspond exactement à la configuration étudiée dans le paragraphe suivant sans le bord d’impact (voir figure 4.4). La taille de maille minimale est de $\Delta x = 1 \times 10^{-4}$ m. Ce cas est simulé en bidimensionnel.

Une des principales caractéristiques des couches de mélange turbulentes est l’auto-similarité des profils moyens. Cette caractéristique est associée à une croissance linéaire de l’épaisseur de

quantité de mouvement. La figure 4.1 présente les profils de vitesse moyenne en fonction de la distance longitudinale. L'auto-similarité des profils est bien respectée. Le taux de croissance de l'épaisseur de quantité de mouvement est de $\partial\theta/\partial x_1 = 0.035$. Cette valeur est en accord avec le résultat obtenu par exemple par Rogers & Moser[176].

Ce calcul instationnaire permet de simuler le développement naturel des instabilités aérodynamiques de la couche de mélange. Sur le graphe 4.2 (a), le spectre des fluctuations de vitesse transverse fait apparaître un maximum associé à la fréquence de passage des instabilités tourbillonnaires. On peut comparer les fréquences de ces instabilités avec les fréquences prédites par la théorie linéaire (§1.1.1). Le résultat de cette comparaison est donné sur le graphe 4.2 (b). On remarque que la fréquence des instabilités simulées évolue en paliers. Ce comportement est dû au fait que le développement instationnaire de la couche de mélange n'est assuré que par le phénomène d'appariement de tourbillons. Ce développement simplifié de la couche de mélange est notamment dû au caractère bidimensionnel de la simulation. Cette évolution caractéristique de la fréquence prédominante a déjà été observée par Bastin *at al.*[9] qui avaient effectué une simulation RANS instationnaire d'une couche de mélange plane. Malgré l'évolution en paliers, la fréquence des instabilités les plus amplifiées est relativement proche de la fréquence théorique.

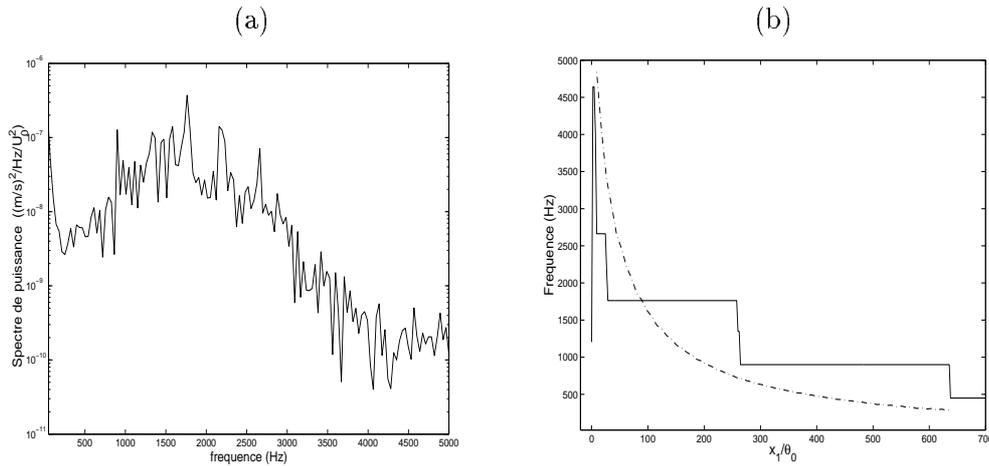


FIG. 4.2 – (a) Spectre de puissance adimensionnel de u_2 pour le point $x_1/\theta_0 = 150$, $x_2 = 0$. Spectre réalisé avec 2 moyennes sans recouvrement, $\Delta f = 36$ Hz. (b) Evolution de la fréquence de l'instabilité la plus amplifiée en fonction de la distance longitudinale: — simulation; - - - théorie linéaire.

Les figures 4.3 (a) et (b) montrent l'évolution des taux de turbulence dans la couche de mélange définis par :

$$\sigma_{11} = \frac{\sqrt{(u_1 - \bar{u}_1)^2}}{U_0} \quad \text{et} \quad \sigma_{22} = \frac{\sqrt{(u_2 - \bar{u}_2)^2}}{U_0}$$

On voit tout d'abord que la croissance en amplitude des fluctuations est saturée à partir d'une distance d'environ $x_1/\theta_0 = 80$. Les profils de taux de turbulence font apparaître des pics secondaires autour du maximum principal. Ce type de profil est caractéristique des taux de fluctuations générés par le passage de tourbillons discrets[61, 174, 199]. Il n'est donc pas étonnant de retrouver

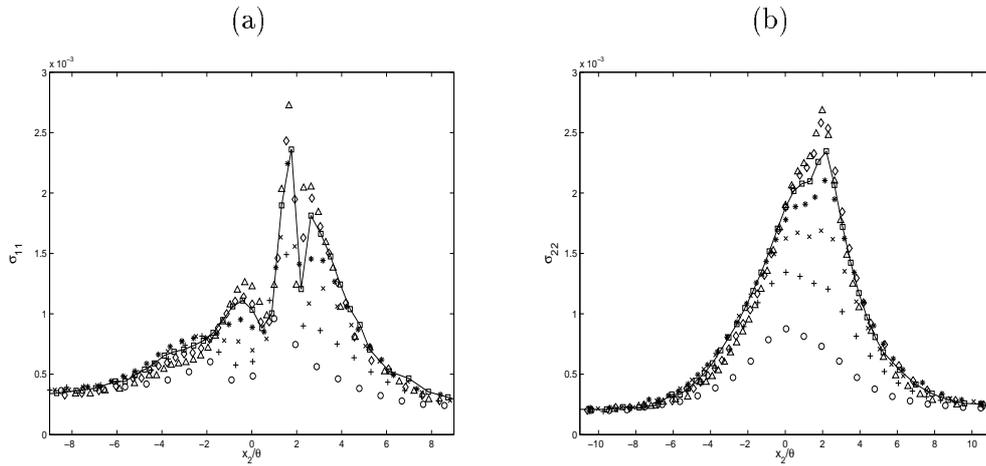


FIG. 4.3 – Taux de turbulence dans la couche de mélange libre. (a) σ_{11} ; (b) σ_{22} . \circ $x_1/\theta_0 = 26$; $+$ $x_1/\theta_0 = 53$; \times $x_1/\theta_0 = 80$; $*$ $x_1/\theta_0 = 106$; \square $x_1/\theta_0 = 133$; \diamond $x_1/\theta_0 = 160$; \triangle $x_1/\theta_0 = 186$.

ce type de profil dans cette simulation qui ne calcule que les plus grosses structures de l'écoulement turbulent. Ainsi, même si l'on ne peut pas comparer directement ce calcul avec des mesures de la turbulence dans une couche de mélange pleinement turbulente à haut nombre de Reynolds[154], on remarque que les taux de turbulence simulés sont très faibles par rapport aux taux habituellement obtenus ($\sigma_{ii} = O(10^{-1})$). Cette sous-estimation de l'amplitude des fluctuations peut être associée à un amortissement trop important introduit par la viscosité turbulente. Si l'on considère le modèle de turbulence utilisé dans PowerFLOW, le terme principal visant à réduire la viscosité turbulente pour les écoulements instationnaires hors équilibre n'a aucun effet dans les simulations bidimensionnelles : $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0$ par construction en 2D. A quelques détails près, le modèle de turbulence se réduit donc au modèle classique $k - \epsilon$ (RNG) trop dissipatif[9, 120].

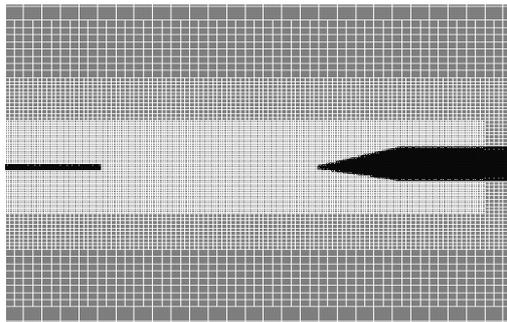


FIG. 4.4 – Configuration étudiée pour la simulation du sheartone. L'écoulement affleurant va de la gauche vers la droite. Dans la partie inférieure du domaine, l'écoulement moyen est nul.

4.2.2 Simulation du sheartone

Le cas expérimental de Ziada & Rockwell[228] est choisi pour la simulation du phénomène de couplage aérodynamique. Le principal avantage de leur configuration est l'absence complète de

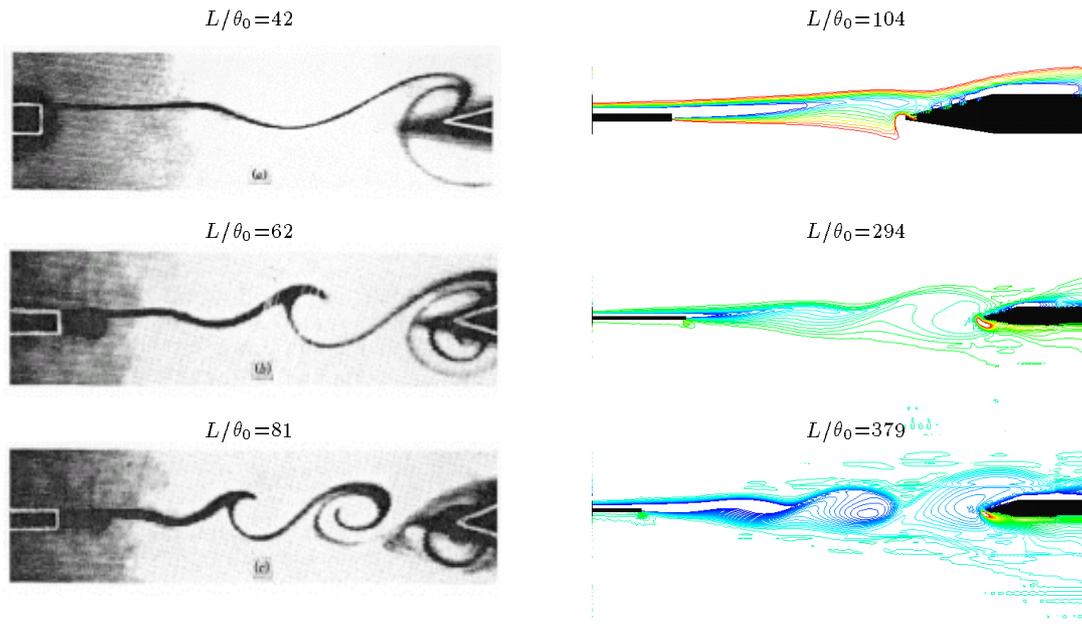


FIG. 4.5 – Comparaison expérience[228] (photos de gauche)/ simulation (images de droites) de la structure de l'écoulement pour les trois premiers modes aérodynamiques. Pour la simulation, on représente les isocontours de la composante Ω_3 de la vorticité.

cavité : aucun effet de résonance ou de recirculation n'intervient dans le mécanisme de couplage. Ce cas correspond au cas de la couche de mélange du paragraphe précédent dans lequel on introduit un bord d'impact à une distance variable L (figure 4.4). La simulation est bidimensionnelle.

Sur le plan expérimental, ce type de configuration pose de gros problèmes pratiques pour assurer l'équilibre des pressions statiques moyennes dans les zones inférieure et supérieure[228]. Sur le plan numérique, le même problème se pose également. En effet, pour tous les types de conditions aux limites appliquées aux trois frontières du domaine inférieur (vitesse fixée / pression libre, pression fixée / vitesse libre, pression et vitesse fixées), la pression statique moyenne de cette zone diminue systématiquement ce qui entraîne une déviation importante de la couche de mélange vers le bas. Pour annuler cette dérive de la pression moyenne, la seule méthode efficace a été d'imposer des conditions aux limites solides sur les frontières du domaine inférieur. Ces conditions aux limites sont placées très loin de la zone de mélange (les dimensions du domaine inférieur sont de l'ordre de $35L \times 25L$), en espérant ainsi pouvoir négliger les effets de cette représentation non physique de la configuration expérimentale.

La figure 4.5 présente les champs de vorticité obtenus pour trois valeurs de la distance d'impact L/θ_0 . La structure de l'écoulement pour les trois premiers modes aérodynamiques est similaire à celle observée expérimentalement. Cependant, on remarque que les modes aérodynamiques successifs ne sont pas obtenus pour les mêmes valeurs du rapport L/θ_0 . Comme on peut le voir sur la figure 4.6, ce décalage des longueurs d'impact est associé à un décalage de la fréquence d'oscillation préférentielle. Ce graphe est à comparer au graphe 1.5 : une longueur d'impact plus

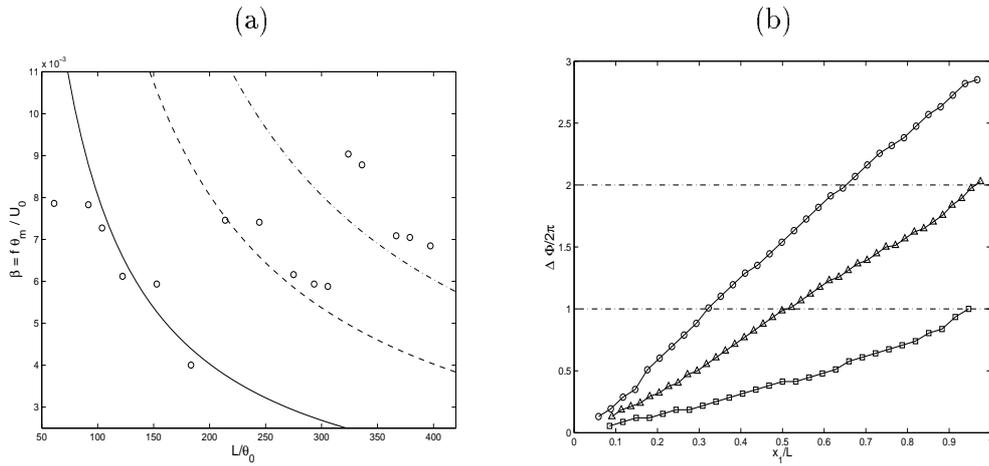


FIG. 4.6 – (a) Evolution de la fréquence de l’oscillation simulée en fonction de la longueur d’impact (\circ). Courbes théoriques de la fréquence du sheartone : — $n = 1$; - - - $n = 2$; - · - · $n = 3$. (b) Evolution de la phase des fluctuations de vitesse transverse le long de l’ouverture ($x_2 = 0$). \square $L/\theta_0 = 104$; \triangle $L/\theta_0 = 294$; \circ $L/\theta_0 = 379$.

grande implique une fréquence d’oscillation centrale plus faible ($\beta \approx 0.007$) que la fréquence expérimentale ($\beta = \beta_{max} = 0.0167$) qui est égale à la fréquence théorique des instabilités les plus amplifiées. Cette constatation est surprenante car on vient de montrer dans le paragraphe précédent que le code permettait de prédire relativement correctement la fréquence des instabilités les plus amplifiées de la couche de mélange. Ainsi, les modes aérodynamiques semblent être accrochés par une autre fréquence préférentielle. On montrera dans le paragraphe 4.2.3 que cette fréquence correspond à une fréquence de résonance acoustique du domaine inférieur fermé par des conditions aux limites solides.

Ce cas test qui avait été mis en œuvre avant de connaître la très bonne capacité de la LBM à prendre en compte les phénomènes acoustiques n’est donc pas réellement un exemple de simulation du sheartone. L’écoulement est en fait couplé avec une résonance de cavité. Cependant, ce couplage acoustique reste faible puisque l’on constate sur la figure 4.6 (a) que l’évolution de la fréquence en fonction de L/θ_0 suit bien une courbe du type $f = nU_c/L$, où U_c est pris égal à $U_0/2$. Pour les trois simulations visualisées sur la figure 4.5, la variation de la phase des fluctuations transverses de la vitesse est aussi étudiée. Pour cela, on calcule l’inter-corrélation temporelle entre le signal de référence pris en un point proche du bord aval et un point courant pris dans le plan $x_2 = 0$. Pour ces cas (figure 4.6 (b)), la relation de phase $\Phi_L - \Phi_0 = 2n\pi$ est bien vérifiée.

4.2.3 Propagation et résonance acoustique

L’étape suivante est de vérifier la bonne prise en compte des phénomènes acoustiques par le modèle Boltzmann sur Réseau intégré dans PowerFLOW.

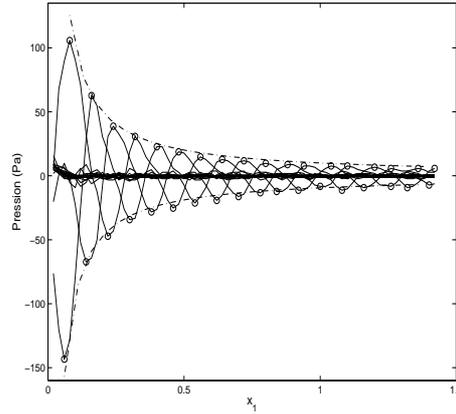


FIG. 4.7 – *Etude de la décroissance de l’amplitude d’une impulsion initiale de pression.* — \circ profil de la pression au cours du temps; - - - décroissance théorique en $1/r$.

Propagation d’une impulsion de pression dans un milieu au repos

Une surpression initiale est imposée dans une sphère de rayon $3\Delta x$ placée au milieu d’un domaine de calcul tridimensionnel maillé uniformément. Ce domaine a pour dimension $3 \times 3 \times 3 \text{ m}^3$. Cette impulsion initiale donne naissance à une onde acoustique sphérique formée d’un pic positif et d’un pic négatif. Sur la figure 4.7, la décroissance numérique de l’amplitude des pics de pression est comparée à la décroissance théorique sur un demi-axe cartésien du domaine. L’accord avec la décroissance en $1/r$ est bon. On peut noter sur le signal de pression, l’importance du bruit de fond numérique. Sur ce cas, il est d’environ $\pm 3 \text{ Pa}$.

Test des conditions aux limites sous excitation acoustique

A l’aide d’une source de pression impulsionnelle, on peut étudier le comportement des différentes conditions aux limites de PowerFLOW sous excitation acoustique. Cette étude est réalisée en bidimensionnel. Les différentes conditions aux limites imposées sont celles utilisées dans les diverses simulations. Sur le plan horizontal inférieur, on impose une condition de paroi solide (application de la loi de paroi). En entrée et sur la frontière supérieure, on utilise la condition de vitesse fixée ($\mathbf{u} = (0, 0, 0)$) / pression libre. Enfin pour la condition de sortie, la condition pression fixée / vitesse libre est choisie. On rappelle (voir §2.6.4) que la notion de vitesse ou pression libre signifie en fait que leur valeur est extrapolée à partir des variables du domaine intérieur. En prenant pour référence le taux de réflexion sur la paroi solide (taux de réflexion de 100%), on peut étudier les différents taux de réflexion des autres conditions aux limites. Cette approche est similaire à celle utilisée dans le paragraphe 3.5.2. Le domaine de calcul est initialisé avec une impulsion Gaussienne de pression (voir §3.1.2) avec $a_P = 0.02$ et $b_P = 12$. Le maillage est uniforme (100×100). La figure 4.8 (a) montre les isocontours de pression après 80 pas de temps de calcul. Pour les frontières fluides, on distingue l’onde réfléchiée par les conditions aux limites. L’amplitude de l’onde réfléchiée est beaucoup plus faible que l’onde réfléchiée sur la frontière solide. Cela est confirmé par le tracé du profil de pression instantanée le long des axes x_1 et x_2 passant par le milieu du domaine (figure 4.8 (b)). Le taux de réflexion peut être estimé à 14%. La condition de

sortie de pression fixée a le même taux de réflexion que la condition de vitesse fixée. Même si ces conditions aux limites ne sont pas parfaites pour la sortie des ondes acoustiques, leur taux de réflexion relativement bas permettra de négliger l'effet des ondes réfléchies sur les frontières du domaine si celles-ci sont placées assez loin de la zone d'étude.

En complément, on peut noter l'importance du bruit de fond numérique sur la figure 4.8 (a). Dans l'étude du modèle $D2Q9$ (§2.6.4), ce même cas test a été étudié avec $a_P = 0.001$. Avec PowerFLOW, cette amplitude est trop faible : le signal utile est inférieur au bruit de fond.

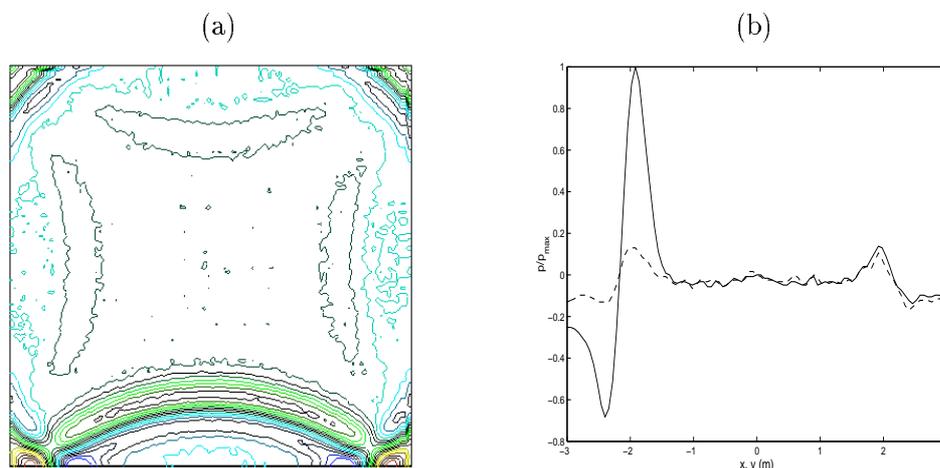


FIG. 4.8 – Comportement des différentes conditions aux limites sous excitation acoustique. Frontière inférieure : paroi sans glissement. Frontières supérieure et gauche : vitesse fixée / pression libre. Frontière droite : pression fixée / vitesse libre. (a) Isocontours de pression. (b) Profil de pression suivant les droites de direction (—) x_2 et (---) x_1 passant par le centre du domaine.

Réponse acoustique d'une cavité de Helmholtz

Pour le problème du battement de toit ouvrant, l'aspect acoustique le plus important à prendre en compte est la résonance de Helmholtz de l'habitacle. Le test de la simulation d'une résonance d'une cavité de Helmholtz est réalisé sur la configuration étudiée par Nelson *et al.*[150, 151]. Une coupe de la cavité est présentée sur la figure 4.9. Cette géométrie sera également utilisée pour la simulation du couplage écoulement / résonance (§4.2.4). La largeur et la profondeur du volume interne sont respectivement 0.058 m et $D = 0.08$ m. La longueur et la hauteur du col sont $L = 0.01$ m et $h = 6 \times 10^{-4}$ m. Le maillage utilisé ainsi que les points de mesures de la pression sont représentés sur la figure 4.9 (a). Les différentes conditions aux limites du domaine de calcul sont décrites dans le paragraphe précédent. Elles sont toutes placées à une distance de $150L$ du centre de l'ouverture. Ce calcul est réalisé en bidimensionnel.

En l'absence d'écoulement affleurant ($U_0 = 0$), la cavité est excitée par une impulsion de pression initiale placée à l'extérieur de la cavité. La fonction de transfert entre les pressions aux deux points de mesure est alors comparée à la fonction de transfert calculée par la méthode intégrale

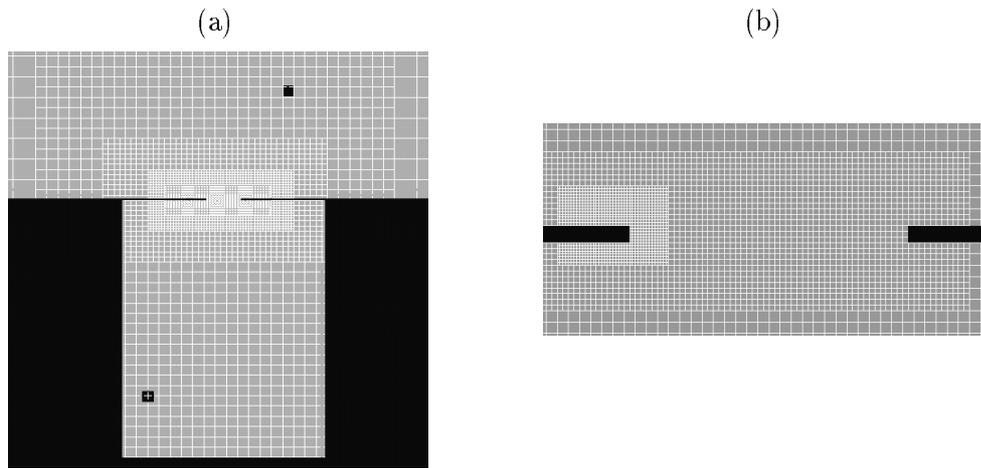


FIG. 4.9 – (a) Coupe dans le plan médian ($x_3 = 0$) de la cavité étudiée par Nelson et al.[150, 151]. Les deux carrés noirs représentent la position des points de mesures de la pression. (b) Zoom sur le maillage au niveau de l'ouverture.

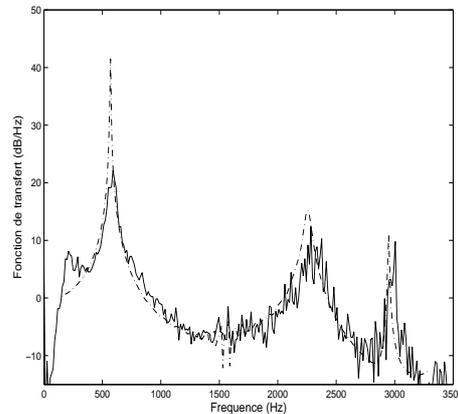


FIG. 4.10 – Fonction de transfert de la pression entre le point extérieur et le point dans la cavité. — Simulation PowerFLOW; - - - Simulation par la méthode intégrale des éléments de frontière.

des éléments de frontières. Ce calcul acoustique est réalisé avec le logiciel Sysnoise[129]. Sur la figure 4.10, on voit que la corrélation entre les deux calculs est très bonne tant pour la prédiction des fréquences que pour l'évaluation du facteur de qualité des résonances. A titre indicatif, la différence entre les fréquences prédites par les deux méthodes pour le troisième pic de résonance est de l'ordre de 2%. La fréquence de Helmholtz obtenue est de 570 Hz. Elle est légèrement inférieure à la fréquence mesurée expérimentalement[150] ($f_r^{exp} \approx 600$ Hz). Cette différence peut être attribuée à l'hypothèse bidimensionnelle du calcul. Cependant, comme on le verra dans le paragraphe suivant, la fréquence de résonance de la cavité calculée en 3D est également inférieure à la fréquence de résonance expérimentale. L'autre facteur qui peut expliquer ce décalage est la différence entre le dispositif expérimental réel et la représentation simplifiée que l'on en a faite dans le calcul. En effet, dans l'expérience, l'orifice de la cavité de Helmholtz n'est pas complètement bafflé[150], contrairement aux configurations numériques 2D et 3D. Un orifice bafflé possède

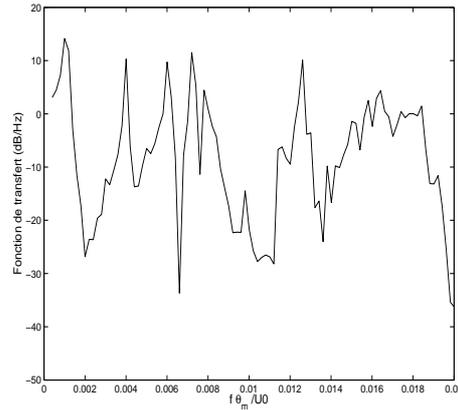


FIG. 4.11 – Fonction de transfert de la pression entre un point dans le domaine supérieur et un point dans le domaine inférieur du cas test présenté dans le paragraphe 4.2.2. L'excitation impulsionnelle initiale est placée dans le domaine supérieur. Il n'y a pas d'écoulement affleurant. La fréquence est adimensionnalisée avec les caractéristiques de l'écoulement données dans le paragraphe 4.2.2.

une correction d'extrémité plus importante qu'un orifice non bafflé[157], ce qui tend à réduire la fréquence de résonance de Helmholtz de la cavité (équation 1.12).

On voit donc sur cet exemple que le code PowerFLOW permet de capter de façon précise les phénomènes de résonance de cavité. On peut donc vérifier maintenant que le décalage en fréquence du phénomène de sheartone observé dans le paragraphe 4.2.2 est bien associé à un effet d'une résonance acoustique du domaine de calcul situé en dessous de l'ouverture. La figure 4.11 montre la fonction de transfert entre un point situé dans le domaine supérieur et un point situé dans le volume inférieur. Des pics de résonance apparaissent nettement. En particulier, un pic est présent à une fréquence proche de $f\theta_m/U_0 = 0.007$ où θ_m et U_0 sont les caractéristiques de l'écoulement simulé dans le paragraphe 4.2.2. Cette fréquence correspond bien à la fréquence centrale d'auto-oscillation de l'écoulement.

4.2.4 Simulation d'un écoulement affleurant une cavité de Helmholtz

Le cas de la cavité de Helmholtz étudiée par Nelson *et al.*[150, 151] (figure 4.9) est maintenant simulé avec un écoulement affleurant. D'après le graphe d'un profil de vitesse moyenne dans l'ouverture[150], l'épaisseur de quantité de mouvement initiale a été évaluée à $\theta_0 = 1 \times 10^{-4}$ m, ce qui conduit à $L/\theta_0 = 100$. Pour contrôler l'épaisseur de la couche limite amont dans le calcul, on fixe sa longueur de développement avant le bord de séparation : cette distance correspond au début de l'application de la condition de paroi non glissante (application de la loi de paroi). En amont de ce point, une condition de paroi glissante est appliquée.

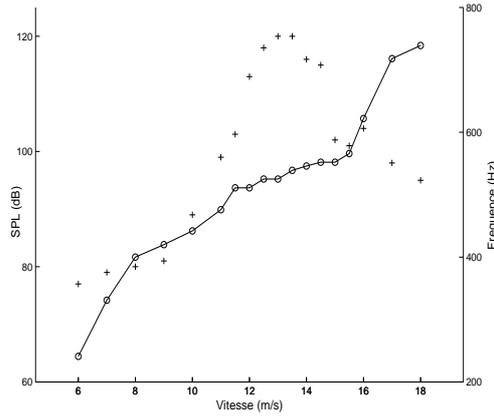


FIG. 4.12 – Evolution de la fréquence (\circ) et de l'amplitude ($+$) de la composante principale du signal de pression dans la cavité en fonction de la vitesse de l'écoulement affleurant.

Simulation 2D

Dans le paragraphe 1.1.4, il a été montré que la meilleure méthode pour identifier un phénomène de couplage entre un écoulement affleurant oscillant et une résonance acoustique est d'étudier l'évolution de la fréquence et du niveau d'oscillation en fonction de la vitesse de l'écoulement. La figure 4.12 présente les résultats de simulations 2D de la cavité de Nelson pour une vitesse variant de 6 à 18 m/s. En suivant la fréquence et le niveau des fluctuations de pression au point de mesure intérieur, on constate le phénomène d'accrochage de l'oscillation par la résonance de Helmholtz : autour de la vitesse critique (≈ 13.5 m/s), la fréquence est stabilisée autour de f_r et le niveau atteint un maximum. Le nombre de Strouhal est alors de $St = fL/U_0 = \tilde{c}_r = 0.42$. Comme le confirme l'étude de la vorticité dans l'ouverture (figure 4.13), ce couplage correspond bien à la coïncidence des fréquences entre le mode aérodynamique 1 et la fréquence de résonance de Helmholtz. Pour chaque vitesse simulée, le calcul est réalisé pour 300 000 pas de temps, ce qui représente environ 0.07 seconde de temps physique. Pour le traitement des signaux, le transitoire initial du calcul est supprimé (environ 20 000 itérations). Pour compléter l'analyse de ces résultats, les spectres de la pression acoustique sont tracés (figure 4.14) pour six vitesses successives. On retrouve bien le comportement typique d'un phénomène de couplage acoustique (voir figure 1.11).

On peut noter que sur le plan expérimental, il y a une incertitude sur la vitesse critique d'oscillation. En effet, dans le premier article[150], la vitesse critique donnée est de 22 m/s. Cette vitesse associée à une fréquence d'oscillation de 600 Hz conduit à un nombre de Strouhal de 0.27. Ce nombre de Strouhal très faible est généralement mesuré pour des couplages écoulement/résonance forts[48, 121]. D'après les données expérimentales (figure 1.9 (a)) l'auto-oscillation étudiée peut être class e dans la catégorie des oscillations d'amplitude modérée ($|u_a|/U_0 \approx 5.6 \times 10^{-2}$). De plus, les visualisations de l'écoulement[150] montrent que,   la fin du cycle, le tourbillon s'écrase contre le bord aval de l'ouverture : une partie de la vorticité est injectée dans la cavité et l'autre partie est convectée en aval par l'écoulement affleurant. Ce comportement correspond bien à un mécanisme de couplage d'amplitude modérée. Pour des couplages forts, le tourbillon est généralement éjecté en totalité de l'ouverture sous l'effet de l'écoulement transverse acoustique qui est dirigé vers le

haut pendant la seconde moitié du cycle[48, 121].

Dans le second article de Nelson *et al.*[151], la vitesse critique est rectifiée à 12 m/s. Cette fois, cette vitesse semble un peu faible car elle conduit à un nombre de Strouhal exactement égal à 0.5. En présence d'un couplage avec une résonance acoustique, la vitesse de convection adimensionnelle ($\tilde{c}_r = St$ pour le premier mode aérodynamique) est en général inférieure à 1/2[54, 76, 118]. Récemment, Nelson[149] a confirmé l'incertitude de la mesure de la vitesse de l'écoulement affleurant sur son dispositif expérimental. Il pense que la vitesse critique réelle se situe entre 12 et 22 m/s.

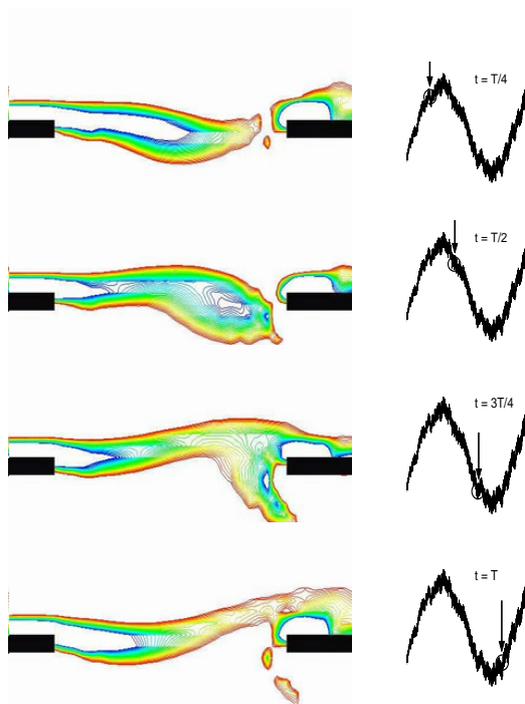


FIG. 4.13 – Isocontours de vorticité dans le col du résonateur pour quatre instants successifs : $-31240 \text{ s}^{-1} \leq \Omega_3 \leq -13600 \text{ s}^{-1}$. Sur la droite : signal de pression dans la cavité.

Pour la vitesse critique numérique, la visualisation (figure 4.13) de quatre contours successifs de vorticité montre que le trajet du tourbillon dans l'ouverture est conforme aux visualisations expérimentales. On note en particulier qu'un nouveau tourbillon est généré au moment où la pression dans la cavité atteint son minimum. Cette constatation est en accord avec les précédentes études expérimentales[23, 54, 76, 150].

Simulation 3D

La cavité de Nelson a été également simulée en 3D. Pour des raisons de temps de calcul, une étude complète de l'oscillation en fonction de la vitesse n'a pas été réalisée. Il était en effet initialement prévu d'effectuer uniquement une simulation à la vitesse critique expérimentale, qui est inconnue[149]. En particulier, les premières simulations montrent qu'aucune des deux vitesses critiques (22 et 12 m/s) données par Nelson *et al.*[150, 151] ne correspond à une situation d'oscillation auto-entretenu. Après plusieurs tests numériques, il est apparu que c'est la vitesse de

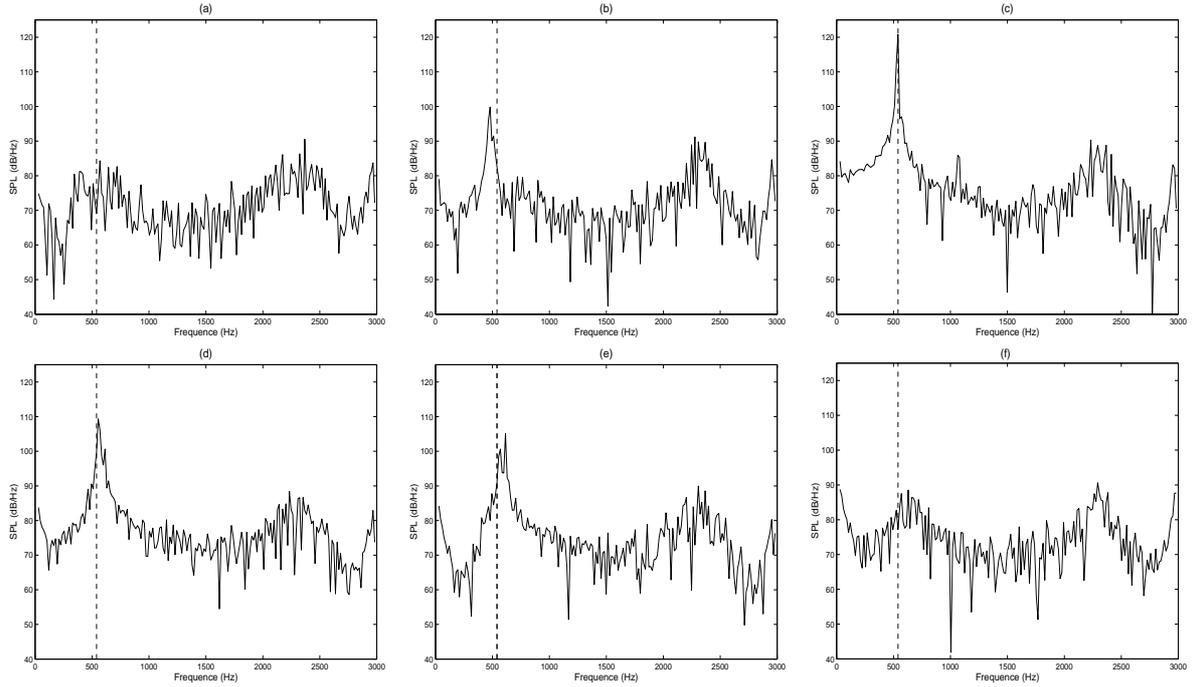


FIG. 4.14 – Evolution du spectre de la pression acoustique dans la cavité en fonction de la vitesse. — — fréquence de résonance de Helmholtz. (a) $U_0 = 9$ m/s; (b) $U_0 = 11$ m/s; (c) $U_0 = 13.5$ m/s; (d) $U_0 = 15$ m/s; (e) $U_0 = 16$ m/s; (f) $U_0 = 24$ m/s. Spectres réalisés sans moyenne sur la totalité du signal utile, $\Delta f = 15$ Hz.

$U_0 = 16$ m/s qui semble être la vitesse critique du système. Les résultats présentés dans ce paragraphe correspondent à cette vitesse d'écoulement.

La largeur de l'ouverture (suivant \mathbf{x}_3) est de $10L$. Le volume de la cavité est de $V = 4.6 \times 10^{-4}$ m³. La géométrie du calcul est présentée sur la figure 4.15. Les conditions aux limites et les paramètres de calcul sont exactement les mêmes que ceux utilisés pour les simulations 2D. Sur toute la largeur de l'ouverture (direction \mathbf{x}_3), le maillage volumique est le même que le maillage 2D (figures 4.9 (a) et (b)). Puis, la taille des mailles est augmentée progressivement jusqu'aux frontières latérales du domaine situées à $150L$ du centre de l'ouverture. Ces frontières sont gérées avec la condition de vitesse fixée ($\mathbf{u} = (U_0, 0, 0)$) / pression libre. Le nombre total de mailles du cas est de 3 600 000. Le pas de temps est de 2.31×10^{-7} sec, 240 000 itérations sont réalisées.

La figure 4.16 (a) montre le signal de pression acoustique pour les derniers pas de temps. Il est mesuré dans la section médiane de la cavité, au point représenté sur la figure 4.9 (a). L'oscillation auto-entretenu a une fréquence de 572 Hz et un niveau de 135 dB. Le niveau d'oscillation est très légèrement supérieur au niveau maximal mesuré expérimentalement (134 dB). La différence entre les fréquences de résonance numérique et expérimentale ($f_r^{exp} \approx 600$ Hz) a été interprétée dans le paragraphe 4.2.3.

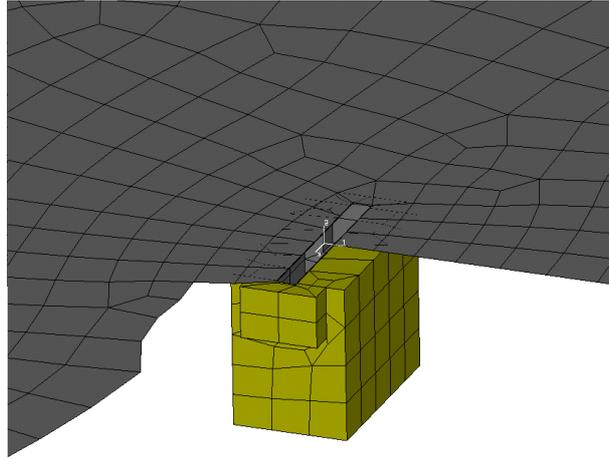


FIG. 4.15 – Visualisation du maillage surfacique utilisé pour le calcul 3D de l'écoulement affleurant la cavité étudiée par Nelson et al.[150, 151]. Une partie du maillage du baffle de la cavité n'est pas représentée.

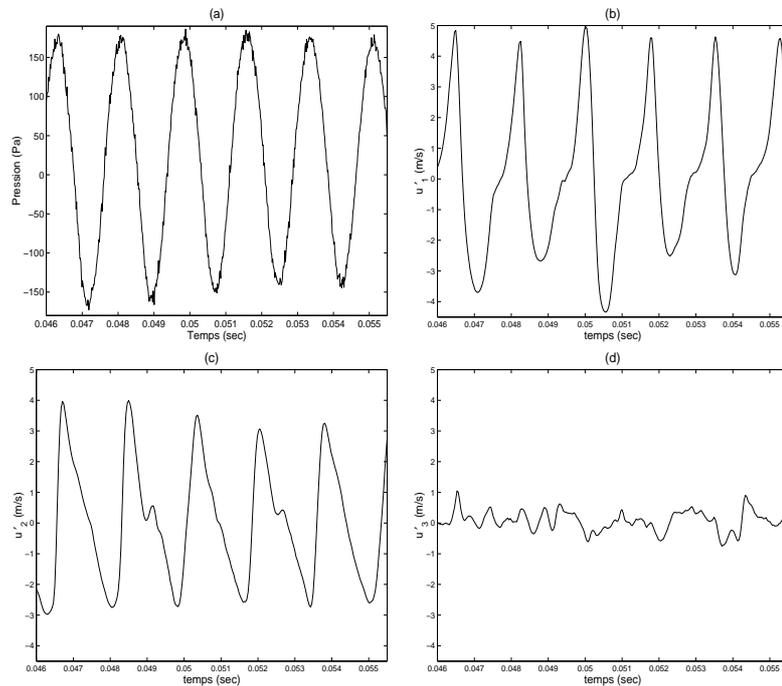


FIG. 4.16 – (a) Pression acoustique dans le volume de la cavité et fluctuations de vitesse au point $x_1/\theta_0 = 65$, $x_2/\theta_0 = 13$, $x_3/\theta_0 = 0$: (b) u'_1 ; (c) u'_2 ; (d) u'_3 .

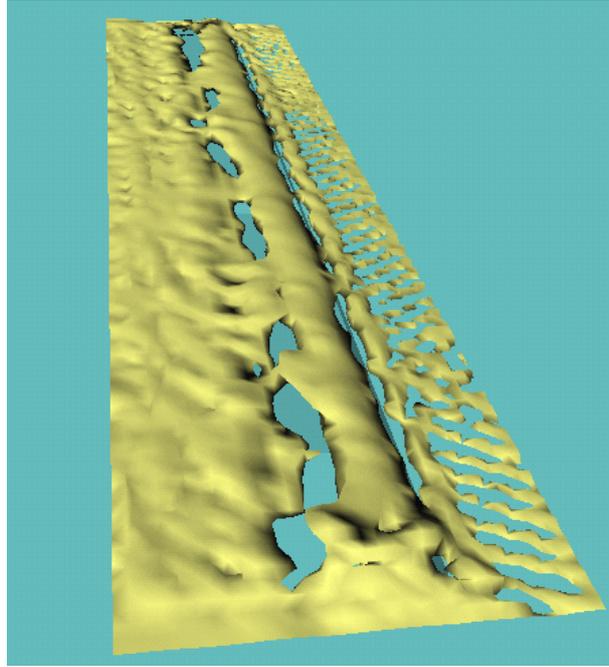


FIG. 4.17 – Isosurface instantannée de la vorticité suivant \mathbf{x}_3 . L'écoulement va de la gauche vers la droite. Un enroulement bidimensionnel de la vorticité est nettement visible au milieu de l'ouverture. Sur le bord de rattachement, en aval de l'ouverture, on distingue des oscillations numériques de faible longueur d'onde qui sont associées aux invariants de réseau (voir 3.3).

Les figures 4.16 (b), (c) et (d) représentent, à la même échelle, les trois composantes du signal de fluctuation de vitesse mesuré en un point de l'ouverture pris dans le plan médian. Les composantes longitudinale u'_1 et transverse u'_2 sont du même ordre de grandeur. Ce résultat est en accord avec les différentes études expérimentales réalisées sur les oscillations des écoulements affleurant des cavités résonantes[139, 150, 229]. Par contre la composante suivant \mathbf{x}_3 est très faible. Ce caractère bidimensionnel de l'écoulement est dû au rapport d'aspect très grand de l'ouverture ($b/L = 10$). La visualisation instantannée de l'écoulement proposée sur la figure 4.17 confirme la forte cohérence de l'écoulement dans la direction \mathbf{x}_3 , ce qui est en accord avec l'observation de Nelson *et al.*[150].

Les figures 4.18 (c) et (d) présentent les isocontours du niveau de fluctuation des vitesses longitudinale et transverse dans le plan médian de l'ouverture. Ce même type de résultat a été proposé par Nelson *et al.*[150] (figures 4.18 (a) et (b)). On note tout d'abord que, comme pour la pression acoustique dans la cavité, les niveaux de fluctuation de vitesse sont légèrement surestimés dans le calcul.

Pour les deux composantes de vitesse, les répartitions des niveaux de fluctuation sont bien prédites par la simulation.

Pour la vitesse longitudinale, on retrouve une distribution des fluctuations typique associée au passage périodique d'un tourbillon discret[150, 174, 199, 227]. Une zone de fluctuation maximum est située dans la partie supérieure de la couche cisailée et une autre, dont le maximum est plus faible, est située dans la partie inférieure de la couche de mélange. Comme dans l'expérience, on

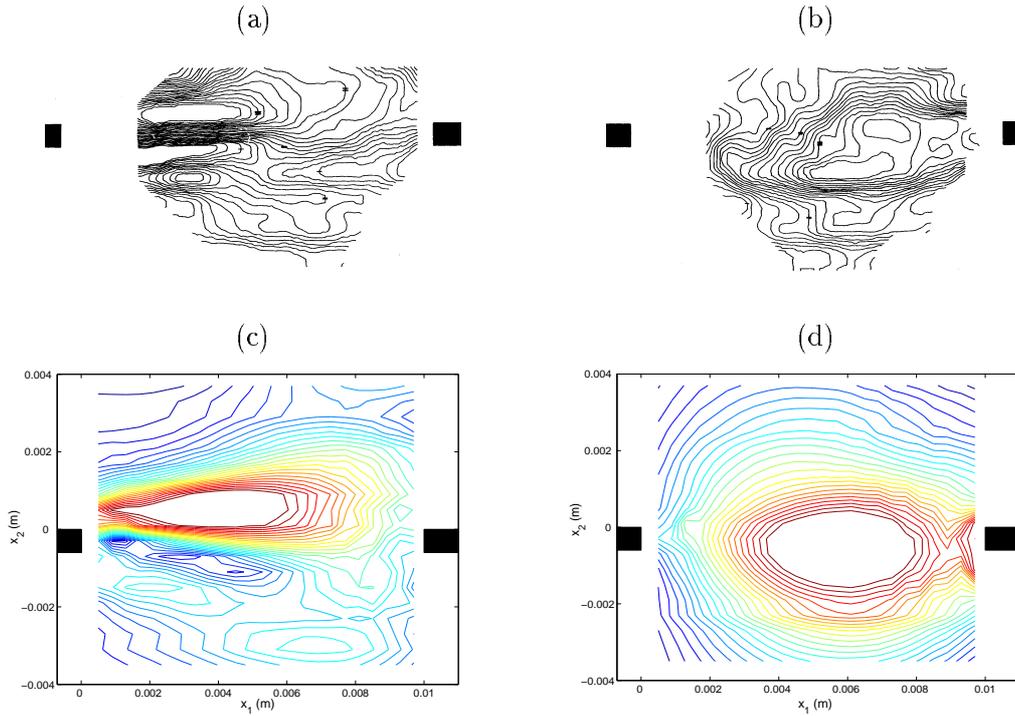


FIG. 4.18 – Isocontours des fluctuations de vitesse longitudinale ((a) et (c)) et transverse ((b) et (d)) dans le plan de l'ouverture $x_3 = 0$. (a) et (b) : mesures de Nelson et al.[150]; (c) et (d) : simulation. Les isocontours expérimentaux et numériques sont tracés entre 0 et 3 m/s par pas de 0.1 m/s.

observe que les niveaux de fluctuation les plus importants se situent dans la première moitié de l'ouverture : ce résultat est peu intuitif.

Pour la vitesse transverse, la zone de fluctuation maximale se situe dans le dernier tiers de l'ouverture. Dans cette zone, les vitesses transverses aérodynamique et acoustique sont en phase pendant toute l'oscillation. En effet, au début (génération d'un nouveau tourbillon) et pendant la première moitié du cycle, la vitesse acoustique est dirigée vers l'intérieur de la cavité et la vitesse transverse associée au tourbillon situé près du bord amont est aussi dans ce sens, en aval du tourbillon. Pendant la deuxième moitié du cycle et jusqu'à la fin de la période d'oscillation, la vitesse acoustique est dirigée vers l'extérieur de la cavité. Après le passage du tourbillon, la vitesse générée par celui-ci est aussi dirigée vers l'extérieur de la cavité. A l'inverse, bien entendu, les fluctuations de vitesse transverse aérodynamique et acoustique sont en opposition de phase dans la première moitié de l'ouverture : c'est ce qui permet de maintenir la condition de Kutta au bord amont (voir §1.1.4).

4.2.5 Conclusions

Cette série de simulations de principe visaient à étudier la capacité du code PowerFLOW à simuler le phénomène d'oscillation auto-entretenu d'un écoulement affleurant une cavité résonante. Un des résultats très importants de cette étude est la mise en évidence du caractère compressible

du code et la bonne prise en compte des résonances de cavité. Cette sensibilité acoustique qui est un avantage indéniable du code par rapport à ses concurrents pour le problème qui nous intéresse, peut être parfois gênant pour les simulations ne devant pas faire apparaître les caractéristiques acoustiques du système (simulation du sheartone). De plus, on verra dans la suite que la présence de la résonance acoustique de la cavité génère un transitoire de calcul initial sur un temps assez long.

A partir du cas test basé sur la cavité de Helmholtz étudiée par Nelson *et al.*, on a montré que le couplage écoulement / résonance pouvait bien être prédit par le code. Le phénomène d'accrochage en fréquence associé à un maximum de l'amplitude de l'oscillation a bien été retrouvé. La relation de phase entre le lâcher de tourbillon et la pression acoustique est conforme aux différentes études expérimentales. Même si l'incertitude sur la vitesse critique expérimentale ne permet pas une étude très précise, il a été montré que les niveaux de fluctuation acoustique et aérodynamique sont assez proches des niveaux mesurés. En particulier, quand le couplage acoustique entre en jeu, l'effet de sur-dissipation de la viscosité turbulente ne semble pas se faire sentir. Dans le cas d'un développement naturel des instabilités aérodynamiques, en l'absence d'excitation extérieure, le modèle $k - \epsilon$ utilisé dans PowerFLOW introduit par contre une dissipation trop importante des fluctuations. Dans le paragraphe 4.1.3, la possibilité d'une surestimation de la viscosité effective du fluide par la méthode de stabilisation du calcul avait été soulevée. La couche de mélange libre bidimensionnelle a été simulée une deuxième fois en utilisant une valeur très faible de la viscosité de base de telle sorte que la condition $\nu^e > \nu_b$ soit vérifiée dans toute la couche de mélange. Aucune augmentation des niveaux de fluctuations n'a été observée. La limitation des fluctuations est bien associée à la viscosité turbulente. Dans cet exemple, la viscosité de base n'a pas d'influence sur le résultat du calcul.

4.3 Méthodologie de calcul pour un véhicule réel

—— CONFIDENTIEL RENAULT ——

4.4 Simulation du battement de toit ouvrant sur le véhicule D

—— CONFIDENTIEL RENAULT ——

4.5 Simulation de la maquette de véhicule

—— CONFIDENTIEL RENAULT ——

4.6 Conclusions

—— CONFIDENTIEL RENAULT ——

Conclusion

Le travail présenté dans ce document a été réalisé dans le cadre d'une thèse industrielle, au sein de la Direction de la Recherche de Renault. La problématique générale porte sur le phénomène du battement de toit ouvrant.

Dans une première partie, l'ensemble des phénomènes physiques qui entrent en jeu dans les mécanismes d'oscillation auto-entretenu d'un écoulement affleurant une cavité a été étudié sur le plan expérimental et théorique à partir des nombreux travaux de recherche publiés sur ce sujet. Comme le montrent les mesures sur véhicules et une campagne de mesures en soufflerie sur une maquette à l'échelle 1, le battement de toit ouvrant résulte d'un couplage des instabilités aérodynamiques de l'écoulement cisailé avec la résonance de Helmholtz de l'habitacle.

La technique du moyennage de phase des signaux de vitesse expérimentaux a été exploitée pour permettre une comparaison plus facile des résultats d'essai avec les simulations numériques.

Un modèle analytique de calcul de la fréquence et du niveau du battement proposé par Kook & Mongeau a été recalé à partir des mesures sur véhicules. Cet outil, utile dans les phases d'avant-projet pour déterminer les intervalles de vitesses critiques, ne peut pas être utilisé pour la mise au point des déflecteurs.

Une approche numérique basée sur l'utilisation d'un code CFD commercial a donc été développée. Une série de cas tests simples représentant les différents mécanismes physiques de base intervenant dans le phénomène global de battement a permis de montrer que le logiciel PowerFLOW répondait à la plupart des exigences physiques et industrielles pour cette application. Ce logiciel est basé sur la méthode Boltzmann sur Réseau. C'est le caractère instationnaire et compressible de cette méthode, associé à une dissipation numérique faible, qui permet de représenter de façon satisfaisante le phénomène de couplage écoulement / résonance. De plus, dans l'optique d'une application de l'outil de simulation en projet, la facilité de mise en œuvre des calculs 3D dans PowerFLOW est un avantage indéniable.

La partie de ce travail de thèse concernant la mise en œuvre et la validation des calculs LBM sur des véhicules réels est *confidentielle Renault*. Le passage d'une simulation sur un cas test académique (cavité de Helmholtz de Nelson) à une configuration réelle à l'échelle 1 n'est pas trivial. Même si les résultats qualitatifs des calculs pour un véhicule avec et sans déflecteur sont bons, des paramètres physiques spécifiques devront être intégrés à la méthodologie de calcul pour obtenir un outil de simulation complètement prédictif.

De manière plus générale, l'étude approfondie des simulations réalisées avec PowerFLOW a permis de mettre en évidence plusieurs limitations actuelles de ce code.

Tout d'abord, la méthode permettant d'assurer la stabilité numérique des calculs introduit, dans certains cas, une dissipation très importante qui peut bloquer le développement tridimensionnel des écoulements turbulents. Toutefois, dans nos simulations, la méthode de stabilisation peut être annihilée sans engendrer de problème de convergence des calculs.

Même si ce n'est pas un point très critique pour les simulations du battement de toit ouvrant, on peut également regretter l'utilisation d'un modèle de turbulence de type $k - \epsilon$. Dans cette étude, il a encore été montré que cette famille de modèles de turbulence, qui sont certainement très bons pour la modélisation des écoulements stationnaires, est peu appropriée pour la modélisation de la turbulence pour les écoulements instationnaires : la viscosité turbulente est surestimée. Bien entendu, il est possible d'intégrer des modifications dans l'expression de ν_T pour diminuer sa valeur dans les zones où l'écoulement est censé être instationnaire. Dans PowerFLOW, le modèle d'hélicité est relativement efficace pour les écoulements tridimensionnels : l'écoulement obtenu au-dessus de l'ouverture du véhicule D fait apparaître des structures turbulentes complexes à des échelles relativement faibles par rapport à la taille de maille locale. Cependant, la faible dissipation numérique introduite par la méthode LBM permet d'espérer un bon comportement d'une modélisation de type LES. Cette approche plus directe pour intégrer les effets des fluctuations turbulentes de sous-maille est aussi beaucoup moins coûteuse en temps CPU pour calculer la valeur de la viscosité turbulente. Dans le code PowerFLOW, le temps de résolution des équations de transport de k et ϵ est évalué à 25% du temps total de calcul[210]. Le gain en temps de calcul pourrait être exploité pour utiliser des mailles plus petites. Cependant, le maillage des parois reste un problème important dans les approches LBM. Une approche hybride (loi de paroi + modèle de viscosité de sous-maille) semble donc être une idée plus raisonnable pour éviter une augmentation trop importante du nombre de mailles nécessaires pour le calcul direct des couches limites jusqu'à la sous-couche visqueuse.

Enfin, dans le cadre de l'utilisation de PowerFLOW pour les calculs d'aéroacoustique dans le secteur automobile, un modèle isotherme serait suffisant pour la plupart des applications. Le modèle thermique à 54 vitesses utilisé dans PowerFLOW est donc sur-dimensionné. Dans une future version du code[30], le modèle isotherme à 19 vitesses ($D3Q19$) sera utilisé. Cela entraînera une diminution importante de la taille et du temps de calcul. Ce gain sera mis à profit pour modifier le codage numérique des fonctions de distribution. En effet, une limitation actuelle du code pour des simulations aéroacoustiques plus précises est l'importance du bruit de fond numérique. Même si l'on a vu que le bruit de fond est une des caractéristiques intrinsèques de la méthode quand elle est utilisée avec une viscosité faible, il est particulièrement important dans PowerFLOW car les fonctions de distribution sont codées en binaires sur 16 bits[30, 209] pour des raisons d'économie de mémoire. Dans la future version du code utilisant le modèle $D3Q19$, les fonctions de distribution seront représentées par des réels à virgule flottante (codage en 32 ou 64 bits).

La méthode Boltzmann sur Réseau n'est pas encore très répandue dans le domaine de la simulation en mécanique des fluides. Dans ce document, la LBM a été étudiée en détail pour

déterminer si cette méthode pouvait être exploitée avantageusement dans ce domaine. Pour cela, un code bidimensionnel a été développé. Les développements théoriques ont permis d'établir la méthode générale de construction des modèles Boltzmann sur Réseau. Ils sont basés sur l'obtention d'un système de vitesses discrètes associé à une fonction d'équilibre permettant de retrouver les équations de conservation macroscopiques par une méthode de séparation des échelles hydrodynamique et dissipative. Le développement en polynômes d'Hermite de la fonction d'équilibre de Maxwell-Boltzmann a permis de définir les conditions que devaient remplir, a priori, le système de vitesses et la fonction d'équilibre pour retrouver exactement les équations de Navier-Stokes. Cette étude met en évidence les limitations des modèles Boltzmann sur Réseau couramment utilisés qui ne respectent pas, en général, toutes ses conditions. D'un point de vue pratique, en se limitant à des nombres de Mach assez faibles ($M < 0.3$), ces modèles restent précis.

En particulier, nous avons montré que la LBM pouvait être utilisée pour des simulations d'aéroacoustique. Dans sa forme initiale, ce schéma permet de calculer simultanément les fluctuations aérodynamiques et acoustiques dont les amplitudes sont séparées par plusieurs ordres de grandeur. En se limitant à une propagation en champ proche, à cause d'une dispersion relativement importante introduite par le schéma, la méthode Boltzmann sur Réseau permet déjà d'obtenir des résultats intéressants comme on a pu le voir sur le cas de la simulation d'un écoulement affleurant une cavité rectangulaire.

Ce cas test, à la fois simple sur le plan de la géométrie mais complexe sur le plan physique, montre que la LBM modélise correctement les différents mécanismes physiques mis en jeu dans le phénomène de sheartone (instabilités aérodynamiques, bouclage de phase, source acoustique,...). Cette étude a été malheureusement limitée par l'impossibilité de maintenir des oscillations auto-entretenues sur des temps assez longs. C'est le caractère bidimensionnel des simulations qui conduit à une convergence des calculs vers un écoulement non physique. Nous avons pu cependant retrouver la relation de bouclage de phase au niveau du bord amont de l'ouverture entre les instabilités aérodynamiques et le champ de rétroaction. Pour un nombre de Mach très faible, et donc pour une longueur d'onde acoustique très grande par rapport aux dimensions de la cavité, ce bouclage se traduit simplement par la relation $L/\lambda_r = n$. Pour un nombre de Mach plus élevé, le temps de retour des fluctuations acoustiques ne peut plus être négligé : le déphasage total de $2n\pi$ est obtenu en ajoutant la variation de la phase des instabilités aérodynamiques dans la couche de mélange et les variations de la phase des fluctuations de pression mesurées au fond de la cavité. Cette procédure d'identification du bouclage de phase avait déjà été exploitée récemment dans des simulations numériques du bruit de cavité mais elle n'a jamais fait l'objet d'une étude expérimentale.

Pour des calculs industriels, nous avons vu que la LBM permettait déjà de simuler des écoulements complexes instationnaires en prenant en compte d'éventuels phénomènes de résonance acoustique. Ce travail de thèse propose en outre les premiers éléments permettant de définir et d'optimiser des modèles LBM en vue de réaliser des calculs aéroacoustiques plus précis. Bien entendu, de nombreux développements sont encore nécessaires pour amener la LBM au niveau des algorithmes de CAA actuels. Plusieurs voies d'étude ont été explorées concernant par exemple le contrôle de la stabilité numérique, les conditions aux limites de rayonnement et la possibilité

d'intégrer des schémas de propagation acoustique linéaire. Le lien explicite entre les fonctions de distribution de l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes et celles de l'équation de Boltzmann sur Réseau a été étudié. Ce lien permet d'intégrer, dans un même modèle de simulation, des algorithmes reposant sur la représentation discrète particulière de la LBM et des schémas reposant sur la théorie cinétique continue ou discrète dans l'espace des vitesses.

Principaux résultats de la thèse

Chapitre 1

- Analyse critique et comparaison des différents modèles analytiques du phénomène d'oscillation auto-entretenu d'un écoulement affleurant une cavité.
- Recalage expérimental et validation d'un modèle analytique de prédiction du battement de toit ouvrant.
- Mesures du battement de toit ouvrant sur véhicule et sur maquette (étude en soufflerie). Mise en œuvre du traitement des signaux de vitesse (mesures fils chauds) par la technique du moyennage de phase.
- Etude de solutions de réduction du battement de toit ouvrant : deux solutions brevetées.

Chapitre 2

- Comparaison des deux approches théoriques de la méthode Boltzmann sur Réseau (LGA \rightarrow LBM et Equation de Boltzmann \rightarrow DVBE \rightarrow LBM).
- Etude théorique de la troncature de la fonction d'équilibre pour la construction des modèles (développement en polynômes d'Hermite de la fonction de Maxwell-Boltzmann).

Chapitre 3

- Développement d'un code LBM bidimensionnel pour les simulations en aéroacoustique.
- Etude numérique du lien entre les fonctions de distribution de la DVBE et de la LBE.
- Nouvelles expressions pour le calcul du tenseur des taux de déformation à partir des fonctions de distribution. Etude des modèles de turbulence.
- Contrôle de la stabilité numérique par un modèle de viscosité sélective.
- Modèle LBM pour la propagation acoustique linéaire.
- Etude numérique de la dispersion et de la dissipation de la LBM.
- Etude numérique de la convergence du schéma pour la propagation acoustique en écoulement.
- Développement d'un schéma de condition aux limites minimisant les réflexions sur les frontières du domaine : approche hybride LBE/DVBE.
- Simulation directe du bruit rayonné par un écoulement affleurant une cavité rectangulaire.

Chapitre 4

- Validation du code PowerFLOW pour la simulation aéroacoustique du phénomène d'oscillation auto-entretenu d'un écoulement affleurant une cavité résonante : test des conditions aux limites, contrôle de l'épaisseur de la couche limite, mise en évidence du couplage écoulement/résonance.
 - Validation par un calcul 3D sur une cavité de Helmholtz simple.
 - Mise en place d'une méthodologie de calcul du battement de toit ouvrant sur un véhicule réel.
 - Validation du calcul sur un véhicule réel : simulation d'une montée en vitesse sans déflecteur et simulation avec déflecteur.
 - Validation du calcul sur une maquette simplifiée de véhicule.

Annexes

Annexe A - Polynômes d'Hermite

Les polynômes d'Hermite forment un système de polynômes orthonormés $H_n(x)$ dont la fonction génératrice est :

$$\exp(2xt - t^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x) t^n}{n!} \quad (4.4)$$

En prenant la fonction de pondération e^{-x^2} , ils sont orthonormés sur l'intervalle $[-\infty, +\infty]$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = \delta_{mn} 2^n n! \sqrt{\pi} \quad (4.5)$$

Les premiers polynômes sont :

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2 \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12 \\ &\dots \end{aligned}$$

De plus, on peut écrire les relations de récurrence suivantes :

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad (4.6)$$

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x) \quad (4.7)$$

Annexe B - Calcul des moments de f^{eq}

La fonction d'équilibre de Maxwell-Boltzmann développée en fonction des polynômes d'Hermite est :

$$f^{eq} = \frac{\rho}{(2\pi\theta)^{D/2}} e^{-c'^2} \prod_{i=1}^D \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(u'_i)^n}{n!} H_n(c'_i) \right)$$

L'expression des moments de la fonction d'équilibre devient donc :

$$\int c_1^{a_1} c_2^{a_2} c_3^{a_3} f^{eq} d\mathbf{c} = \frac{\rho (2\theta)^{(a_1+a_2+a_3)/2}}{\pi^{D/2}} \prod_{i=1}^D \left(\sum_{n=0}^{a_i} \frac{(u'_i)^n}{n!} I_n^{(a_i)} \right) \quad (4.8)$$

avec :

$$I_n^{(a_i)} = \int (c'_i)^{a_i} H_n(c'_i) e^{-c_i'^2} dc'_i \quad (4.9)$$

Dans l'expression (4.8), la somme a été tronquée à a_i d'après l'analyse réalisée dans le paragraphe 2.2.2 qui montre que $I_n^{(a_i)} = 0$ pour $n > a_i$.

La condition d'orthogonalité des polynômes d'Hermite permet de calculer explicitement $I_n^{(0)}$:

$$I_n^{(0)} = \int H_n(c'_i) e^{-c_i'^2} dc'_i = \int H_0(c'_i) H_n(c'_i) e^{-c_i'^2} dc'_i = \delta_{0n} 2^n n! \sqrt{\pi} \quad (4.10)$$

Ainsi, seul le coefficient $I_0^{(0)} = \sqrt{\pi}$ est non nul. On calcule alors les coefficient $I_n^{(a_i)}$ pour $a_i \geq 1$ en utilisant la relation de récurrence (4.6) :

$$\begin{aligned} I_n^{(1)} &= \frac{1}{2} I_{n+1}^{(0)} + n I_{n-1}^{(0)} \\ &= n I_{n-1}^{(0)} \\ I_n^{(2)} &= \frac{1}{4} I_{n+2}^{(0)} + \left(n + \frac{1}{2}\right) I_n^{(0)} + n(n-1) I_{n-2}^{(0)} \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) I_n^{(0)} + n(n-1) I_{n-2}^{(0)} \\ I_n^{(3)} &= \frac{1}{8} I_{n+3}^{(0)} + \frac{3}{4} (n+1) I_{n+1}^{(0)} + \frac{3}{2} n^2 I_{n-1}^{(0)} + n(n-1)(n-2) I_{n-3}^{(0)} \\ &= \frac{3}{2} n^2 I_{n-1}^{(0)} + n(n-1)(n-2) I_{n-3}^{(0)} \\ I_n^{(4)} &= \frac{1}{16} I_{n+4}^{(0)} + \left(\frac{1}{2}n + \frac{3}{4}\right) I_{n+2}^{(0)} + \frac{3}{2} \left(n^2 + n + \frac{1}{2}\right) I_n^{(0)} + n(n-1)(2n-1) I_{n-2}^{(0)} + \frac{n!}{(n-4)!} I_{n-4}^{(0)} \\ &= \frac{3}{2} \left(n^2 + n + \frac{1}{2}\right) I_n^{(0)} + n(n-1)(2n-1) I_{n-2}^{(0)} + \frac{n!}{(n-4)!} I_{n-4}^{(0)} \end{aligned}$$

Avec la condition $0 \leq a_1 + a_2 + a_3 \leq 4$, il existe 11 combinaisons de puissance pour les différents moments :

$$\begin{aligned} \int f^{eq} d\mathbf{c} &= \frac{\rho}{\pi^{D/2}} I_0^{(0)} I_0^{(0)} I_0^{(0)} = \rho \\ \int c_i f^{eq} d\mathbf{c} &= \frac{\rho \sqrt{2\theta}}{\pi^{D/2}} (u'_i I_0^{(0)}) I_0^{(0)} I_0^{(0)} = \rho u_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int c_i c_j f^{eq} d\mathbf{c} &= \frac{2\rho\theta}{\pi^{D/2}} (u'_i I_0^{(0)}) (u'_j I_0^{(0)}) I_0^{(0)} = \rho u_i u_j \quad \text{avec } i \neq j \\
\int c_i^2 f^{eq} d\mathbf{c} &= \frac{2\rho\theta}{\pi^{D/2}} \left(\left(\frac{1}{2} + (u'_i)^2 \right) I_0^{(0)} \right) I_0^{(0)} I_0^{(0)} = \rho\theta + \rho u_i^2 \\
\int c_i c_j c_k f^{eq} d\mathbf{c} &= \frac{2\rho\theta\sqrt{2\theta}}{\pi^{D/2}} (u'_i I_0^{(0)}) (u'_j I_0^{(0)}) (u'_k I_0^{(0)}) = \rho u_i u_j u_k \quad \text{avec } i \neq j \neq k \\
\int c_i^2 c_j f^{eq} d\mathbf{c} &= \frac{2\rho\theta\sqrt{2\theta}}{\pi^{D/2}} \left(\left(\frac{1}{2} + (u'_i)^2 \right) I_0^{(0)} \right) (u'_j I_0^{(0)}) I_0^{(0)} = (\rho\theta + \rho u_i^2) u_j \quad \text{avec } i \neq j \\
\int c_i^3 f^{eq} d\mathbf{c} &= \frac{2\rho\theta\sqrt{2\theta}}{\pi^{D/2}} \left(\left(\frac{3}{2} u'_i + (u'_i)^3 \right) I_0^{(0)} \right) I_0^{(0)} I_0^{(0)} = (3\rho\theta + \rho u_i^2) u_i \\
\int c_i^2 c_j c_k f^{eq} d\mathbf{c} &= \frac{\rho(2\theta)^2}{\pi^{D/2}} \left(\left(\frac{1}{2} + (u'_i)^2 \right) I_0^{(0)} \right) (u'_j I_0^{(0)}) (u'_k I_0^{(0)}) \\
&= (\rho\theta + \rho u_i^2) u_j u_k \quad \text{avec } i \neq j \neq k \\
\int c_i^2 c_j^2 f^{eq} d\mathbf{c} &= \frac{\rho(2\theta)^2}{\pi^{D/2}} \left(\left(\frac{1}{2} + (u'_i)^2 \right) I_0^{(0)} \right) \left(\left(\frac{1}{2} + (u'_j)^2 \right) I_0^{(0)} \right) I_0^{(0)} \\
&= \rho\theta^2 + \rho\theta u_i^2 + \rho\theta u_j^2 + \rho u_i^2 u_j^2 \quad \text{avec } i \neq j \\
\int c_i^3 c_j f^{eq} d\mathbf{c} &= \frac{\rho(2\theta)^2}{\pi^{D/2}} \left(\left(\frac{3}{2} u'_i + (u'_i)^3 \right) I_0^{(0)} \right) (u'_j I_0^{(0)}) I_0^{(0)} \\
&= 3\rho\theta u_i u_j + \rho u_i^3 u_j \quad \text{avec } i \neq j \\
\int c_i^4 f^{eq} d\mathbf{c} &= \frac{\rho(2\theta)^2}{\pi^{D/2}} \left(\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2} (u'_i)^2 + (u'_i)^4 \right) I_0^{(0)} \right) I_0^{(0)} I_0^{(0)} \\
&= 3\rho\theta^2 + 3\rho\theta u_i^2 + \rho u_i^4
\end{aligned}$$

Finalement, on peut écrire les cinq moments successifs sous la forme :

$$M_0^t = \int f^{eq} d\mathbf{c} = \rho \quad (4.11)$$

$$M_1^t = \int c_i f^{eq} d\mathbf{c} = \rho u_i \quad (4.12)$$

$$M_2^t = \int c_i c_j f^{eq} d\mathbf{c} = \rho\theta\delta_{ij} + \rho u_i u_j \quad (4.13)$$

$$M_3^t = \int c_i c_j c_k f^{eq} d\mathbf{c} = \rho u_i u_j u_k + \rho\theta (u_i \delta_{jk} + u_j \delta_{ki} + u_k \delta_{ij}) \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}
M_4^t = \int c_i^2 c_j c_k f^{eq} d\mathbf{c} &= \rho\theta^2 (\delta_{jk} + 2\delta_{jk} \delta_{ij}) + \rho\theta u_j u_k (1 + 2\delta_{ki}) + \rho\theta u_i^2 \delta_{jk} \\
&\quad - \rho\theta u_i^2 \delta_{ij} \delta_{jk} + \rho u_i^2 u_j u_k
\end{aligned} \quad (4.15)$$

Annexe C - Quadrature de Gauss-Hermite

La quadrature de Gauss-Hermite est une quadrature de Gauss sur l'intervalle $[-\infty, +\infty]$ avec la fonction de poids $W(x) = \exp(-x^2)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-x^2} dx = \sum_{\beta=1}^H \sigma_{\beta} f(x_{\beta}) \quad (4.16)$$

où H est l'ordre de la quadrature. σ_{β} sont les poids associés aux abscisses x_{β} qui sont les racines du polynôme d'Hermite de degré H (voir Annexe A). L'erreur de la quadrature est donnée par la relation :

$$E = \frac{H! \sqrt{\pi}}{2^H (2H)!} f^{(2H)}(\eta) \quad \text{avec } \eta \in [-\infty, +\infty] \quad (4.17)$$

La quadrature est donc exacte si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à $2H - 1$. Voici le tableau des abscisses et des poids pour les cinq premiers ordres de cette quadrature :

H	2	3		4		5		
x_{β}	$\pm \frac{1}{2} \sqrt{2}$	0	$\pm \frac{1}{2} \sqrt{6}$	$\pm \sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{2}}$	0	± 0.958572	± 2.02018
σ_{β}	$\frac{1}{2} \sqrt{\pi}$	$\frac{2}{3} \sqrt{\pi}$	$\frac{1}{6} \sqrt{\pi}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{4(3-\sqrt{6})}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{4(3+\sqrt{6})}$	0.945309	0.393619	0.019953

Annexe D - Equations de transport du modèle $k - \epsilon$ RNG

Le modèle $k - \epsilon$ RNG est un modèle basé sur l'approximation de Boussinesq :

$$\tau_{ij}^r = \overline{\rho u_i' u_j'} = 2\mu_T S_{ij} - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij}$$

où τ_{ij}^r est le tenseur de Reynolds et S_{ij} est le tenseur des taux de déformation du champ moyenné. La moyennage $\bar{\cdot}$ représente un moyennage de Reynolds. La viscosité turbulente est donnée par :

$$\nu_T = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$$

Les équations permettant de calculer l'énergie cinétique turbulente k et le taux de dissipation turbulente ϵ sont :

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \bar{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{\mu}{\sigma_k} + \frac{\mu_T}{\sigma_{kT}} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + \tau_{ij}^r S_{ij} - \rho \epsilon$$

$$\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \rho \bar{u}_i \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{\mu}{\sigma_\epsilon} + \frac{\mu_T}{\sigma_{\epsilon T}} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right] + C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \tau_{ij}^r S_{ij} - \left[C_{\epsilon 2} + C_\mu \frac{\tilde{\eta}^3 (1 - \tilde{\eta}/\eta_0)}{1 + \beta \tilde{\eta}^3} \right] \rho \frac{\epsilon^2}{k}$$

Les valeurs des différents coefficients sont : $C_\mu = 0.085$, $C_{\epsilon 1} = 1.42$, $C_{\epsilon 2} = 1.68$, $\sigma_k = \sigma_{kT} = \sigma_\epsilon = \sigma_{\epsilon T} = 0.719$, $\eta_0 = 4.38$ et $\beta = 0.012$.

Dans le modèle légèrement modifié utilisé dans PowerFLOW[222], $\tilde{\eta}$ est une combinaison du taux de cisaillement adimensionnel $\eta = |S|k/\epsilon$ (modèle initial) et des autres facteurs caractéristiques de l'anisotropie de l'écoulement tels que la vorticité ($\eta_\omega = |\Omega|k/\epsilon$) ou l'hélicité.

Notations

a	Rayon équivalent de l'orifice du résonateur
a_i	Puissances des c_i dans le calcul des moments de f^{eq}
a_G	Amplitude de la perturbation à spectre Gaussien
a_P	Amplitude de l'impulsion de pression
a_T	Amplitude du tourbillon
a_{\pm}	Composantes de la fonction de Green compacte
A	Surface de contrôle
A	Constante réelle
$A(n, l, a_i)$	Coefficients réels
A_p	Coefficient entrant dans la définition de $g_{\alpha p}^{eq}$
$A_p(\omega)$	Accélération de la surface S_p
A_v	Section du volume interne du résonateur
b	Largeur de l'ouverture
b_G	Coefficient définissant la longueur d'onde de la perturbation à spectre Gaussien
b_P	Largeur caractéristique de l'impulsion de pression
b_T	Largeur caractéristique du tourbillon
B	Constante réelle
B	Constante (loi logarithmique)
$B(k, l, a_i)$	Coefficients réels
B_p	Coefficient entrant dans la définition de $g_{\alpha p}^{eq}$
$B_{1,2}$	Zones de calcul de taille de maille constante
\mathbf{c}	Vitesse des particules
c_G	Largeur de la perturbation à spectre Gaussien
c_r	$\equiv U_c$, vitesse de convection des instabilités aérodynamiques
c_s	Vitesse du son
c_s^*	Vitesse du son modifiée
\mathbf{c}'	Vitesse des particules après collision
\mathbf{c}'	$= \mathbf{c}/\sqrt{2\theta}$, vitesse adimensionnée

\mathbf{c}_α	Vitesses discrètes
$\mathbf{c}_{\bar{\alpha}}$	$= -\mathbf{c}_\alpha$
$\mathbf{c}_{\alpha in}$	Vitesses discrètes rentrantes
$\mathbf{c}_{\alpha out}$	Vitesses discrètes sortantes
$\mathbf{c}_{\alpha p}$	Vitesses discrètes de direction α possédant le niveau d'énergie p
\mathbf{c}_0	Vitesse des particules (constante)
\mathbf{c}_1	Vitesse des particules
\mathbf{c}'_1	Vitesse des particules après collision
C_A	Compliance acoustique
C_A^*	Compliance acoustique équivalente totale
C'_f	Coefficient de frottement
C'_p	Coefficient entrant dans la définition de $g_{\alpha p}^{eq}$
C_p	Compliance acoustique équivalente associée à la surface S_p
C_s	Constante de Smagorinsky
$C_{\epsilon 1}$	Coefficient du modèle de turbulence $k - \epsilon$ RNG
$C_{\epsilon 2}$	Coefficient du modèle de turbulence $k - \epsilon$ RNG
C_μ	Coefficient du modèle $k - \epsilon$
d_p	Nombre de directions de vitesse dans le niveau d'énergie p
d_α	Fonction de distribution obtenue par changement de variable
$d\omega$	Angle solide de diffraction
D	Profondeur de la cavité
D	Dimension du domaine physique
D	Nombre de degré de liberté des molécules
D_p	Coefficient entrant dans la définition de $g_{\alpha p}^{eq}$
D_i^4	Schéma aux différences finies centré d'ordre 4 dans la direction \mathbf{x}_i
D_{ij}	Partie diagonale de M_{ij}
\mathcal{D}	Domaine de calcul
e	Energie interne
E	Erreur de la quadrature de Gauss-Hermite
$E(k_1)$	Energie de la perturbation acoustique pour le nombre d'onde k_1
E_{max}	Energie maximale théorique de la perturbation acoustique
E_p	Coefficient entrant dans la définition de $g_{\alpha p}^{eq}$
Err	Erreur relative dans le calcul de la propagation d'une impulsion de pression
f	Fréquence du phénomène périodique
f	Fonction de distribution en terme de densité
$f(x)$	Fonction réelle
f^{eq}	Fonction d'équilibre de Maxwell-Boltzmann
$f^{eq,N}$	Fonction d'équilibre de Maxwell-Boltzmann tronquée à l'ordre N
\mathbf{f}_c	Force de Coriolis
f_m	Fonction de distribution

f_{max}	Fréquence de l'instabilité aérodynamique la plus amplifiée
f_n	Fréquence du mode aérodynamique n
$f^{(n)}$	Approximations successives de f dans le développement de Chapman-Enskog
f_r	Fréquence de résonance acoustique
f_r^{exp}	Fréquence de résonance expérimentale
f_r^{num}	Fréquence de résonance obtenue par la simulation numérique
f_r^*	Fréquence de résonance modifiée
f_α	Fonction de distribution associée à la vitesse \mathbf{c}_α
f_α^{eq}	Fonction d'équilibre pondérée associée à la vitesse \mathbf{c}_α
f_α^k	Fonction de distribution à l'étape k de l'intégration de Runge-Kutta
f_α^{neq}	Composante hors équilibre de la fonction de distribution f_α
$(\partial f / \partial t)_{coll.}$	Opérateur de collision
F	Force apparente exercée sur l'orifice du résonateur de Helmholtz
\mathbf{F}_c	Force de Coriolis totale
F_p	Coefficient entrant dans la définition de $g_{\alpha p}^{eq}$
\mathcal{F}_{ij}	Moment d'ordre 2 de f_α^{neq}
\mathcal{F}^i	Flux de quantité de mouvement à travers la surface S_i
\mathcal{F}_n^i	Force normale à la surface S_i
\mathcal{F}_t^i	Force de frottement visqueux sur la surface S_i
g_α	Fonction de distribution équivalente associée à la vitesse \mathbf{c}_α
$g_{\alpha in}$	Fonction de distribution associée à une vitesse rentrante
$g_{\alpha out}$	Fonction de distribution associée à une vitesse sortante
$g_{\alpha p}$	Fonction de distribution équivalente associée à la vitesse $\mathbf{c}_{\alpha p}$
g_α^{coll}	Fonction de distribution après collision
g_α^{eq}	$= f_\alpha^{eq}$, fonction d'équilibre pondérée associée à la vitesse \mathbf{c}_α
$g_\alpha^{eq,lin}$	Fonction d'équilibre linéaire
$g_{\alpha p}^{eq}$	Fonction d'équilibre pondérée associée à la vitesse $\mathbf{c}_{\alpha p}$
$g_{\alpha p}^{eq,*}$	Fonction d'équilibre étendue associée à la vitesse \mathbf{c}_α
$g_{\alpha p}^{(n)}$	Approximations successives de $g_{\alpha p}$ dans le développement de Chapman-Enskog
g_α^{neq}	Composante hors équilibre de la fonction de distribution g_α
$G(i\omega)$	Fonction linéaire du système bouclé
$G_\Delta(\mathbf{x})$	Fonction filtre
G_\pm	Fonction de Green approchée des demi-plans supérieur et inférieur de l'orifice
\mathcal{G}_{ij}	Moment d'ordre 2 de g_α^{neq}
h	Hauteur du col du résonateur de Helmholtz
h	Epaisseur de la plaque séparatrice
h'	Hauteur effective du col du résonateur
h_α^{neq}	Fonction hors équilibre intégrée dans la fonction d'équilibre

H	Ordre de la quadrature de Gauss-Hermite
$H(t)$	Fonctionnelle de Boltzmann
H_e	Hélicité
H_n	Polynôme d'Hermite de degré n
$I_n^{(a_i)}$	Intégrale entrant dans le calcul des moments de f^{eq}
k_B	Constante de Boltzmann
\mathbf{k}	Vecteur nombre d'onde
k	$= \mathbf{k} $
k	Energie cinétique turbulente moyenne
k_i	Composante suivant \mathbf{x}_i du vecteur nombre d'onde
K	Raideur apparente du résonateur de Helmholtz
$K_r(\omega)$	Conductivité de Rayleigh
l	Longueur caractéristique de la turbulence
L	Longueur caractéristique aérodynamique
L	Longueur de la cavité
L_{ac}	Longueur acoustique effective de l'ouverture
L_{aero}	Longueur d'impact des instabilités aérodynamiques
$L_{traverse}$	Longueur de la traverse
$L_{\alpha\beta}$	Opérateur linéaire de l'équation de Boltzmann sur Réseau linéaire
$L_{\alpha\beta}$	Opérateur linéarisé de l'équation de Boltzmann sur Réseau
m	Masse moléculaire du gaz
M	Nombre de Mach
M	Masse apparente dans l'orifice du résonateur de Helmholtz
M_A	Inertance acoustique
M_{ij}	Tenseur des contraintes de sous-maille
M_k^t	Moment d'ordre k de la fonction d'équilibre de Maxwell-Boltzmann
$M_{\alpha\beta}$	Matrice de collision linéarisée
$M_{\alpha p, \beta q}$	Matrice de collision linéarisée
$\mathcal{M}^i(t)$	Flux de masse à travers la surface S_i
\mathbf{n}_i	Vecteur unitaire normal à la surface S_i dirigé vers l'intérieur du domaine
n_α	Variable Booléenne de l'état d'occupation de la vitesse \mathbf{c}_α
N	Nombre entier
$N(Q_r , \omega)$	Fonction non-linéaire du système bouclé
N_α	Nombre de vitesses discrètes
N_ϵ	Nombre de niveaux d'énergie
$N_{1,2}$	Dimensions du domaine de calcul
p	Pression
p_a	Pression acoustique
p^i	Pression sur la surface S_i
p_{in}	Pression dans la cavité

p_{out}	Pression à l'extérieur de la cavité
p_r	Pression aérodynamique
p_{ref}	Solution analytique de l'impulsion de pression dans un écoulement uniforme
$[p_0]$	Différence de pression entre les deux faces de l'orifice
P	Puissance des sources acoustiques
P_{ij}	Tenseur total des efforts internes
$P_{ij}^{(n)}$	Approximation à l'ordre n de P_{ij}
$P_\alpha(\mathbf{x}_k)$	Fraction des particules convectées librement, sans contact avec les surfaces
P_0	Pression atmosphérique
\mathbf{q}	Flux de chaleur
$\mathbf{q}^{(n)}$	Approximation à l'ordre n de \mathbf{q}
Q	Débit total dans l'ouverture
Q_a	Débit acoustique
Q_f	$= \mathcal{F}_{ij} \mathcal{F}_{ij}$
Q_g	$= \mathcal{G}_{ij} \mathcal{G}_{ij}$
$Q_\alpha(\mathbf{x}_k, t)$	Nombre de particules diffractées dans la direction α arrivant au point \mathbf{x}_k
$Q_{1,2}$	Composantes du débit Q dans l'ouverture
Q	Facteur de qualité de la résonance
Q_{th}	Facteur de qualité théorique de la résonance
r	Constante du gaz
$r(\alpha) \equiv r_{0,1,2}$	Coefficients entrant dans l'expression de la fonction h_α^{neq}
R	Résistance apparente du résonateur de Helmholtz
R_A	Résistance du résonateur de Helmholtz
Re_D	Nombre de Reynolds basé sur D
Re_L	Nombre de Reynolds basé sur L
Re_{θ_0}	Nombre de Reynolds basé sur θ_0
s	$= L/2$
$s(\alpha) \equiv s_{0,1,2}$	Coefficients entrant dans l'expression de la fonction h_α^{neq}
S	Surface de l'ouverture
$ S $	Taux de déformation
$S(t)$	Entropie
S_{ac}	Surface acoustique effective de l'ouverture
S_{aero}	Surface effective de l'ouverture soumise à l'excitation aérodynamique
S_i	Surface élémentaire d'une frontière du domaine de calcul
S_{ij}	Tenseur des taux de déformation
S_p	Surface vibrante (paroi du résonateur)
St	Nombre de Strouhal
t	Temps continu
t_k	Temps discret
T	Période

T	Température du fluide
T_e	Période d'échantillonnage
T_{ij}	Partie à trace nulle de M_{ij}
T_{ijkl}	Tenseur des vitesses d'ordre 4
\mathbf{u}	Vecteur vitesse
\mathbf{u}'	$= \mathbf{u}/\sqrt{2\theta}$, vitesse adimensionnée
\mathbf{u}_a	Vitesse acoustique
u_i	Composante de la vitesse dans la direction \mathbf{x}_i
\mathbf{u}_n^i	Vitesse normale à la surface S_i
\mathbf{u}_r	Vitesse aérodynamique
\mathbf{u}_t^i	Vitesse de glissement tangentielle à la surface S_i
u_*	Vitesse de frottement
\mathbf{U}	$= \bar{\mathbf{u}}$, vecteur de vitesse moyenne
U	$= \bar{\mathbf{u}} $, vitesse moyenne
U_0	Vitesse de l'écoulement principal
U_c	Vitesse de convection des instabilités aérodynamiques
U_n	Vitesse critique associée au mode aérodynamique n
U_+	Vitesse de l'écoulement affleurant la face supérieure de l'orifice
U_-	Vitesse de l'écoulement affleurant la face inférieure de l'orifice
v	Vitesse transverse totale du film de vorticité
v_p	Vitesse de vibration de la surface S_p
V	Volume du résonateur
$V(\mathbf{x}_k)$	Volume de la cellule associée au nœud \mathbf{x}_k
V_i^α	Volume d'influence de la surface S_i pour la vitesse \mathbf{c}_α
$V_i^\alpha(\mathbf{x}_k)$	Intersection de $V(\mathbf{x}_k)$ et V_i^α
$W(x)$	Fonction de poids de la quadrature de Gauss-Hermite
W_α	Coefficients de pondération de la fonction d'équilibre
\mathbf{x}	Vecteur position d'un point courant
\mathbf{x}_b	Nœud solide à l'extérieur du domaine de calcul
\mathbf{x}_f	Nœud à l'intérieur du domaine de calcul
x_i	Coordonnées cartésiennes
\mathbf{x}_i	Vecteur unitaire du repère cartésien
x_i^Ω	Coordonnées du centre du tourbillon
\mathbf{x}_k	Vecteur position d'un nœud du domaine de calcul
\mathbf{x}_w	Nœud sur la surface solide
x_β	Abscisses de la quadrature de Gauss-Hermite
$x_{1,2}^0$	Coordonnées du point central d'initialisation des perturbations
X_A	Réactance acoustique du résonateur
\mathbf{y}	Vecteur position d'un point courant

y_s	Distance à la paroi
y_s^+	$= y_s u_* / \nu$
Z	Déplacement adimensionnel du film de vorticité
Z_A	Impédance acoustique du résonateur
Z_c	Impédance d'entrée de l'orifice du résonateur
Z_m	Impédance du volume du résonateur
α	Taux de concentration du tourbillon
α	Constante
α_i	Taux d'amplification des instabilités aérodynamiques
α_r	Nombre d'onde des instabilités aérodynamiques
$\alpha_{1,2}$	Coefficients entrant dans l'expression du mouvement du film de vorticité
$\alpha_{1,2}$	Constantes
β	Fréquence adimensionnelle
β	Coefficient du modèle de turbulence $k - \epsilon$ RNG
β_r	Pulsation des instabilités aérodynamiques
β_r^{max}	Pulsation des instabilités aérodynamiques les plus amplifiées
δ_A	Frontière de la surface de contrôle
δ_0	Epaisseur de couche limite
γ	Paramètre correctif dans la formule de Rossiter
γ	Rapport des chaleurs massiques du fluide
ϵ	Nombre de Knudsen
ϵ	Taux de dissipation moyen de la turbulence
ϵ_p	Energie du niveau d'énergie p
η	Second coefficient de viscosité
η	Taux de cisaillement adimensionnel (modèle de turbulence $k - \epsilon$ RNG)
η	Coordonnée x_3 adimensionnelle
η_ω	Taux de vorticité adimensionnel (modèle de turbulence $k - \epsilon$ RNG)
$\tilde{\eta}$	Coefficient du modèle de turbulence $k - \epsilon$ RNG
η_0	Coefficient du modèle de turbulence $k - \epsilon$ RNG
κ	Conductivité thermique
κ	Constante (loi logarithmique)
λ	Temps de relaxation
λ_0	Temps de relaxation moyen
$\lambda_{1,2}$	Coefficients entrant dans l'expression du mouvement du film de vorticité
λ_a	Longueur d'onde acoustique

λ_r	Longueur d'onde aérodynamique
μ	Viscosité dynamique
ν	Viscosité cinématique
ν_a	Coefficient de viscosité selective
ν_b	Viscosité de base
ν_T	Viscosité turbulente
ν^e	Viscosité effective
ω	Pulsation du phénomène périodique
ω	Fréquence caractéristique de la turbulence (modèle $k - \omega$)
ω_α	Coefficients de pondération de la fonction d'équilibre
ω_r	Pulsation de résonance acoustique
$\omega_{1,2}$	Pulsations limites de la bande passante à -3 dB de la résonance
ϕ	Fonction représentant une des variables macroscopiques de l'écoulement
φ	Composante dépendant de x_2 de la fonction de courant Ψ
ρ	Densité
ρ_0	Densité caractéristique du fluide
σ_{ii}	Taux de turbulence
σ_k	Coefficient du modèle de turbulence $k - \epsilon$ RNG
σ_{kT}	Coefficient du modèle de turbulence $k - \epsilon$ RNG
$\sigma(x_1, x_2)$	Coefficient de relaxation de la zone éponge
$\sigma(\omega)$	Section efficace différentielle de collision
σ_β	Poids de la quadrature de Gauss-Hermite
σ_ϵ	Coefficient du modèle de turbulence $k - \epsilon$ RNG
$\sigma_{\epsilon T}$	Coefficient du modèle de turbulence $k - \epsilon$ RNG
$\sigma_{1,2}$	Nombres d'onde adimensionnels des instabilités de Kelvin-Helmholtz
ς	Coefficient d'amortissement des ondes planes infinies
θ	Epaisseur de quantité de mouvement
θ	$= rT$, température généralisée
θ^i	Température sur la surface S_i
θ_m	Epaisseur de quantité de mouvement caractéristique
θ_0	Epaisseur de quantité de mouvement caractéristique
θ_0	Température caractéristique
ϑ	Viscosité totale d'amortissement des ondes planes infinies
τ	Temps de trajet du tourbillon dans l'ouverture
τ	$= \epsilon\lambda$, temps de relaxation
τ_g	$= \tau + \Delta t/2$, temps de relaxation
τ'_g	Second temps de relaxation
τ_g^e	$= \tau_g + \tau_T$, temps de relaxation effectif
$\tau_{g,i}$	Temps de relaxation dans le bloc B_i

τ_{ij}	Tenseur des efforts visqueux
τ_{ij}^r	Tenseur de Reynolds
τ_{ij}^*	Tenseur des efforts visqueux obtenu avec la fonction d'équilibre étendue
τ_p	Frottement total à la paroi
τ_v	Frottement visqueux à la paroi
τ_t	Frottement turbulent à la paroi
τ_T	Temps de relaxation associé à la turbulence
ξ	Coordonnée x_1 adimensionnelle
ξ'_β	Abscisses de la quadrature de Gauss-Hermite
ζ	Déplacement transversal du fluide dans l'ouverture
ζ	Facteur d'amortissement de la résonance
Δ	Largeur du filtre
$\Delta\Phi$	Différence de phase des fluctuations de vitesse entre les deux bords de l'ouverture
Δf	Pas en fréquence des analyses spectrales
$(\Delta h)_i$	Correction d'extrémité de l'orifice du résonateur
$\Delta_r(\omega)$	Partie imaginaire de la conductivité de Rayleigh
Δt	Pas de temps
Δ_{it}	Pas de temps dans le bloc B_i
Δx	Pas d'espace, taille de maille
Δ_{ix}	Taille des mailles dans le bloc B_i
$\Gamma(t)$	Circulation de la vortacité
$\Gamma_i^{\alpha,in}$	Flux entrant de particules de direction α à travers la surface S_i
$\Gamma_i^{\alpha,out}$	Flux sortant de particules de direction α à travers la surface S_i
$\Gamma_r(\omega)$	Partie réelle de la conductivité de Rayleigh
Ω	Vecteur vortacité
Ω	$= \Omega $
Ω_i	Composante suivant \mathbf{x}_i du vecteur vortacité
Ω_k	Opérateur de collision à l'étape k de l'intégration de Runge-Kutta
Ω_α	Matrice de collision
Φ_p	Phase entre la pression interne et l'accélération de la surface S_p
Φ_{x_i}	Phase des fluctuations aérodynamiques au point x_i
Θ	Entier le plus proche de T/T_e
Ψ	Fonction de courant des instabilités aérodynamiques
Ψ_k	Invariants élémentaires de collision
$\Psi_{\alpha,k}$	Invariants élémentaires de collision
$\Psi_{\alpha p,k}$	Invariants élémentaires de collision
$\Upsilon_{\delta A}^\Gamma$	Flux de circulation de la vortacité à travers la frontière δA

$\bar{\phi}$	Moyenne temporelle de la variable physique
ϕ'	Composante aléatoire de la variable physique
ϕ'	Fluctuation de la variable physique
$\tilde{\phi}$	Composante périodique de la variable physique
$\tilde{\phi}$	Variable adimensionnée par Δx et/ou Δt
ϕ^c	Moyenne de phase de la variable physique
$\hat{\phi}$	Transformée de Fourier de la variable physique
$\hat{\phi}$	Variable adimensionnée par les grandeurs caractéristiques de l'écoulement
$\langle \phi \rangle$	Moyennage spatial sur la surface de l'ouverture
$\langle \phi \rangle$	Variable filtrée (LES)

Glossaire

BGK	Bhatnagar-Gross-Krook
CAA	Computational AeroAcoustics
CFD	Computational Fluid Dynamics
CFL	Nombre de Courant (Courant-Friedrich-Levy)
$DdQq$	Modèle de Boltzmann sur Réseau défini en dimension d et à q vitesses discrètes
DES	Detached Eddy Simulation
DNS	Direct Numerical Simulation
DSP	Densité Spectrale de Puissance
DVBE	Discrete Velocity Boltzmann Equation
DVM	Discrete Velocity Model
FFT	Fast Fourier Transform
FHP	Frisch-Hasslacher-Pomeau
HPP	Hardy-Pazzis-Pomeau
LBE	Lattice Boltzmann Equation
LBM	Lattice Boltzmann Method
LES	Large Eddy Simulation
LGA	Lattice Gas Automata
PIV	Particle Image Velocimetry
RANS(E)	Reynolds Averaged Navier-Stokes (Equations)
RNG	ReNormalization Group
SPL	Sound Pressure Level
TLM	Transmission Line Matrix
URANS(E)	Unsteady RANS(E)

Bibliographie

- [1] AHMADIAN, M., 2001. Transmission Line Matrix modelling of medical ultrasound. *PhD Thesis*, The University of Edinburgh.
- [2] AHUJA, K.K. & MENDOZA, J., 1995. Effects of cavity dimensions, boundary layer, and temperature on cavity noise with emphasis on benchmark data to validate computational aeroacoustic codes. *N.A.S.A. Contractor Rep.*, **4653**.
- [3] ALEXANDER, F.J., CHEN, S. & STERLING, J.D., 1993. Lattice Boltzmann thermohydrodynamics. *Phys. Rev. E*, **47**, R2249.
- [4] AMATI, G., SUCCI, S. & BENZI, R., 1997. Turbulent channel flow simulations using a coarse-grained extension of the lattice Boltzmann method. *Fluid Dyn. Research*, **19**, 289-302.
- [5] ANSUMALI, S. & KARLIN, I.V., 2002. Kinetic boundary conditions in the lattice Boltzmann method. *Phys. Rev. E*, **66**, 026311.
- [6] ANSUMALI, S. & KARLIN, I.V., 2002. Entropy function approach to the lattice Boltzmann method. *J. Stat. Phys.*, **107**, 291-308.
- [7] ASHCROFT, G., TAKEDA, K. & ZHANG, X., 2000. Computational modeling of the aeroacoustics of a door cavity flow oscillation. *Proc. Seventh Int. Congress on Sound and Vib.*, 1331-1336.
- [8] BARDOS, C., GOLSE, F. & LEVERMORE, D., 1991. Fluid dynamic limits of kinetic equations I: Formal derivations. *J. Stat. Phys.*, **63**, 323-344.
- [9] BASTIN, F., LAFON, P. & CANDEL, S., 1997. Computation of jet mixing noise due to coherent structures : the plane jet case. *J. Fluid Mech.*, **335**, 261-304.
- [10] BATTEN, P., GOLDBERG, U. & CHAKRAVARTHY, S., 2002. LNS - An approach towards embedded LES. *AIAA Paper* **02-0427**.
- [11] BAYSAL, O., YEN, G.-W. & FOULADI, K., 1994. Navier-Stokes computations of cavity aeroacoustics with suppression devices. *J. Vib. and Acoust.*, **116**, 105-112.
- [12] BECHERT, D.W., 1988. Excitation of instability waves in free shear layers. Part 1. Theory. *J. Fluid Mech.*, **186**, 47-62.

- [13] BERNSDORF, J., ZEISER, TH., BRENNER, G. & DURST, F., 1998. Simulation of a 2D channel flow around a square obstacle with lattice-Boltzmann (BGK) automata. *Int. J. Modern Phys. C*, **9**(8), 1129-1141.
- [14] BHATNAGAR, P.L., GROSS, E.P. & KROOK, M., 1954. A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems. *Physical Review*, **94**(3), 511-525.
- [15] BILANIN, A.J. & COVERT, E.E., 1973. Estimation of possible excitation frequencies for shallow rectangular cavities. *AIAA J.*, **11**(3), 347-351.
- [16] BLOCK, P.J.W., 1976. Noise response of cavities of varying dimensions at subsonic speeds. *N.A.S.A. Technical note*, **D-8351**.
- [17] BOGEY, C. & BAILLY, C., 2002. A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for computing aerodynamic noise. *AIAA Paper* **2002-2509**.
- [18] BOGEY, C. & BAILLY, C., 2002. Three-dimensional non-reflective boundary conditions for acoustic simulations: far field formulation and validation test cases. *Acta Acustica.*, **88**, 463-471.
- [19] BOGEY, C., BAILLY, C. & JUVÉ, D., 1999. Computation of mixing layer noise using Large Eddy Simulation. *AIAA Paper* **99-1871**.
- [20] BOGHOSIAN, B.M., YEPEZ, J., COVENEY, P.V. & WAGNER A. 2001. Entropic lattice Boltzmann methods. *Proc. R. Soc. Lond.*, **A 457**, 717.
- [21] BREMMER, G. & WILBY, J.F., 2002. Aero-vibro-acoustics: problem statement and methods for simulation-based design solution. *AIAA Paper* **2002-2551**.
- [22] BROADWELL, J.E., 1964. Study of rarified shear flow by the discrete velocity method. *J. Fluid Mech.*, **19**, 401-414.
- [23] BRUGGEMAN, J.C., HIRSCHBERG, A., VAN DONGEN, M.E.H. & WIJNANDS, A.P. 1991. Self-sustained aero-acoustic pulsations in gas transport systems: experimental study of the influence of closed side branches. *J. Sound Vib.*, **150**(3), 371-393.
- [24] BRUNEAU, M., 1998. Manuel d'acoustique fondamentale. *Editions HERMES*, 324-336.
- [25] BUICK, J.M., GREATED, C.A. & CAMPBELL, D.M., 1998. Lattice BGK simulation of sound waves. *Europhys. Lett.*, **43**(3), 235-240.
- [26] BURROUGHS, C.B. & STINEBRING, D.R., 1994. Cavity flow tones in water. *J. Acoust. Soc. Am.*, **95**(3), 1256-1263.
- [27] CERCIGNANI, C., 1988. The Boltzmann equation and its applications. *Applied Math. Sciences*, **67**, Springer-Verlag, New York.

- [28] CHANAUD, R.C., 1994. Effects of geometry on the resonance frequency of Helmholtz resonators. *J. Sound Vib.*, **178**(3), 337-348.
- [29] CHAPMAN, S. & COWLING, T.G., 1970. The mathematical theory of non-uniform gases. Cambridge University Press.
- [30] CHEN, H., 2002. Communication privée.
- [31] CHEN, H., CHEN, S. & MATTHAEUS, W., 1992. Recovery of the Navier-Stokes equations using a lattice-gas Boltzmann method. *Phys. Rev. A*, **45**, R5339-42.
- [32] CHEN, H., TEIXEIRA, C. & MOLVIG, K., 1997. Realization of fluid boundary conditions via discrete Boltzmann dynamics. *Int. J. Modern Phys. C*, **9**(8), 1281-1292.
- [33] CHEN, H., TEIXEIRA, C. & MOLVIG, K., 1997. Digital Physics approach to computational fluid dynamics: some basic theoretical features. *Int. J. Modern Phys. C*, **8**(4), 675-684.
- [34] CHEN, S., CHEN, H., MARTINEZ D. & MATTHAEUS, W., 1991. Lattice Boltzmann model for simulation of magnetohydrodynamics. *Phys. Rev. Lett.*, **67**, 3776-3779.
- [35] CHEN, S. & DOOLEN, G.D., 1998. Lattice Boltzmann Method for fluid flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **30**, 329-364.
- [36] CHEN, Y., OHASHI, H. & AKIYAMA, M. 1994. Thermal lattice BGK model without nonlinear deviations in macroscopic equations. *Phys. Rev. E*, **50**, 2776-2783.
- [37] CHEN, Y., OHASHI, H. & AKIYAMA, M. 1995. Prandtl number of lattice Bhatnagar-Gross-Krook fluid. *Los Alamos e-print Archive*, comp-gas/9501005.
- [38] CHEN, Y., OHASHI, H. & AKIYAMA, M. 1995. Heat transfert in lattice BGK modeled fluid. *J. Stat. Phys.*, **81**(1), 71-85.
- [39] COLONIUS, T., BASU, A.J. & ROWLEY, C.W., 1999. Numerical investigation of the flow past a cavity. *AIAA Paper* **99-1912**.
- [40] CONEY, W.B., TOMASZEWICZ, K., ZHANG, K.Y., HER, J.Y. & MOORE, J.A., 1999. Experimental evaluation of wind noise sources: a case study. *Soc. Automotive Eng. SAE* **1999-01-1812**.
- [41] CREMER, L. & ISING, H., 1968. Die selbsterregten schwingungen von orgelpfeifen. *Acustica*, **19**, 143-153.
- [42] CRIGHTON, D.G., 1992. The jet edge-tone feedback cycle; linear theory for operating stages. *J. Fluid Mech.*, **234**, 361-391.
- [43] CUMMINGS, A., 1987. The reponse of a resonator under a turbulent boundary layer to a high amplitude non-harmonic sound field. *J. Sound Vib.*, **115**(2), 321-328.

- [44] CURLE, N., 1955. The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound. *Proc. Roy. Soc.*, **A 231**, 505-514.
- [45] DEGOND, P. & LEMOU, M., 2002. Turbulence models for incompressible fluids derived from kinetic theory. *to appear in J. Math. Fluid Mech.*
- [46] DELLAR, P.J., 2001. Bulk and shear viscosities in lattice Boltzmann equations. *Phys. Rev. E*, **64**, 031203.
- [47] DEQUAND, S., 2001. Duct aeroacoustics : From technological applications to the flute. *PhD Thesis*, Technische Universiteit Eindhoven, The Netherlands.
- [48] DEQUAND, S., HULSHOFF, S., VAN KUIJK, H., WILLEMS, J. & HIRSCHBERG, A., 2001. Self-sustained oscillations in a Helmholtz-like resonator : Part 2. Detailed flow measurements and numerical simulations. *AIAA Paper 01-2228*.
- [49] DEQUAND, S., LUO, X., WILLEMS, J. & HIRSCHBERG, A., 2001. Self-sustained oscillations in a Helmholtz-like resonator : Part 1. Acoustical measurements and analytical models. *AIAA Paper 01-2251*.
- [50] DESVILLETES, L. & GOLSE, F., 2001. Les affres d'un passage à la limite. *La Recherche*, **346**, 73-77.
- [51] D'HUMIÈRES, D., LALLEMAND, P. & FRISCH, U., 1986. Lattice gas models for 3D hydrodynamics. *Europhys. Lett.*, **2**, 291-297.
- [52] EGGELS, J.G.M. & SOMMERS, J.A., 1995. Numerical simulation of free convective flow using the lattice-Boltzmann scheme. *J. Heat Fluid Flow*, **16**, 357-364.
- [53] ELDER, S.A., 1992. The mechanism of sound production in organ pipes and cavity resonators. *J. Acoust. Soc. Jpn. (E)*, **13**(1), 11-23.
- [54] ELDER, S.A., FARABEE, T.M. & DEMETZ, F.C., 1982. Mechanisms of flow-excited cavity tones at low Mach number. *J. Acoust. Soc. Am.*, **72**(2), 532-549.
- [55] ESPOSITO, R., LEBOWITZ, J.L. & MARRA, R., 1999. On the derivation of hydrodynamics from the Boltzmann equation. *Phys. Fluids*, **11**(8), 2354-2366.
- [56] EXA CORP., 2001. PowerFLOW User's Guide 3.3. *Exa Corp.*, Lexington, MA.
- [57] FABRE, B. & HIRSCHBERG, A., 2000. Physical modeling of flue instruments : A review of lumped models. *Acta Acustica.*, **86**, 599-610.
- [58] FILIPPOVA, O. & HANEL, D., 1998. Boundary-fitting and local grid refinement for lattice-BGK models. *Int. J. Modern Phys. C*, **9**(8), 1271-1279.
- [59] FILIPPOVA, O. & HANEL, D., 1998. Grid refinement for lattice-BGK models. *J. Comput. Phys.*, **147**, 219-228.

- [60] FORESTIER, N., GEFFROY, P. & JACQUIN L., 1998. Evaluation de moyennes de phase dans un écoulement au-dessus d'une cavité résonante. *Actes du 6ème Congrès francophone de vélocimétrie laser*, Saint-Louis, France.
- [61] FREYMUTH, P., 1966. On transition in a separated laminar boundary layer. *J. Fluid Mech.*, **25**(4), 683-704.
- [62] FRISCH, U., HASSLACHER, B. & POMEAU, Y., 1986. Lattice-Gas Automata for the Navier-Stokes equation. *Phys. Rev. Lett.*, **56**(14), 1505-1508.
- [63] GATIGNOL, R., 1975. Théorie cinétique des gaz à répartition discrète des vitesses. *Lecture Notes in Physics*, **36**, Springer, Berlin.
- [64] GHARIB, 1987. Response of the cavity shear layer oscillations to external forcing. *AIAA J.*, **25**(1), 43-47.
- [65] GHARIB, M. & ROSHKO, A., 1987. The effect of flow oscillations on cavity drag. *J. Fluid Mech.*, **117**, 501-530.
- [66] GINZBOURG, I. & ADLER, P.M., 1994. Boundary flow condition analysis for the three-dimensional lattice Boltzmann model. *Journal de Physique*, **4**, 191-214.
- [67] GLOERFELT, X., 2001. Bruit rayonné par un écoulement affleurant une cavité: simulation aéroacoustique directe et application de méthodes intégrales. *Mémoire de thèse*, Ecole Centrale de Lyon, No 2001-26.
- [68] GLOERFELT, X., BAILLY, C. & JUVÉ, D., 2000. Calcul direct du rayonnement acoustique d'un écoulement affleurant une cavité. *C.R.A.S.*, **328**(8), série IIb, 625-631.
- [69] GLOERFELT, X., BAILLY, C. & JUVÉ, D., 2001. Computation of the noise radiated by a subsonic cavity using direct simulation and acoustic analogy. *AIAA Paper* **01-2226**.
- [70] GOLDMAN, A.L. & PANTON, R.L., 1976. Measurement of the acoustic impedance of an orifice under a turbulent boundary layer. *J. Acoust. Soc. Am.*, **60**(6), 1397-1404.
- [71] GOLLIARD, J. & BRUGGEMAN, J.C., 1998. Broadband noise of flow-excited cavities: comparison of prediction models with experimental data. *AIAA Paper* **98-2381**.
- [72] GOLSE, F., 1998. From kinetic to macroscopic models. *Session "L'Etat de la Recherche" de la S.M.F., Orléans*, www.dma.ens.fr/~golse/qcours.html.
- [73] GOODFELLOW, J.M., 1991. *Molecular Dynamics*. MacMillan Press, London.
- [74] GRACE, S.M., 2000. Prediction of low-frequency tones produced by flow through a duct with a gap. *J. Sound Vib.*, **229**(4), 859-878.
- [75] GRAD, H., 1949. On the kinetic theory of rarified gases. *Comm. in Pure and Applied Math.*, **2**, 331-407.

- [76] GRAF, H.R. & DURGIN, W.W., 1993. Measurement of the nonsteady flow field in the opening of a resonating cavity excited by grazing flow. *J. Fluids Struct.*, **7**, 387-400.
- [77] HANKEY, W.L. & SHANG, J.S., 1980. Analysis of pressure oscillations in an open cavity. *AIAA J.*, **18**(8), 892-898.
- [78] HARDIN, J.C. & HUSSAINI, M.Y., 1993. Computational Aeroacoustics. *Presentations at the Workshop on CAA, ICASE/NASA LaRC.*, Springer-Verlag, New York.
- [79] HARDIN, J.C. & POPE, D.S., 1995. Sound generation by flow over a two-dimensional cavity. *AIAA J.*, **33**(3), 407-412.
- [80] HARDY, J., POMEAU Y. & DE PAZZIS, O., 1973. Time evolution of two-dimensional model system I: invariant states and time correlation functions. *J. Math. Phys.*, **14**, 1746-1759.
- [81] HELLER, H. & DELFS, J., 1996. Cavity pressure oscillations: the generating mechanism visualised. *J. Sound Vib.*, **196**(2), 248-252.
- [82] HELLER, H.H., HOLMES, D.G. & COVERT, E.E., 1971. Flow-induced pressure oscillations in shallow cavities. *J. Sound Vib.*, **18**(4), 545-553.
- [83] HENDERSON, B., 1999. Category 6 - Automobile noise involving feedback - Sound generation by low speed cavity flows. *3rd Computational Aeroacoustics Workshop, NASA/CP-2000-209790*, 95-100.
- [84] HEO, D.N. & LEE, D.J., 2001. Numerical investigation of the cover-plates effects on the rectangular open cavity. *AIAA Paper 2001-2127*.
- [85] HERSH, A.S. & WALKER, B.E., 1995. Acoustic behavior of Helmholtz resonators: Part I. Nonlinear model. *AIAA Paper 95-078*.
- [86] HERSH, A.S. & WALKER, B.E., 1995. Acoustic behavior of Helmholtz resonators: Part II. Effects of grazing flow. *AIAA Paper 95-079*.
- [87] HE, X., DOOLEN, G.D. & CLARK T., 2002. Comparison of the lattice Boltzmann method and the artificial compressibility method for Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.*, **179**, 439-451.
- [88] HE, X. & LUO, L.-S., 1997. Theory of the lattice Boltzmann method: From the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation. *Phys. Rev. E*, **56**, 6811-6817.
- [89] HE, X., LUO, L.-S., 1997. Lattice Boltzmann model for the incompressible Navier-Stokes equation. *J. Stat. Phys.*, **88**, 927-944.
- [90] HE, X. & LUO, L.-S., 1997. A priori derivation of the lattice Boltzmann equation. *Phys. Rev. E*, **55**, R6333-6335.
- [91] HE, X., LUO, L.-S. & DEMBO, M., 1996. Some progress in lattice Boltzmann method. Part I. Nonuniform mesh grid. *J. Comput. Phys.*, **129**, 357-363.

- [92] HE, X., LUO, L.-S. & DEMBO, M., 1997. Some progress in lattice Boltzmann method: Reynolds number enhancement in simulations. *Physica A*, **239**, 276-285.
- [93] HE, X., ZOU, Q., LUO, L.-S. & DEMBO, M., 1997. Analytic solutions of simple flows and analysis of non-slip boundary conditions for the lattice Boltzmann model. *J. Stat. Phys.*, **87**, 115-136.
- [94] HIGUERA, F.J. & JIMÉNEZ, J., 1989. Boltzmann approach to lattice gas simulations. *Europhys. Lett.*, **9**, 663-668.
- [95] HIRSCHBERG, A. 2001. Introduction to aero-acoustics of internal flows. *Advances in Aeroacoustics*, Lecture Notes, von Karman Institute for Fluid Dynamics.
- [96] HOEFFER, W.J.R., 1985. The transmission-line matrix method: Theory and applications. *IEEE Trans. on Microwaves Theory and Techniques*, **MTT-33**(10), 151-166.
- [97] HOLGER, D.K., WILSON, T.A. & BEAVERS, G.S., 1977. Fluid mechanics of the edgetone. *J. Acoust. Soc. Am.*, **62**(5), 1116-1128.
- [98] HOU, S., STERLING, J., CHEN, S. & DOOLEN, G.D., 1996. A lattice Boltzmann subgrid model for high Reynolds number flows. *Fields Inst. Comm.*, **6**, 151-166.
- [99] HOU, S., ZOU, Q., CHEN, S., DOOLEN, G.D. & COGLEY, A.C., 1995. Simulation of cavity flow by the lattice Boltzmann method. *J. Comput. Phys.*, **118**, 329-347.
- [100] HOWE, M.S., 1975. Contributions to the theory of aerodynamic sound, with application to excess jet noise and the theory of the flute. *J. Fluid Mech.*, **71**(4), 625-673.
- [101] HOWE, M.S., 1976. On the Helmholtz resonator. *J. Sound Vib.*, **45**(3), 427-440.
- [102] HOWE, M.S., 1981. The influence of mean shear on unsteady aperture flow, with application to acoustical diffraction and self-sustained cavity oscillations. *J. Fluid Mech.*, **109**, 125-146.
- [103] HOWE, M.S., 1981. On the theory of unsteady flow over a slot. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **A 303**, 151-180.
- [104] HOWE, M.S., 1995. Influence of mean shear on sound produced by turbulent flow over surface slots. *J. Acoust. Soc. Am.*, **97**(3), 1522-1533.
- [105] HOWE, M.S., 1996. The influence of tangential mean flow on the Rayleigh conductivity of an aperture. *Proc. R. Soc. Lond.*, **A 452**, 2303-2317.
- [106] HOWE, M.S., 1997. Edge, cavity, and aperture tones at very low Mach numbers. *J. Fluid Mech.*, **330**, 61-84.
- [107] HOWE, M.S., 1997. Low Strouhal number instabilities of flow over apertures and wall cavities. *J. Acoust. Soc. Am.*, **102**(2), 772-780.

- [108] HUANG, J., XU, F., VALLIÈRES, M., DA HSUAN, F., QIAN, Y.-H., FRYXELL, B. & STRAYER, M.R., 1997. A thermal LBGK model for large density and temperature differences. *Int. J. Modern Phys. C*, **8**(4), 827-841.
- [109] HUANG, K. 1963. *Statistical Mechanics*. Wiley, New York.
- [110] HUSSAIN, A.K.M.F. & REYNOLDS, W.C., 1970. The mechanism of an organized wave in turbulent shear flow. *J. Fluid Mech.*, **41**(2), 241-258.
- [111] INAMURO, T., YOSHINO, M. & OGINO, F., 1995. A non-slip boundary condition for lattice Boltzmann simulations. *Phys. Fluids*, **7**, 2928-2930, (erratum : **8**, 1996).
- [112] JAMESON, A., SCHMIDT, W. & TURKEL, E., 1981. Numerical solutions of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time-stepping schemes. *AIAA Paper* **81-1259**.
- [113] KANDHAI, D., KOPONEN, A., HOEKSTRA, A., KATAJA, M., TIMONEN, J. & SLOOT, P.M.A., 1999. Implementation aspects of 3-D lattice-BGK: Boundaries, accuracy, and a new fast relaxation method. *J. Comput. Phys.*, **150**, 482-501.
- [114] KARBON, K.J. & SINGH, R.K., 2002. Simulation and design of automotive sunroof buffeting noise control. *AIAA Paper* **2002-2550**.
- [115] KARLIN, I.V., FERRANTE, A. & OTTINGER, H.C., 1999. Perfect entropy functions of the lattice Boltzmann method. *Europhys. Lett.*, **47**(2), 182-188.
- [116] KNISELY, C. & ROCKWELL, D., 1982. Self-sustained low-frequency components in an impinging shear layer. *J. Fluid Mech.*, **116**, 157-186.
- [117] KOOK, H., 1999. Prediction and control of the interior pressure fluctuations in a flow-excited Helmholtz resonator. *PhD Thesis*, Purdue University, West Lafayette, Indiana.
- [118] KOOK, H., MONGEAU, L., BROWN, D.V. & ZOREA, S.I., 1997. Analysis of interior pressure oscillations induced by flow over vehicle openings. *Noise Control Eng. J.*, **45**(6), 223-234.
- [119] KOPONEN, A., 1998. Simulations of fluid flow in porous media by lattice-gas and lattice-Boltzmann methods. *PhD Thesis*, University of Jyväskylä, Finland.
- [120] KOURTA, A. & HA MINH, H., 1991. Modified turbulence model to predict unsteady separated flows. *Proc. 7th Int. Conf. on Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow*, Pineridge Press, Stanford, 469-479.
- [121] KRIESELS, P.C., PETERS, M.C.A.M., HIRSCHBERG, A., WIJNANDS, A.P.J., IAFRATI, A., RICCARDI, G., PIVA, R. & BRUGGEMAN, J.C., 1995. High amplitude vortex-induced pulsations in a gas transport system. *J. Sound Vib.*, **184**(2), 343-368.

- [122] KURBATSII, K.K. & TAM, C.K.W., 1999. Direct numerical simulation of automotile cavity tones. *3rd Computational Aeroacoustics Workshop*, NASA/CP-2000-209790, 371-383.
- [123] LADD, A.J.C. & VERBERG, R., 2001. Lattice-Boltzmann simulations of particle-fluid suspensions. *J. Stat. Phys.*, **104**(5), 1191-1251.
- [124] LALLEMAND, P. & LUO, L.-S., 2000. Theory of the lattice Boltzmann method: Dispersion, dissipation, isotropy, Galilean invariance, and stability. *Phys. Rev. E*, **61**, 6546-6562.
- [125] LAMP, A.M. & CHOKANI, N., 1997. Computation of cavity flows with suppression using jet blowing. *J. Aircraft*, **34**(4), 545-551.
- [126] LARCHEVÊQUE, L., LABBÉ, O., MARY, I. & SAGAUT, P., 2001. Large eddy simulation of a subsonic flow over a deep, open cavity. *3rd AFOSR Workshop on DNS/LES*, Arlington (USA).
- [127] LELE, S.K., 1992. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *J. Comput. Phys.*, **103**, 16-42.
- [128] LELE, S.K., 1997. Computational aeroacoustics : a review. *AIAA Paper 97-0018*.
- [129] LMS INT., 2002. Sysnoise Rev 5.5 User's Guide. *LMS Int.*, Leuven, Belgium.
- [130] LOCKARD, D.P., LUO, L.-S., MILDER, S.D. & SINGER, B.A., 2002. Evaluation of PowerFLOW for aerodynamic applications. *J. Stat. Phys.*, **107**(1), 423-478.
- [131] LUO, L.-S., 1993. Lattice-gas automata and lattice Boltzmann equations for two-dimensional hydrodynamics. *PhD Thesis*, Georgia Institute of Technology.
- [132] LUO, L.-S., 2000. Some recent results on Discrete Velocity Model and ramifications for the lattice Boltzmann equation. NASA/CR-2000-209855, ICASE Report 2000-7.
- [133] LUO, L.-S. & QI, D., 2002. Applications of the lattice Boltzmann method to complex and turbulent flows. NASA/CR-2002-211659, ICASE Report 2002-19.
- [134] LUTHI, P.A., 1998. Lattice wave automata. From radio waves to fractures propagation. *Thèse de doctorat*, Faculté des sciences de l'Université de Genève, No 2984.
- [135] MAIER, R.S & BERNARD, R.S., 1997. Accuracy of the lattice-Boltzmann method. *Int. J. Modern Phys. C*, **8**(4), 747-752.
- [136] MAIER, R.S, BERNARD, R.S. & GRUNAU, D.W., 1996. Boundary conditions for the lattice Boltzmann method. *Phys. Fluids*, **8**(7), 1788-1801.
- [137] MARTINEZ, D.O., MATTHAEUS, W.H., CHEN, S. & MONTGOMERY, D.C., 1994. Comparison of spectral method and lattice Boltzmann simulations of two-dimensional hydrodynamics. *Phys. Fluids*, **6**, 1285-1298.

- [138] MASSELOT, A., 2000. A new numerical approach to snow transport and deposition by wind: a parallel lattice gas model. *Thèse de doctorat*, Faculté des sciences de l'Université de Genève, No 3175.
- [139] MASSENZIO, M., 1997. Caractérisation des sources aéroacoustiques sur trains grande vitesse en vue de la prévision de la pression acoustique interne. *Mémoire de thèse*, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, No 97-ISAL-0028.
- [140] MAST, T.D. & PIERCE, A.D., 1995. Describing-function theory for flow excitation of resonators. *J. Acoust. Soc. Am.*, **97**(1), 163-172.
- [141] MCNAMARA, G.R. & ZANETTI, G., 1988. Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas automata. *Phys. Rev. Lett.*, **61**, 2332-2335.
- [142] MEI, R., SHYY, W., YU, D. & LUO, L.-S., 2000. Lattice Boltzmann method for 3-D flows with curved boundary. *J. Comput. Phys.*, **161**, 2680-699.
- [143] MEISSNER, M., 1992. Discrete sound induced by low Mach number flow over side branch deep cavity in a rectangular duct. *Archives of Acoustics*, **17**(2), 287-305.
- [144] MEISSNER, M., 1993. Experimental investigation of discrete sound production in deep cavity exposed to airflow. *Archives of Acoustics*, **18**(1), 131-156.
- [145] MICHALKE, A., 1965. On spatially growing disturbances in an inviscid shear layer. *J. Fluid Mech.*, **23**(3), 521-544.
- [146] MIKSAD, R.W., 1972. Experiments on the nonlinear stages of free-shear-layer transition. *J. Fluid Mech.*, **56**(4), 695-719.
- [147] MILBANK, J., WATKINS, S. & KELSO, R., 2000. Tonal noises from small cavities on motor vehicles and a case study of a whistling mirror. *Proc. Seventh Int. Congress on Sound and Vib.*, 1315-1322.
- [148] MONGEAU, L., FRANCHEK, M.A. & KOOK, H., 1999. Control of interior pressure fluctuations due to flow over vehicle openings. *Soc. Automotive Eng. SAE 99NV-211*.
- [149] NELSON, P.A., 2002. Communication privée.
- [150] NELSON, P.A., HALLIWELL, N.A. & DOAK, P.E., 1981. Fluid dynamics of flow excited resonance, part I: experiment. *J. Sound Vib.*, **78**(1), 15-38.
- [151] NELSON, P.A., HALLIWELL, N.A. & DOAK, P.E., 1983. Fluid dynamics of flow excited resonance, part II: flow acoustic interaction. *J. Sound Vib.*, **91**(3), 375-402.
- [152] NOBLE, D.R., CHEN, S., GEORGIADIS, J.G. & BUCKIUS, R.O., 1995. A consistent hydrodynamic boundary condition for the lattice Boltzmann method. *Phys. Fluids*, **7**(1), 203-209.

- [153] NOBLE, D.R., GEORGIADIS, J.G. & BUCKIUS, R.O., 1995. Direct assessment of lattice Boltzmann hydrodynamics and boundary conditions for circulating flows. *J. Stat. Phys.*, **81**, 17-33.
- [154] OAKLEY, T.R., LOTH, E. & ADRIAN, R.J., 1996. Cinematic particle image velocimetry of high-Reynolds-number turbulent free shear layer. *AIAA J.*, **34**(2), 299-308.
- [155] OTA, D.K., CHAKRAVARTHY, S.R., BECKER, T. & STURZENEGGER, T., 1994. Computational study of resonance suppression of open sunroofs. *J. Fluid Eng.*, **116**, 877-882.
- [156] PERVAIZ, M.M. & TEIXEIRA, C.M., 1999. Two equation turbulence modeling with the lattice-Boltzmann method. *2nd Int. Symp. Comput. Tech. for Fluid/Thermal/Chemical Systems with Indust. Appl.*, Boston, MA.
- [157] PIERCE, A.D., 1989. Acoustics - An introduction to its physical principles and applications. *Acoustical Society of America*, 330-350.
- [158] POWELL, A., 1961. On the edgetone. *J. Acoust. Soc. Am.*, **33**, 395-409.
- [159] POWELL, A., 1964. Theory of vortex sound. *J. Acoust. Soc. Am.*, **36**(1), 177-195.
- [160] QIAN, Y.-H., 1990. Gaz sur réseaux et théorie cinétique sur réseaux appliquée à l'équation de Navier-Stokes. *Mémoire de thèse*, Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- [161] QIAN, Y.-H., 1997. Fractional propagation and the elimination of staggered invariants in lattice-BGK models. *Int. J. Modern Phys. C*, **8**(4), 753-761.
- [162] QIAN, Y.-H., D'HUMIÈRES, D. & LALLEMAND, P., 1992. Lattice BGK models for Navier-Stokes equation. *Europhys. Lett.*, **17**(6), 479-484.
- [163] QIAN, Y.-H., SUCCI, S. & ORSZAG, S.A., 1995. Recent advances in lattice Boltzmann computing. *Annu. Rev. Comp. Phys.*, **3**, 195-242.
- [164] QIAN, Y.-H. & ZHOU, Y., 1998. Complete Galilean-invariant lattice BGK models for the Navier-Stokes equation. NASA/**CR-1998-208701**, ICASE Report **98-38**.
- [165] RADAVICH, P.M., SELAMET, A. & NOVAK, J.M., 2001. A computational approach for flow-acoustic coupling in closed side branches. *J. Acoust. Soc. Am.*, **109**(4), 1343-1353.
- [166] RAYLEIGH, LORD, 1945. Theory of sound. *Dover*, Vol. 2.
- [167] REIDER, M.B. & STERLING, J.D., 1995. Accuracy of discrete-velocity BGK models for the simulation of incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Fluids*, **24**, 459-467.
- [168] RIBALDONE, E., CASTELLUCCIO, V. & MARCHESE, P., 2000. Experimental and numerical study of tonal noise in flow-excited cavities. *Proc. Seventh Int. Congress on Sound and Vib.*, 1323-1330.

- [169] RICOT, D., 2001. Essais de systèmes innovants anti-battement de toit ouvrant. *Renault S.A. - Direction de la Recherche*, Note interne.
- [170] RICOT, D. & MAILLARD, V., 2001. Système de réduction du battement de toit ouvrant dans un véhicule automobile. *Brevet* **FR28206808**.
- [171] RICOT, D. & MAILLARD, V., 2001. Système de réduction du battement de toit ouvrant dans un véhicule automobile. *Brevet* **FR28206809**.
- [172] RIZZETA, D.P., 1988. Numerical simulation of supersonic flow over a three-dimensional cavity. *AIAA J.*, **26**(7), 799-807.
- [173] ROCKWELL, D., 1983. Oscillations of impinging shear layers. *AIAA J.*, **21**(5), 645-664.
- [174] ROCKWELL, D. & KNISELY, C., 1979. The organized nature of flow impingement upon a corner. *J. Fluid Mech.*, **93**(3), 413-432.
- [175] ROCKWELL, D. & NAUDASCHER, E., 1979. Self-sustained oscillations of impinging free shear layers. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **11**, 67-94.
- [176] ROGERS, M.M. & MOSER, R.D., 1994. Direct simulation of a self-similar turbulent mixing layer. *Phys. Fluids*, **6**(2), 903-923.
- [177] RONNEBERGER, D., 1980. The dynamics of shearing flow over a cavity - A visual study related to the acoustic impedance of small orifice. *J. Sound Vib.*, **71**(4), 565-581.
- [178] ROSSITER, J.E., 1964. Wind tunnel experiments of the flow over rectangular cavities at subsonic and transonic speeds. *Aero. Res. Council. R. & M.*, **3438**.
- [179] ROWLEY, C.W., 2002. Modeling, simulation and control of cavity flow oscillations. *PhD Thesis*, California Institute of Technology.
- [180] RUNG, T., ESCHRICHT, D., YAN, J. & THIELE, F., 2002. Sound radiation of the vortex flow past a generic side mirror. *AIAA Paper* **2002-2549**.
- [181] SARNO, R.L. & FRANKE, M.E., 1994. Suppression of flow-induced pressure oscillations in cavities. *J. Aircraft*, **31**(1), 90-96.
- [182] SAROHIA, V., 1977. Experimental investigation of oscillations in flows over shallow cavities. *AIAA J.*, **15**(7), 984-991.
- [183] SELAMET, A. & JI, Z.L., 2000. Circular asymmetric Helmholtz resonators. *J. Acoust. Soc. Am.*, **107**(5), 2360-2369.
- [184] SHAN, X. & HE, X., 1998. Discretization of the velocity space in the solution of the Boltzmann equation. *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 65.
- [185] SHAW, L., 1998. Active control for cavity acoustics. *AIAA Paper* **98-2347**.

- [186] SHIEH, C.M. & MORRIS, P.J., 2000. Parallel computational aeroacoustic simulation of turbulent subsonic cavity flow. *AIAA Paper* **2000-1914**.
- [187] SHIEH, C.M. & MORRIS, P.J., 2001. Comparison of two- and three-dimensional turbulent cavity flows. *AIAA Paper* **2001-0511**.
- [188] SHIH, S.H., HAMED, A. & YEUN, J.J., 1994. Unsteady supersonic cavity flow simulations using coupled $k - \epsilon$ and Navier-Stokes equations. *AIAA J.*, **32**(10), 2015-2021.
- [189] SINHA, N., ARUNAJATESAN, S., SHIPMAN, J. & SEINER, J.M., 2001. High fidelity simulation and measurements of aircraft weapons bay dynamics. *AIAA Paper* **2001-2125**.
- [190] SKORDOS, P.A., 1993. Initial and boundary conditions for the Lattice Boltzmann Method. *Phys. Rev. E*, **48**, 4823-4842.
- [191] SKORDOS, P.A., 1995. Comparison between subsonic flow simulation and physical measurements of flue pipes. *Proc. Int. Symp. Musical Acoust.*, Dourdan, France.
- [192] SKORDOS, P.A., 1995. Parallel simulation of subsonic fluid dynamics on a cluster of workstations. *Proc. Fourth IEEE Int. Symp. on High Performance Distributed Computing*, Washington D.C.
- [193] SLOTINE, J.J.E., 1991. Applied nonlinear control. Prentice-Hall, New Jersey.
- [194] SMAGORINSKY, 1963. General circulation experiments with the primitive equations: I. the basic experiment. *Month. Weath. Rev.*, **91**, 99-163.
- [195] SOFONEA, V. & SEKERKA, R.F., 2002. Viscosity of finite difference lattice Boltzmann models. *Submitted to J. Comput. Phys.*
- [196] SPALART, P.R., 2000. Trends in turbulence treatments. *AIAA Paper* **2000-2306**.
- [197] STERLING, J.D & CHEN, S., 1996. Stability analysis of lattice Boltzmann methods. *J. Comp. Phys.*, **123**, 196-206.
- [198] STOTHERS, I.M., SAUNDERS, T.J., McDONALD, A.M. & ELLIOT, S.J., 1993. Adaptive feedback control of sunroof flow oscillations. *Proc. Institute of Acoust.*, **15**(3), 383-393.
- [199] STUART, J.T., 1967. On finite amplitude oscillations in laminar mixing layers. *J. Fluid Mech.*, **29**(3), 417-440.
- [200] SUCCI, S., KARLIN, I.V. & CHEN, H., 2002. Role of the H theorem in lattice Boltzmann hydrodynamic simulations, *Rev. Modern Phys.* **74**(4).
- [201] SUNYACH, M. & BERA, J.-C., 1997. Active control of flow instabilities generated by cavities. *V. Karman Inst. Fluid Dyn.*, Lecture Series 1997-07.
- [202] SUNYACH, M. & FLOWERS WILLIAMS, J.E., 1986. Contrôle actif des oscillations dans les cavités excitées par un écoulement. *C.R. Acad. Sc. Paris*, **t.303 Série II**(12), 1085-1088.

- [203] SZILAGYI, B., SUSAN-RESIGA, R. & SOFONEA, V., 1995. Lattice Boltzmann approach to viscous flows between parallel plates. *Int. J. Modern Phys. C*, **6**, 345-358.
- [204] TAM, C.K.W., 1974. Discrete tones of isolated airfoils. *J. Acoust. Soc. Am.*, **55**(6), 1173-1177.
- [205] TAM, C.K.W. & BLOCK, P.J.W., 1978. On the tones and pressure oscillations induced by flow over rectangular cavities. *J. Fluid Mech.*, **89**(2), 373-399.
- [206] TAM, C.K.W. & WEBB, 1993. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics. *J. Comput. Phys.*, **107**, 262-281.
- [207] TAM, C.K.W., WEBB, J.C & DONG, Z., 1993. A study of the short wave components in computational acoustics. *J. Comput. Acoust.*, **1**(1), 1-30.
- [208] TEIXEIRA, C.M., 1992. Continuum limit of lattice gas fluid dynamics. *PhD Thesis*, Massachusetts Institute of Technology.
- [209] TEIXEIRA, C.M., 1997. Digital Physics simulation of lid-driven cavity flow. *Int. J. Modern Phys. C*, **8**(4), 685-696.
- [210] TEIXEIRA, C.M., 1998. Incorporating turbulence models into the Lattice-Boltzmann Method. *Int. J. Modern Phys. C*, **9**(8), 1159-1175.
- [211] TRACY, M.B. & PLENTOCICH, E.B., 1997. Cavity unsteady-pressure measurements at subsonic and transonic speeds. NASA/TP-3669.
- [212] UJITA, H., NAGATA, S., AKIYAMA, M., NAITOH, M. & OHASHI, H., 1998. Development of LGA & LBE 2D parallel programs. *Int. J. Modern Phys. C*, **9**(8), 1203-1220.
- [213] UKITA, T., CHINA, H. & KANIE, K., 1997. Analysis of vehicle wind throb using CFD and flow visualization. *Soc. Automotive Eng. SAE* **970407**.
- [214] VAHALA, G., PAVLO, P., VAHALA, L. & MARTYS, N.S., 1998. Thermal lattice-Boltzmann models (TLBM) for compressible flows. *Int. J. Modern Phys.*, **9**(8), 1247-1261.
- [215] VAKILI, A.D. & GAUTHIER, C., 1991. Control of cavity flow by upstream mass injection. *AIAA Paper* **91-1645**.
- [216] VERBERG, R. & LADD, A.J.C., N.S., 2000. Lattice-Boltzmann model with sub-grid-scale boundary conditions. *Phys. Rev. Lett.*, **84**(10), 2148-2151.
- [217] VERBERG, R. & LADD, A.J.C., N.S., 2001. Accuracy and stability of a lattice-Boltzmann model with subgrid scale boundary conditions. *Phys. Rev. E*, **65**, 016701.
- [218] WAGNER, A.J., 1998. An H-theorem for lattice Boltzmann approach to hydrodynamics. *Europhys. Lett.*, **44**(2), 144-149.

- [219] WALKER, B.E. & CHARWAT, A.F., 1982. Correlation of the effects of grazing flow on the impedance of Helmholtz resonators. *J. Acoust. Soc. Am.*, **72**(2), 550-555.
- [220] WOLFRAM, S., 1986. Cellular automata fluids 1: Basic theory. *J. Stat. Phys.*, **45**(3), 471-526.
- [221] XI, H., PENG, G. & CHOU, S.-H., 1999. Finite-volume lattice Boltzmann schemes in two and three dimensions. *Phys. Rev. E*, **60**(3), 3380-3388.
- [222] YAKHOT, V, CHEN, H., STAROSELSKY, I., QIAN, Y.-H, SHOCK, KANDASAMY, R., MALLICK, S. & ALEXANDER, C., 2001. A new approach to modelling strongly non-equilibrium, time-dependent turbulent flows. *Preprint*.
- [223] YAKHOT, V., & ORSZAG, S.A., 1986. Renormalization group analysis of turbulence. I. Basic theory. *Int. J. Sci. Comput.*, **1**, 1-51.
- [224] YU, D., MEI, R. & SHYY, W., 2002. A multi-block lattice Boltzmann method for viscous fluid flows. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **39**, 99-120.
- [225] ZHANG, R., CHEN, H., QIAN, Y.-H. & CHEN, S., 2001. Effective volumetric lattice Boltzmann scheme. *Phys. Rev. E*, **63**, 056705.
- [226] ZHANG, X., RONA, A. & LILLEY, G.M., 1995. Far-field noise radiation from an unsteady supersonic cavity flow. *AIAA Paper* **95-040**.
- [227] ZIADA, S. & ROCKWELL, D., 1981. Generation of higher harmonics in a self-oscillating mixing layer-wedge system. *AIAA J.*, **20**(2), 196-202.
- [228] ZIADA, S. & ROCKWELL, D., 1982. Oscillations of an unstable mixing layer impinging upon an edge. *J. Fluid Mech.*, **124**, 307-334.
- [229] ZOCCOLA, P.J., 2000. Experimental investigation of flow-induced cavity resonance. *PhD Thesis*, The Catholic University of America, Washington, D.C.
- [230] ZOU, Q. & HE, X., 1997. On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model. *Phys. Fluids*, **9**, 1591-1598.