

THESE

présentée devant
L'ECOLE CENTRALE DE LYON
pour obtenir
le titre de DOCTEUR-INGENIEUR
Spécialité : "ACOUSTIQUE"

par

MICHEL ROGER

BRUIT A LARGE BANDE DES COMPRESSEURS A DOUBLE FLUX : RÔLE
EVENTUEL DES ONDES INERTIELLES LIEES AUX ECOULEMENTS TOURNANTS

(Exemplaire Provisoire)

Soutenu le 22 JUIN 1983 devant la Commission d'Examen

Jury -	G. COMTE-BELLOT	Président
	J. BATAILLE	
	M. SUNYACH	Examineurs
	B. JUBELIN	
	B. POIREE	
	H. ARBEY	

Psd

THESE

ECOLE CENTRALE DE LYON
BIBLIOTHEQUE
BP 163 - 69131 ECULLY CEDEX



présentée devant
L'ECOLE CENTRALE DE LYON
pour obtenir
le titre de DOCTEUR-INGENIEUR
Spécialité : "ACOUSTIQUE"

par

MICHEL ROGER

BRUIT A LARGE BANDE DES COMPRESSEURS A DOUBLE FLUX ; RÔLE
EVENTUEL DES ONDES INERTIELLES LIEES AUX ECOULEMENTS TOURNANTS

(Exemplaire Provisoire)

Soutenue le 22 JUIN 1983 devant la Commission d'Examen

Jury -

G. COMTE-BELLOT

Président

J. BATAILLE

M. SUNYACH

Examineurs

B. JUBELIN

B. POIREE

H. ARBEY

ECOLE CENTRALE DE LYON

DIRECTEUR A. MOIROUX
DIRECTEUR ADJOINT R. RICHE

DEPARTEMENTS D'ENSEIGNEMENT ET DE RECHERCHE

MATHEMATIQUES-INFORMATIQUE-SYSTEMES	C.M. BRAUNER J.F. MAITRE
PHYSICOCHIMIE DES MATERIAUX	P. CLECHET J. CURRAN
METALLURGIE ET PHYSIQUE DES MATERIAUX	P. GUIRALDENQ D. TREHEUX
ELECTRONIQUE	J.J. URGELL P. VIKTOROVITCH S. KRAWCZYK R. BLANCHET
ELECTROTECHNIQUE	Ph. AURIOL A. FOGGIA
MECANIQUE DES SOLIDES	F. SIDOROFF
MECANIQUE DES SURFACES	J.M. GEORGES J. SABOT
MECANIQUE DES FLUIDES ET ACOUSTIQUE	J. MATHIEU G. COMTE-BELLOT (Mlle) D. JEANDEL
MACHINES THERMIQUES	X. LYS M. BRUN
CONCEPTION ET DEVELOPPEMENT DE PRODUITS INDUSTRIELS	R. RUSSIER P. CLOZEL

Sont aussi habilitées à diriger des thèses à l'E.C.L.
les personnes dont les noms suivent :

MM. E. ALCARAZ
H. ARBEY
J. BATAILLE
J. BOREL (LETI)
Cl. CAMBON
B. CAMBOU
J.P. CHANTE
G. CHARNAY
B. COQUILLET
J. DIMNET
A. HAUPAIS
J. JOSEPH
Ph. KAPSA
Cl. MARTELET
J.M. MARTIN
J.R. MARTIN
T. MATHIA
H. MONTES
R. MOREL
NGUYEN DU
R. OLIER
R. PHILIPPE
G. ROJAT
J.P. SCHON
M. SUNYACH
Cl. SURRY
A. TAILLAND
G. THOMAS
L. VINCENT

Je tiens à adresser toute ma gratitude à Madame le Professeur G. COMTE-BELLOT, Responsable du Centre d'Acoustique de l'Ecole Centrale de Lyon, pour avoir accepté de cautionner mon travail.

Cette étude a été entreprise à la suite d'une demande de la SNECMA. Je tiens par conséquent à assurer de ma plus vive reconnaissance Messieurs P. THOMAS et B. JUBELIN, Directeurs du Service d'Acoustique de la SNECMA, ainsi que les membres de leur Equipe, pour leur accueil et leur collaboration.

Je remercie aussi Monsieur H. ARBEY, Maître-Assistant à l'ECL, qui a su me guider efficacement par ses conseils avisés et ses encouragements.

Je me dois de remercier également Messieurs les Professeurs J. BATAILLE et M. SUNYACH d'avoir bien voulu me faire l'honneur de leur présence dans le Jury.

J'ai le plaisir d'adresser mes plus vifs remerciements à Monsieur B. POIREE, Ingénieur DGA-DRET, qui fut un interlocuteur précieux pour tous les problèmes théoriques que j'ai rencontrés.

Toute ma sympathie va également à Monsieur M. BOREL, Coordonnateur des Etudes Avancées - Moteurs Civils - au STPA, pour l'intérêt porté à ce travail.

Je ne manquerai pas de souligner l'accueil de Monsieur le Professeur B. GAY, dont les conseils dans le domaine des méthodes numériques m'ont été très utiles.

Enfin, ce rapport n'aurait pu voir le jour sans le dévouement de Madame F. MAUPAS pour la frappe, et de Monsieur P. BECKER pour la présentation des planches. Qu'ils en soient ici sincèrement remerciés.

"Il est plus important de voyager que d'arriver"
(Proverbe Tibétain)

TABLE DES MATIERES

	pages
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I - ELÉMENTS DES THÉORIES CLASSIQUES DU BRUIT DES COMPRESSEURS	3
1. SOURCES DE BRUIT CLASSIQUES DANS LES COMPRESSEURS SUBSONIQUES	3
2. CHOIX D'UN MODELE CLASSIQUE DE PREDICTION DU BRUIT DES COMPRESSEURS	6
3. CALCUL MODAL DU BRUIT DE COMPRESSEUR EN CONDUIT AVEC ECOULEMENT UNIFORME	8
4. RELATION DE DISPERSION DES ONDES ACOUSTIQUES, ET PHENOMENES DE COUPURE	11
CHAPITRE II - ANALYSE DU BRUIT DE BOSSES DES COMPRESSEURS	13
INTRODUCTION	13
1. DISPOSITIF EXPERIMENTAL	14
2. RESULTATS	15
3. MANIFESTATIONS SIMILAIRES RELEVÉES DANS LA LITTERATURE	17
4. RECHERCHE D'UN MECANISME SUSCEPTIBLE D'ETRE RESPONSABLE DU BRUIT DE BOSSES	18
CHAPITRE III - THÉORIE MODALE DE LA PROPAGATION DU SON DANS UNE CONDUITE ANNULAIRE EN PRÉSENCE D'UN ÉCOULEMENT TOURNANT	23
INTRODUCTION	23
1. EQUATIONS LINEARISEES DE LA DYNAMIQUE DES GAZ DANS UN ECOULEMENT TOURNANT	24
2. TRANSFORMEE DE FOURIER DES EQUATIONS	29
3. CAS D'UN ECOULEMENT DE ROTATION SOLIDE	31
4. ETUDE DU CAS DE TRES FAIBLE ROTATION SOLIDE	32
5. RESOLUTION NUMERIQUE POUR UNE LOI DE ROTATION	36

CHAPITRE IV - APPLICATIONS	41
1. DETERMINATION DE LA RELATION DE DISPERSION	41
2. TENTATIVES DE LIAISON AVEC LE PHENOMENE DU BRUIT DE BOSSES	41
CONCLUSIONS	43
REFERENCES	45
FIGURES-PLANCHES	48
ANNEXES	
1. CALCUL MODAL DU BRUIT DE COMPRESSEUR EN CONDUITE CYLINDRIQUE ANNULAIRE AVEC ECOULEMENT UNIFORME	74
2. EQUATIONS LINEARISEES DE LA DYNAMIQUE DES GAZ DANS UN ECOULEMENT TOURNANT ISENTROPIQUE	81
3. RESOLUTION DES EQUATIONS DE L'ECOULEMENT TOURNANT PAR LA METHODE SPECTRALE	89

INTRODUCTION

Les développements rapides de l'aéronautique, ainsi que la proximité des aéroports de lieux d'habitation, ont amené les constructeurs d'appareils civils à prendre en compte les nuisances occasionnées par le bruit des propulseurs. Ces nuisances étant en effet maximales à l'atterrissage et au décollage, on ne peut se permettre de les négliger, et de ce fait l'acoustique intervient maintenant comme élément important dans les procédures de certification des moteurs. Le but à atteindre est un compromis entre les nuisances tolérables et les nécessités de fonctionnement.

Bien entendu l'orientation des recherches est conditionnée par le type de propulseur utilisé. Dans les turboréacteurs classiques, les bruits principaux au décollage proviennent de la combustion et du jet en raison des puissances nécessaires, et le bruit du compresseur ne devient significatif qu'à l'atterrissage. Avec l'apparition des turboréacteurs à double-flux, qui permettent de réduire le bruit de jet, tout en augmentant le rendement, c'est le bruit du compresseur et celui de la soufflante qui deviennent prépondérants. C'est dans ce dernier domaine que se situe notre étude.

Que l'on considère des hélices, des rotors d'hélicoptères, ou des aubages de turbomachines, les mécanismes de production de bruit demeurent essentiellement les mêmes, les caractères particuliers provenant de différences sur le nombre de pales ou sur la vitesse de rotation. Qualitativement, le spectre émis par une machine tournante se compose de deux contributions :

- une émission à large bande,
- une émission à bande étroite contrée autour de fréquences discrètes privilégiées.

Les fréquences discrètes sont dues à l'existence dans l'écoulement interne de la machine de structures périodiques tournantes, et d'inhomogénéités cohérentes vis-à-vis des pales en mouvement. Inversement le fond à large bande est dû à la partie incohérente de l'écoulement, c'est-à-dire à la turbulence fine. En tout état de cause, le bruit est une conséquence inévitable du fonctionnement, et ne peut donc être que partiellement réduit.

La présente étude porte sur un type d'émission sonore inhabituel qui n'entre pas dans le cadre précédemment décrit. Ce phénomène, appelé "bruit de bosses", se caractérise par des remontées du bruit à large bande privilégiant des fréquences inattendues, et créant une nuisance supplémentaire. Il a en particulier été observé par la SNECMA lors de campagnes de mesures acoustiques. Celles-ci sont à l'origine des travaux qui suivent.

Le chapitre I est un exposé des mécanismes et des théories classiques de production de bruit dans un compresseur. Nous y développons en particulier un calcul de bruit fondé sur une résolution modale de l'équation de la perturbation de pression, dans un écoulement uniforme en conduit annulaire. Ce modèle constitue en effet une base de départ pour la suite du travail.

Dans le chapitre II, nous décrivons les principaux caractères du bruit de bosses sur un compresseur d'essai. Les résultats expérimentaux ont été obtenus à partir d'enregistrements de bruit communiqués par le Service Acoustique de la SNECMA. Les comportements observés sont rapprochés de manifestations similaires extraites de la littérature. On est alors conduit à penser qu'un mécanisme possible, générateur de bruit de bosses, serait l'existence d'ondes inertielles de pression prenant naissance dans le circuit secondaire du compresseur, au sein de l'écoulement tournant engendré par la soufflante. La rotation du fluide y est en effet importante.

Or la source de bruit à large bande que peuvent constituer les ondes inertielles n'a jamais été considérée. Pour cette raison nous tentons au chapitre III d'étendre la méthode modale du chapitre I au cas d'un conduit en présence d'écoulement moyen tournant axisymétrique (différents cas sont envisagés). Nous établissons la relation de dispersion des ondes de pression dans le conduit, ce qui permet de distinguer deux modes de propagation : le mode acoustique d'une part, le mode inertiel d'autre part.

Nous tentons enfin au chapitre IV d'appliquer ces résultats à un cas industriel.

CHAPITRE I - ÉLÉMENTS DES THÉORIES CLASSIQUES DU BRUIT

DES COMPRESSEURS

1. SOURCES DE BRUIT CLASSIQUES DANS LES COMPRESSEURS SUBSONIQUES

Le schéma de principe des turboréacteurs à double-flux actuels est donné sur la figure 1. Il se caractérise par l'adjonction, au corps composant un turboréacteur simple, d'un rotor d'entrée (soufflante) et d'un circuit froid secondaire. Nous ne nous intéressons ici qu'au bruit rayonné par les étages d'entrée (soufflante et compresseur primaire). Un exemple du spectre, dont peut être responsable cette partie du moteur, se trouve alors sur la figure 2.

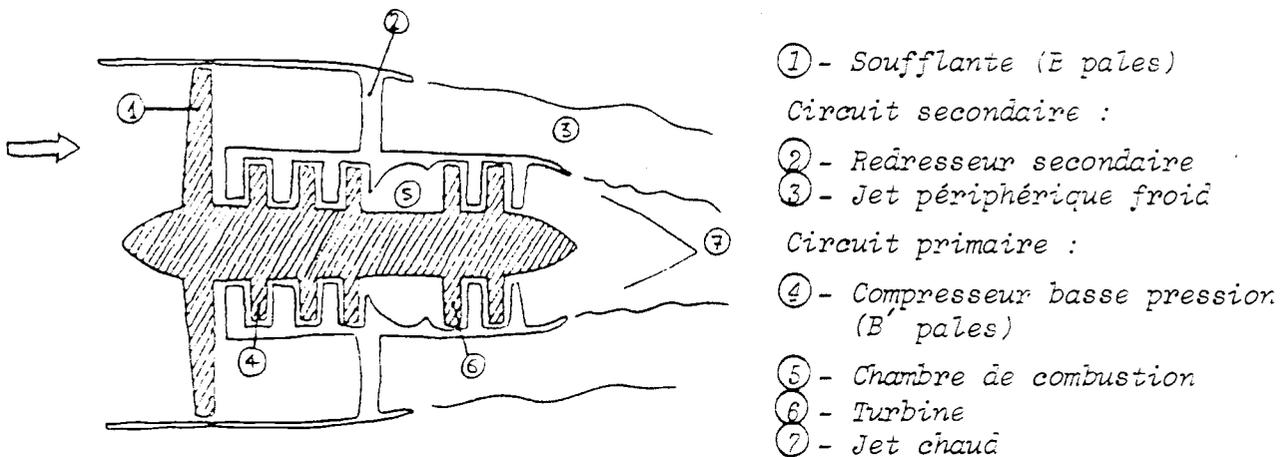


Figure 1 - Schéma de principe d'un turboréacteur double-flux.

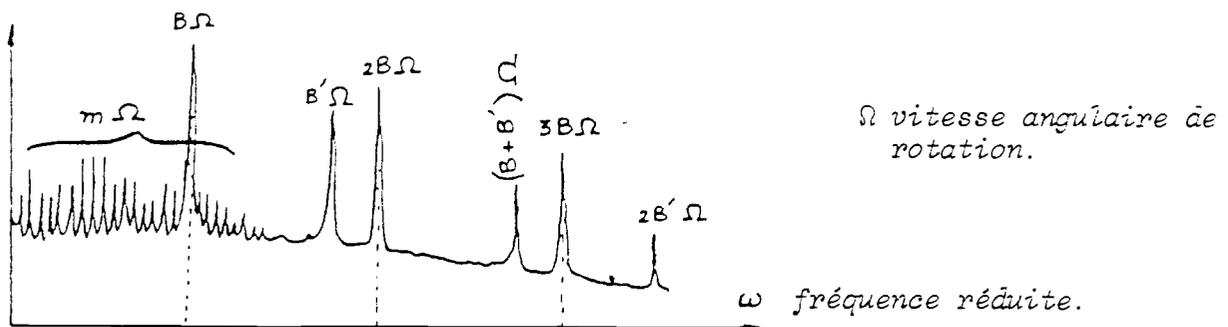
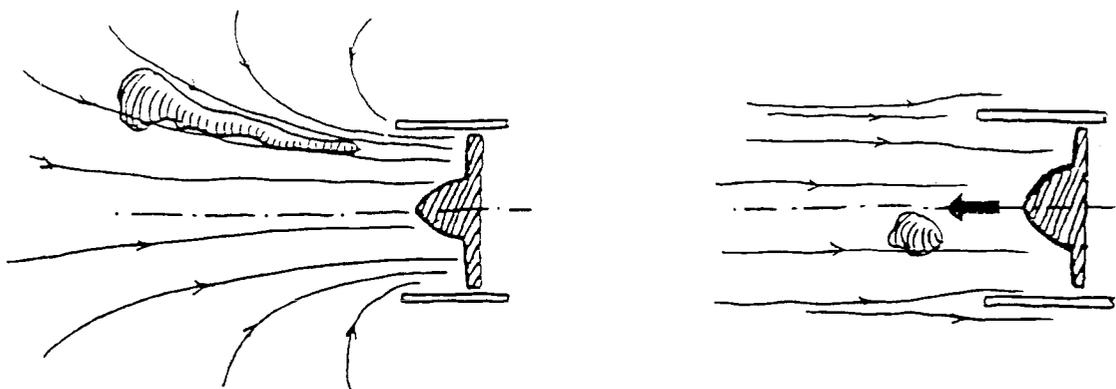


Figure 2 - Spectre au compresseur d'un turboréacteur double-flux sur banc d'essai.

Les bruits d'origine aérodynamique dans un compresseur relèvent de nombreux mécanismes qui généralement coexistent. Pour essayer d'en faire l'inventaire, nous partirons du cas du rotor seul, et nous examinerons ensuite les modifications à faire lorsqu'on ajoute un stator.

La source sonore la plus efficace pour un rotor seul provient des efforts instationnaires exercés sur le fluide par les aubages tournants, c'est-à-dire du hachage par le rotor des inhomogénéités de l'écoulement qui l'alimente. Les propriétés du bruit émis dépendent alors du rapport entre les dimensions caractéristiques de l'inhomogénéité et celles de l'espacement entre les aubes, les sollicitations étant cohérentes lorsque ce rapport est grand, et incohérentes dans le cas contraire. Cette distinction est essentielle pour comprendre les modifications du spectre de bruit entre les essais statiques et les essais en vol.

En effet, lorsqu'un rotor opère au sol (essais statiques, figure 3a), les lignes de courant de l'écoulement induit à l'amont forment un convergent dans lequel les structures de la turbulence atmosphérique subissent de fortes élongations. Elles deviennent ainsi une structure quasi cohérente hachée un grand nombre de fois par les pales, ce qui produit une émission sonore à bande étroite autour des fréquences $nB\Omega$, harmoniques de la fréquence de passage des pales (B nombre de pales, Ω vitesse angulaire de rotation) (Hanson, 1974). Si le rotor présente des irrégularités de fabrication la périodicité imposée par le nombre de pales est détruite, et on voit apparaître les fréquences $m\Omega$ multiples de la rotation, contribution qui prédomine surtout à l'approche des régimes soniques (Benzakein, 1972).



a) au sol

b) en vol

Figure 3 - Lignes de courant de l'écoulement alimentant le rotor.

Lorsque le rotor fonctionne en vol (figure 3b), les lignes de courant de l'écoulement amont, imposé par le mouvement, sont parallèles, si bien que les structures turbulentes atmosphériques, qui ne sont pas étirées, ne peuvent conserver leur cohérence sur un grand nombre d'aubes. Elles deviennent donc des sollicitations incohérentes, et le spectre de bruit résultant est essentiellement composé d'un fond à large bande.

Lorsqu'on introduit un stator à l'aval du rotor, le bruit s'enrichit d'un mécanisme d'interaction rotor-stator. Les sillages du rotor, qui représentent une inhomogénéité tournante quasi-cohérente de l'écoulement, balayent le stator. Chaque aube fixe de celui-ci devient alors une source dont les pulsations sont imposées par le passage périodique des sillages. On observe donc les mêmes pics à bande étroite autour des fréquences $nB\Omega$ (Hanson, 1973). Si une machine comporte plusieurs rotors différant de par leur nombre de pales ou leur vitesse de rotation, le spectre comporte les combinaisons linéaires des fréquences provenant des familles d'harmoniques correspondant à chaque rotor (Cumpsty, 1974).

Les mécanismes dont nous venons de faire l'inventaire suffisent à rendre compte qualitativement du spectre de la figure 2. Dans le paragraphe n° 3 nous exposons un modèle de calcul modal susceptible d'en prédire l'allure.

2. CHOIX D'UN MODELE CLASSIQUE DE PREDICTION DU BRUIT DES COMPRESSEURS

Le souci de prendre en compte les différents mécanismes de génération de bruit dans un compresseur a motivé de nombreuses tentatives de prédiction dans la littérature. Parmi ces travaux une théorie complète a pu être bâtie à partir de l'analogie acoustique introduite en 1952 par Lighthill. Destinée au départ à l'étude du bruit des jets, l'analogie peut s'exprimer comme suit : un écoulement perturbé libre, localisé dans un fluide par ailleurs au repos, agit acoustiquement d'une manière analogue à une distribution de sources quadripolaires rayonnant dans un milieu acoustique fictif équivalent, parfait, au repos. Le problème revient à résoudre en espace libre une équation inhomogène.

L'extension au cas où des surfaces solides sont présentes dans l'écoulement a été faite en 1955 par Curle. Une formulation au cas où les surfaces solides sont en plus animées d'un mouvement quelconque a été exposée ensuite par Ffowcs-Williams et Hawkins en 1969. Cette formulation, directement applicable au bruit des machines tournantes, fait apparaître 3 types de sources :

- des sources quadripolaires correspondant au bruit propre de la turbulence
- des sources dipolaires correspondant aux efforts aérodynamiques instationnaires au niveau des surfaces en mouvement
- des sources monopolaires traduisant l'effet de déplacement de volume par les surfaces (effet d'épaisseur)

L'importance relative de ces termes sources est à examiner dans chaque cas. Pour un compresseur subsonique il est ainsi suffisant de ne retenir que les sources dipolaires, de loin les plus efficaces.

Dans la démarche analogique on est conduit à considérer une distribution de sources dans un milieu au repos. Cette simplification perd toutefois son sens lorsque la vitesse du milieu environnant intervient, comme dans le cas des compresseurs carenés. L'extension de l'analogie a ainsi été faite dans le cas où le milieu est animé d'un mouvement comportant des gradients (Lilley, 1973) ou d'une vitesse uniforme dans un conduit (Goldstein, 1976).

Parallèlement à la théorie de l'analogie acoustique s'est développée une approche fondée sur le rayonnement des sources ponctuelles en mouvement. Lowson abordait ainsi en 1965 le bruit des hélicoptères, les sources considérées étant alors simplement des forces de portance instationnaires (dipôles). Un modèle analogue a été développé ensuite par Hanson (1973, 1974) pour analyser le bruit des soufflantes et des compresseurs, et par Sunyach (1981) pour examiner le cas d'un sillage intercepté par un rotor. Ces études utilisent une technique de modulation en phase et en amplitude de l'interaction rotor-stator, proposée en 1964 par Griffiths pour prendre en compte la turbulence dans les machines tournantes. L'élargissement des pics à bande étroite peut alors être interprété.

Les théories précédentes sont bien adaptées aux rotors libres. Pour les compresseurs carenés il faut de plus tenir compte du fait que les sources rayonnent dans un conduit, et la meilleure façon d'appréhender le problème semble être celle qui fait directement appel à la notion de modes de propagation dans les conduits. Le champ sonore est alors décomposé suivant les modes tournants introduits par Tyler et Sofrin en 1962, et les sources, représentées comme dans l'analogie acoustique, excitent avec une certaine pondération les différents modes qui se propagent ou non suivant les propriétés de coupure du conduit. Ce type d'analyse modale, associé à un calcul de détermination de la distribution de sources, a été utilisé par Homicz et al. en 1974 pour prédire les fréquences discrètes dues à l'interaction rotor-stator.

C'est cette méthode modale que nous avons retenue pour notre étude, axée tout à la fois sur les mécanismes de génération du bruit et sur la propagation des ondes dans les conduits. Nous en exposons ici l'essentiel dans le cas d'un écoulement uniforme.

3. CALCUL MODAL DU BRUIT DE COMPRESSEUR EN CONDUIT AVEC ECOULEMENT UNIFORME

Nous modélisons le compresseur par un assemblage de rotors et de stators disposés dans un conduit cylindrique annulaire parfaitement rigide et de longueur infinie (Figure 4). Cette approche permet de ne pas prendre en compte les effets d'extrémités, et de considérer uniquement les problèmes de génération et de propagation du son dans le conduit.

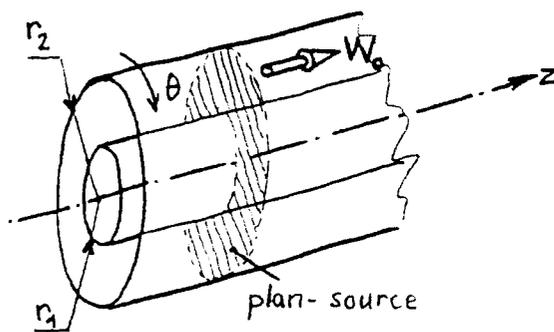


Figure 4 - Espace de résolution.

L'acoustique y est décrite par la petite perturbation d'un écoulement axial uniforme et permanent de vitesse W_0 . Nous supposons que cette perturbation est assez faible pour être traitée par les équations linéarisées de la dynamique des gaz.

Pour un fluide parfait en évolution adiabatique en l'absence de sources de masses, et avec un champ de forces extérieures \vec{F} , ces équations s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{Dp}{Dt} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v} &= 0 \\ \rho_0 \frac{D\vec{v}}{Dt} &= \vec{F} - \operatorname{grad} p \\ p &= c_0^2 \rho \end{aligned}$$

où $\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + W_0 \frac{\partial}{\partial z}$ est la dérivée suivant le mouvement moyen et c_0 la célérité du son dans l'écoulement uniforme. \vec{v} , p , ρ sont les composantes du champ de perturbation. Tout champ de vecteurs étant décomposable en une partie irrotationnelle et une partie à divergence nulle

$$\text{on peut écrire : } \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad \text{et} \quad \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad ,$$

$$\text{avec : } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}_1 = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}_1 = \vec{0} \quad \text{div } \vec{v}_2 = \text{div } \vec{F}_2 = 0$$

Il vient alors :

$$\rho_0 \frac{D}{Dt} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}_2) = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}_2$$

$$\text{et } \Delta p - \frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 p}{Dt^2} = \text{div } \vec{F}_1 \quad \frac{Dp}{Dt} + \rho_0 c_0^2 \text{div } \vec{v}_1 = 0$$

(Goldstein, 1976)

Par conséquent le champ de pression n'est associé qu'à la partie irrotationnelle du champ de vitesse. Cela signifie que les modes de perturbation de types "acoustique" et "tourbillonnaire" sont découplés au premier ordre dans l'écoulement uniforme (Chu & Kovasznay, 1953). L'équation d'ondes sur la pression décrit la propagation des ondes acoustiques dans le conduit; l'équation d'évolution du champ tourbillonnaire peut se traiter séparément.

Si nous notons la distribution de sources $S(r, \theta, z, t) = \text{div } \vec{F}$, le problème répond à l'équation :

$$\Delta p - \frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 p}{Dt^2} = S$$

associée aux conditions aux limites traduisant l'annulation de la vitesse radiale aux parois qui s'écrivent à l'aide de la pression :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad \text{en } r=r_1 \text{ et } r=r_2$$

La méthode modale consiste à rechercher la solution sous la forme :

$$p(r, \theta, z, t) = e^{-i(\omega t + kz + n\theta)} p(r)$$

Cette approche est dictée par la géométrie du conduit. Mathématiquement elle équivaut à une triple transformée de Fourier sur les équations, suivant les variables θ , z , t . On se ramène ainsi à une équation différentielle ordinaire sur r . Les solutions propres du problème s'étudient en considérant $S \equiv 0$, ce qui conduit à l'équation de Bessel :

$$\frac{d^2 p}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp}{dr} + \left[\kappa^2 - \frac{n^2}{r^2} \right] p = 0 \quad M_0 = W_0/c_0$$

$$\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} + 2 M_0 \frac{\omega}{c_0} k - (1 - M_0^2) k^2$$

et aux conditions aux limites $\frac{dp}{dr} = 0$ en $r=r_1$, et $r=r_2$

L'ensemble constitue un problème aux valeurs propres du type Sturm-Liouville, dont les résultats généraux sont connus depuis longtemps (cf. Nikiforov et Ouvarov, 1974).

Ainsi il existe une infinité de valeurs propres positives κ_j^2 , $j=0, 1, 2, \dots$. Les fonctions propres $C_{nj}(r)$ associées, combinaisons linéaires de fonctions de Bessel de 1e et 2e espèces, forment un ensemble orthonormé, l'orthogonalité étant obtenue pour le produit scalaire suivant :

$$(6) \quad \langle C_{nj}, C_{ni} \rangle = \int_{r_1}^{r_2} r C_{nj}(r) C_{ni}(r) dr = \delta_{ij}$$

Les fonctions $e^{-i(\omega t + kz + n\theta)} C_{nj}(r)$ sont les modes propres de propagation des ondes de pression dans le conduit. Ce sont les modes tournants définis par Tyler et Sofrin en 1962.

Les $C_{nj}(r)$ peuvent être utilisés comme noyaux intégraux pour construire une transformée de Bessel suivant r , définie par :

$$(7) \quad F_j = \int_{r_1}^{r_2} r f(r) C_{nj}(r) dr \quad f(r) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j C_{nj}(r)$$

(cf. Sneddon, 1951)

Si à présent on applique les quatre transformées de Fourier-Bessel à l'équation inhomogène de départ, on se ramène dans l'espace spectral (j, n, k, ω) à l'équation simple :

$$(8) \quad p(j, n, k, \omega) = (\kappa^2 - \kappa_j^2)^{-1} S(j, n, k, \omega)$$

La pression s'exprime donc directement à partir des sources dans l'espace spectral. Le théorème d'inversion permet alors de remonter à la solution dans l'espace physique :

$$(9) \quad p(r, \theta, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-i(\omega t + kz)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{S(j, n, k, \omega)}{\kappa^2 - \kappa_j^2} C_{nj}(r) e^{-in\theta}$$

avec

$$(10) \quad S(j, n, k, \omega) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{r_1}^{r_2} r C_{nj}(r) dr \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{i(\omega t + kz)} \int_0^{2\pi} d\theta e^{in\theta} S(r, \theta, z, t)$$

La solution se décompose donc sur l'ensemble des modes propres du conduit. Le bruit se calcule formellement dès que l'on connaît la distribution $S(r, \theta, z, t)$. Un exemple d'application de cette décomposition, déjà utilisée en 1974 par Homicz, est donné dans l'annexe I.

4. RELATION DE DISPERSION DES ONDES ACOUSTIQUES, ET PHENOMENES DE COUPE

Un mode propre existant dans le conduit considéré correspond à la condition $\kappa^2 = \kappa_j^2$. Ceci fournit un lien entre k et ω , qui est la relation de dispersion du conduit en présence d'un écoulement uniforme. Ici cette relation s'écrit :

$$(11) \quad \frac{\omega^2}{c_0^2} + 2M_0 \frac{\omega}{c_0} k - (1 - M_0^2) k^2 - \kappa_j^2 = 0$$

la solution $k=f(\omega)$ est :

$$(12) \quad k_{\pm} = \frac{1}{\beta^2} \left[M_0 \frac{\omega}{c_0} \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \beta^2 \kappa_j^2} \right], \quad \beta^2 = 1 - M_0^2$$

La relation de dispersion est par conséquent une hyperbole. (Figure 5).

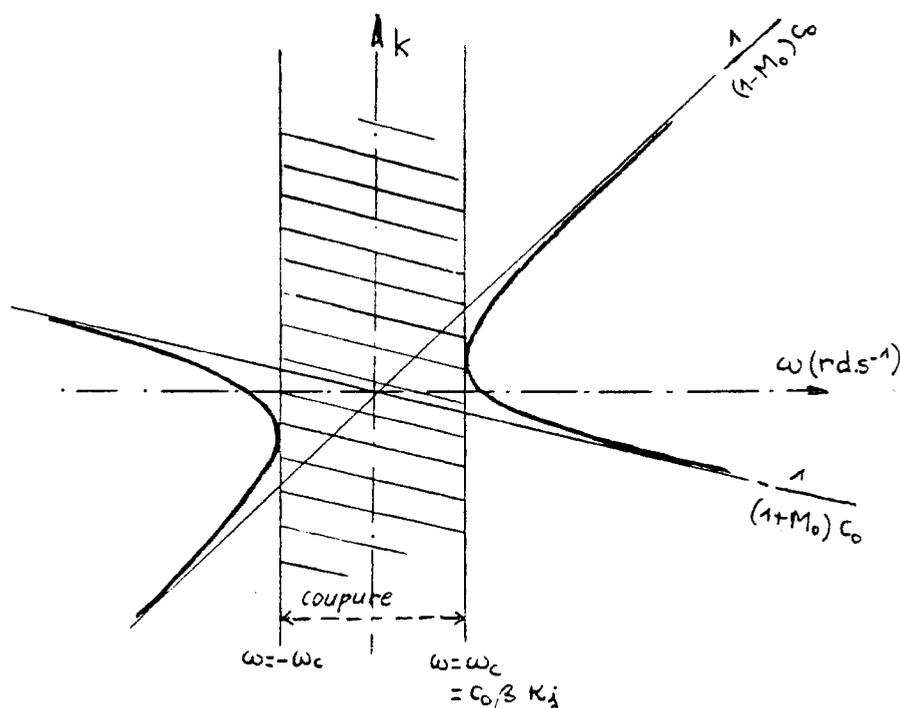


Figure 5 - Relation de dispersion d'un conduit annulaire avec écoulement uniforme.

Elle fournit tous les renseignements concernant les modes. Si la fréquence excitatrice (imposée par la vitesse de rotation dans notre cas) est inférieure à ω_c , appelée fréquence de coupure du mode considéré, ce mode ne se propage pas mais est atténué (Tyler et Sofrin, 1962). Cette propriété du conduit joue un grand rôle dans la conception des moteurs en aéronautique, où l'on calcule par exemple le nombre des aubes d'un redresseur de façon à ce que les modes résultant de l'interaction de type rotor-stator soient le mieux possible coupés.

En outre, la relation de dispersion fournit la vitesse de phase du mode ω/k , vitesse des surfaces équiphasés, et la vitesse de groupe $d\omega/dk$ correspondant à la vitesse de propagation de l'énergie (Junger et Perulli, 1978).

CHAPITRE II - ANALYSE DU BRUIT DE BOSSES DES COMPRESSEURS,

INTRODUCTION

Le phénomène de bruit de bosses se traduit, dans le spectre d'un compresseur, par des remontées du bruit à large bande, se produisant en dehors des pics à fréquences discrètes habituels, et présentant un double aspect (figure 6) :

- Un aspect déterministe, car elles sont souvent centrées autour d'une fréquence particulière (proche de multiples demi-entiers de la fréquence de passage des pales de la soufflante dans le cas des compresseurs d'essai de la SNECMA).

- Un aspect aléatoire, car leur forme irrégulière intéresse une certaine gamme de fréquences.

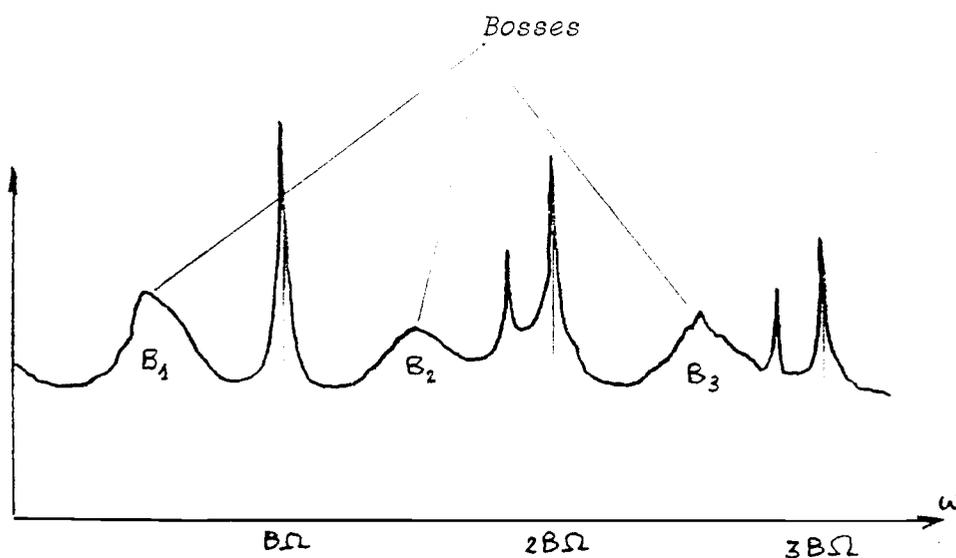


Figure 6 - Spectre de bruit de bosses d'un compresseur sur banc d'essai.

Au cours de ce chapitre nous nous proposons tout d'abord de préciser les caractéristiques essentielles du bruit de bosses dans un cas particulier, à partir d'une analyse fine des enregistrements fournis par la SNECMA. Nous discuterons ensuite la validité des différents mécanismes susceptibles d'expliquer ce phénomène.

1. DISPOSITIF EXPERIMENTAL

a. Maquette

Les données fournies par la SNECMA concernent les essais acoustiques d'un compresseur expérimental au banc ICI du Centre de Villaroche (SNECMA, communications privées). La maquette étudiée, réalisée à l'échelle 0.45, se compose du circuit secondaire, et des trois premiers étages du compresseur primaire (étages basse-pression) (figure 7).

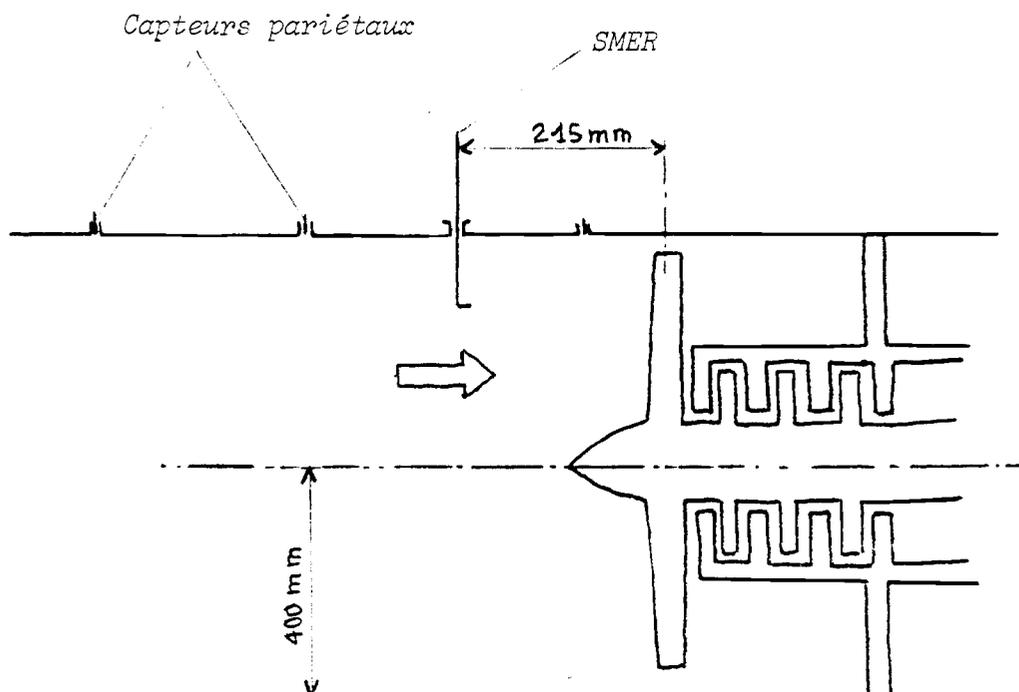


Figure 7 - Disposition du banc d'essai.

Les nombres d'aubes de chaque roue fixe ou mobile sont résumés dans le tableau suivant :

R	rotor soufflante	44
S	redresseur secondaire	83
R_1, R_2, R_3	rotors primaires (identiques)	83
S_1	stators primaires	82
S_2		107
S_3		119
S_4		119

Les essais retenus sont effectués à différentes fractions du régime nominal ($\Omega = N_n = 11\,500$ tr/mn), et avec un vannage nominal (correspondant aux conditions nominales de fonctionnement du moteur).

b. Matériel de mesure

Un réseau de capteurs de pression, disposés soit en paroi de la veine d'essai, soit dans le corps d'une sonde mobile d'exploration radiale (SMER), permet de caractériser le champ sonore à l'amont de la soufflante (figure 7). La SMER peut se déplacer radialement depuis la paroi de la veine jusqu'à un enfoncement de 200 mm ; elle est équipée d'un microphone Bruël et Kjaers 1/4 pouce 4136. Les capteurs pariétaux sont constitués de ce même microphone et de capteurs Kulite type Mic 190.

Les signaux de pression, enregistrés grâce à un magnétophone RACAL 14 pistes, sont traités ensuite par un analyseur deux voies NICOLET. Les dépouillements consistent à obtenir des spectres de la fluctuation de pression dans la bande de fréquence $0 \rightarrow 20$ kHz. La largeur de bande d'analyse permise vaut alors 25 Hz. (Roger et Arbey, 1982a).

2) RESULTATS

Nous présentons ici les résultats relatifs aux essais effectués aux fractions 0,5, 0,6, et 0,7 du régime nominal N_n . Pour des valeurs supérieures le phénomène des bosses est nettement moins visible, d'autant plus que l'observation est perturbée par la présence des fréquences multiples de la rotation (F.M.R.).

a. Capteurs de paroi

Les planches II.1 à II.3 montrent l'évolution avec la vitesse du spectre de bruit relevé en deux points en paroi de la veine d'essai à l'amont de la soufflante. Toutes les raies à fréquences discrètes s'expliquent à l'aide des théories classiques dont il a été fait mention au chapitre I. Elles sont dûes à la géométrie et à la vitesse de rotation de la soufflante et des rotors du compresseur primaire, tous identiques. Entre 0 et 20 kHz on observe en outre quatre bosses, notées B_1 , B_2 , B_3 , B_4 , intercalées entre les harmoniques de la fréquence de passage des pales de la soufflante.

Comme le montre la comparaison des spectres à l'amont proche et à l'amont lointain, tous les bruits correspondants se propagent, hormis les fréquences multiples de la rotation présentes à $0.6 N_n$ et à $0.7 N_n$ (planches II.2 et II.3).

Le phénomène de bosses, en tout état de cause, est le plus marqué au plus bas régime exploré : $0,5 N_n$, et perd de l'importance relative lorsque le régime augmente.

b. Exploration radiale

L'évolution radiale du spectre de bruit en un point donné (abscisse : 215 mm) à l'amont de la soufflante est indiquée sur la planche II.4 pour le régime de $0,5 N_n$.

De façon générale l'amplitude relative des fréquences rattachées à la soufflante diminue lorsqu'on s'enfonce radialement dans la veine, alors que celles correspondant aux rotors du circuit primaire prennent de l'importance. Ceci est dû à la structure radiale des modes de propagation, et au fait que le circuit primaire occupe le coeur de la machine.

Des variations plus spectaculaires s'observent sur les bosses, qui subissent non seulement d'importantes variations de niveau relatif, mais aussi un glissement en fréquence systématique. Ainsi lorsqu'on s'enfonce dans la veine :

- La bosse B_1 diminue en niveau et est décalée vers les hautes fréquences.
- La bosse B_2 évolue en sens inverse.
- La bosse B_3 diminue en niveau et est décalée vers les basses fréquences.
- La bosse B_4 disparaît.

Ce décalage en fréquence est un caractère propre au bruit de bosses ; il ne peut être imputé au fonctionnement des SMER, puisque les raies habituelles des spectres sont stables.

Enfin, l'exploration radiale à $0.6 N_n$ ou $0.7 N_n$, délicate en raison de la moindre importance des bosses, n'apporterait aucun élément nouveau.

c. Paramètres influant sur le bruit de bosses

D'autres campagnes de mesures entreprises par la SNECMA permettent de compléter les observations précédentes. Ainsi la planche II.5 , où figurent les spectres obtenus pour différentes versions de la soufflante permet de mettre en évidence la forte influence sur les bosses d'une simple modification de la géométrie en bout de pales. En outre une série d'essais effectués au sol et en vol (avec des capteurs embarqués) sur un moteur équipé d'une soufflante du même type montrent que les bosses ne sont pas modifiées par le changement de conditions d'écoulement (planche II.6), alors que les fréquences discrètes s'éteignent en vol. C'est d'ailleurs cette propriété qui fait la nuisance du bruit de bosses.

3. MANIFESTATIONS SIMILAIRES RELEVÉES DANS LA LITTÉRATURE

L'existence de remontées inattendues du bruit à large bande dans les spectres de bruit des compresseurs à double-flux n'a pas été observée uniquement à la SNECMA. La littérature internationale en offre plusieurs exemples.

Ainsi, en 1975, Roundhill et Shaut remarquent sur le moteur CF 6-50 un bruit de bosses identique à celui de la SNECMA, à ceci près que les bosses disparaissent en vol (planche II.7). De même Mani et al., 1976, font état de remontées anormales du bruit, toujours situées approximativement à des multiples demi-entiers de la fréquence de passage des pales de la soufflante, mais n'intervenant que dans le cas où le moteur fonctionne en dehors de ses conditions nominales (planche II.8).

Des bosses de bruit peuvent aussi apparaître à d'autres endroits dans le spectre. C'est le cas du phénomène étudié par Hanson (1977) sur la soufflante QF-1B de la NASA (planche II.9). Les bosses sont ici situées autour des fréquences $nF + B$, où F est la fréquence fondamentale de passage des pales.

Enfin, les travaux de Kerrebrock (1977) sur une soufflante d'essai du M.I.T., bien qu'ils ne fassent pas la matière d'une étude acoustique, font état de l'existence dans l'écoulement de sortie de la soufflante d'une périodicité différente de celle des sillages. Cette périodicité évolue d'ailleurs lorsqu'on s'éloigne à l'aval des aubes.

4. RECHERCHE D'UN MECANISME SUSCEPTIBLE D'ETRE RESPONSABLE DU BRUIT DE BOSSES

L'indépendance du bruit de bosses sur le compresseur étudié ici vis-à-vis des propriétés d'homogénéité de l'écoulement amont nous conduit à en rechercher l'origine en aval de la soufflante, ou au niveau même de celle-ci. On peut alors être tenté de mettre en cause les caractéristiques fines de l'écoulement, généralement négligées dans les estimations du bruit, à savoir :

- Les couches limites, tant sur les aubages que sur les parois de la veine.
- La turbulence des sillages.
- Les tourbillons de bout de pale, dus en partie à la différence de pression entre les faces de la pale, et en partie à l'interaction des pales avec les couches limites de la veine.
- Les écoulements secondaires.

Cependant, la turbulence des couches limites et des sillages, en raison des petites dimensions de ses structures, ne peut qu'enrichir le bruit à large bande incohérent. En outre, les tourbillons de bout de pale et les écoulements secondaires, se reproduisant d'aube à aube, contribuent à l'émission à bande étroite autour des raies habituelles. Tous ces écoulements fins ne peuvent en aucun cas émettre de façon semi-cohérente à des fréquences inattendues. Physiquement, l'obtention de fréquences nouvelles ne peut provenir que de l'existence de structures tournantes, de périodicité différente de celle des rotors, ou animées d'une vitesse de rotation différente.

La première hypothèse qui vient alors à l'esprit est l'existence d'une instabilité de fonctionnement du compresseur, notamment un décollement tournant. C'est le mécanisme proposé par Roundhill et Schaut (1975). La seconde hypothèse consiste à supposer que l'écoulement tournant induit par la soufflante est le siège d'instabilités hydrodynamiques. Nous allons successivement envisager ces deux possibilités.

a) Le décollement tournant

Le point de fonctionnement d'un étage de compresseur se représente dans le plan de caractéristiques débit (D)- rapport de pression (π), comme l'indique la figure 8. Ce plan, paramétré par les courbes isovitesses, peut être partagé en deux zones : une zone d'utilisation, et une zone dite "zone de pompage" dans laquelle apparaissent les instabilités de fonctionnement du compresseur :

- décollement tournant
- décollement annulaire
- pompage

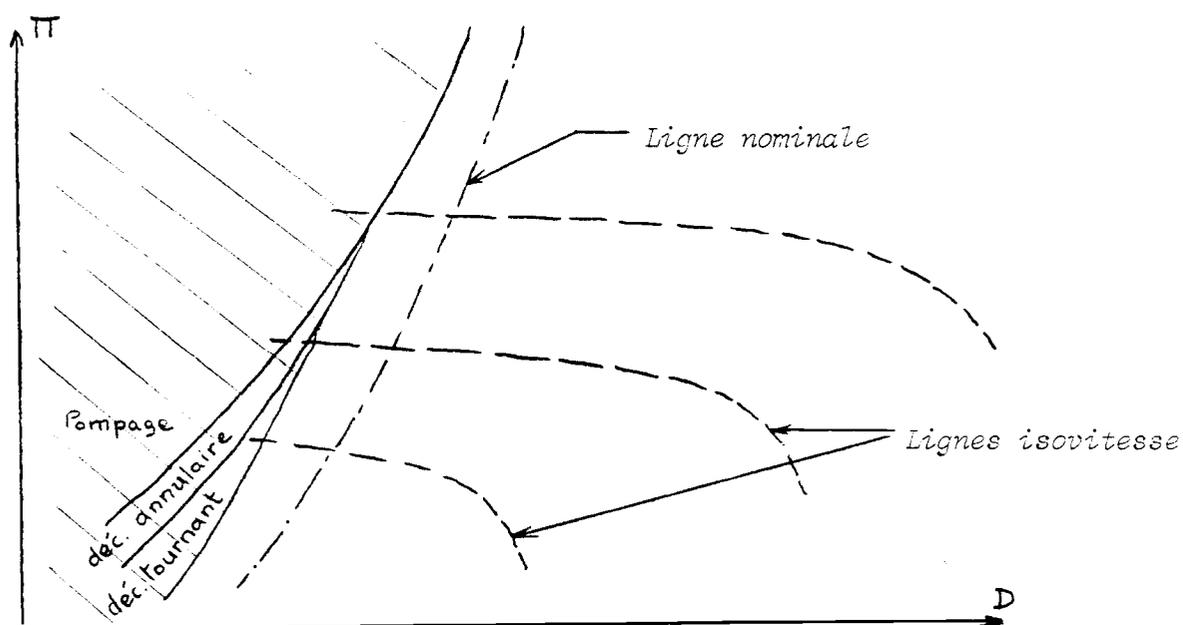
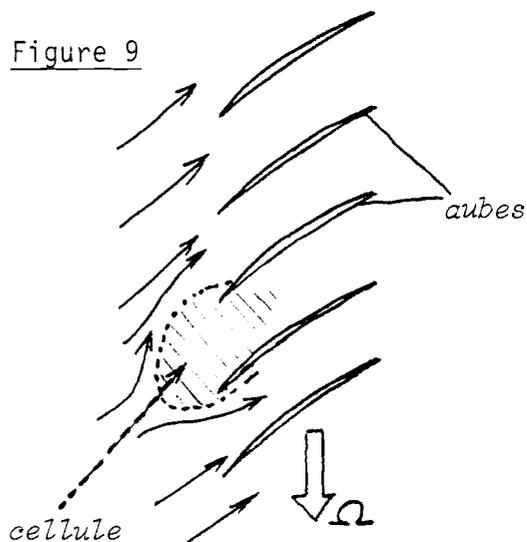


Figure 8 - D'après référence : P. FERRAND (1980)

Caractéristique de fonctionnement d'un compresseur.

Le mécanisme du décollement tournant est le suivant
(Chauvin, 19) :



Supposons qu'une inhomogénéité de l'écoulement amont cause une augmentation locale d'angle d'attaque sur l'aubage. Il peut alors y avoir un blocage partiel du canal interaubes, qui aboutit à la formation d'une cellule à débit réduit (Figure 9). Celle-ci peut se propager. On passe alors de l'état stable de fonctionnement normal à un autre état stable anormal qui est le décollement tournant. Cet état est défini par un nombre de cellules C tournant à la vitesse Ω' . Généralement C varie de 1 à 10,

et Ω' de 0.2Ω à 0.8Ω , Ω étant la vitesse de rotation de l'aubage. Cependant le nombre de cellules peut être beaucoup plus important ; on est dans ce cas en présence d'un décollement tournant faible, affectant peu les performances du moteur, et difficile à détecter.

En temps normal le point de fonctionnement se trouve sur la ligne nominale, et le décollement tournant n'a aucune raison de se produire. Mais si des inhomogénéités interviennent dans l'écoulement amont, le point de fonctionnement peut être accidentellement déplacé hors de la zone d'utilisation, et le décollement tournant peut apparaître. Ceci se produit surtout à bas régime, dans les cas suivants :

- En vol, lors d'une manoeuvre de pilotage qui perturbe l'écoulement d'entrée du rotor, ou dans les cas de forte incidence.

- Au sol, lors d'essais statiques, alors que le rotor absorbe les structures allongées de la turbulence extérieure.

Les cellules tournant en bloc se comportent alors comme un rotor fictif ajouté à la machine, ce qui peut expliquer l'apparition de fréquences nouvelles.

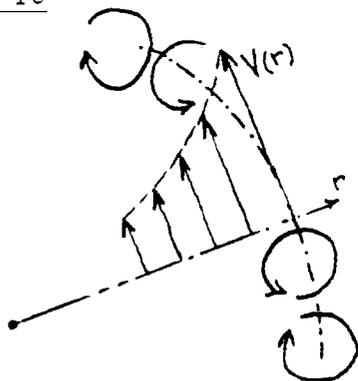
Il est possible d'expliquer ainsi les observations de Roundhill et Schaut (1975), qui seraient dues à un décollement tournant faible à grand nombre de cellules ne se produisant qu'au sol. Mais un tel mécanisme ne peut expliquer le bruit de bosse de la SNECMA, qui subsiste en vol ; en outre, l'évolution radiale de la fréquence dominante des bosses s'accorde mal avec cette hypothèse. Pour ces deux raisons nous ne pensons pas qu'un décollement tournant puisse être à l'origine du phénomène étudié ici.

b) Instabilités hydrodynamiques de l'écoulement tournant secondaire

Le circuit secondaire du compresseur est le siège d'un écoulement tournant organisé ; celui-ci est par conséquent sujet à des instabilités hydrodynamiques en raison de l'existence des accélérations complémentaires (ondes inertielles) (Chandrasekhar, 1961 ; Greenspan, 1968). L'espacement important entre la soufflante et son redresseur secondaire peut alors permettre à certains modes d'instabilité de se développer pour former dans l'écoulement tournant des structures cohérentes. Celles-ci, en interagissant ensuite avec les aubes du redresseur, peuvent émettre du bruit. A notre connaissance de tels mécanismes oscillatoires n'ont jamais été pris en compte dans les calculs de bruit des turbomachines. C'est pourtant cette hypothèse que retiennent Kerrebrock (1977) et Hanson (1977) pour expliquer les fréquences inhabituelles observées sur leurs installations qui n'étaient constituées que par les circuits secondaires (planche II.10).

Les travaux de Kerrebrock (1977) mettent en évidence une structure azimutale à 16 secteurs à l'aval d'un rotor de 23 pales, et cela uniquement dans la partie périphérique du canal, là où la loi radiale de vitesse tangentielle est croissante. Dans cette zone, en effet, peuvent se développer des cellules tourbillonnaires obéissant au mécanisme suivant :

- Figure 10 -



une particule fluide soumise à un défaut de vitesse, dans un gradient moyen radial de vitesse positif, se met à osciller de par l'effet de la conservation de son moment angulaire (Kerrebrock, 1977). On peut alors avoir formation d'un anneau de tourbillons contrarotatifs groupés par deux, jouant le rôle d'un rotor fictif. (Figure 10).

L'écoulement évolue donc localement depuis la périodicité de ses sillages vers un mode d'instabilité propre à la loi de rotation.

Ce mécanisme a été utilisé par Hanson (1977) pour tenter d'expliquer l'apparition de la fréquence 117Ω sur une installation où le rotor comportait 53 pales.

Conclusion

Nous sommes conduits, à l'issue de ce chapitre, à considérer les ondes inertielles dans l'écoulement induit par la soufflante comme le mécanisme le plus probable de génération du bruit de bosses. L'appréhension du problème passe donc par une étude des modes inertiels de fluctuation d'un écoulement tournant. Celle-ci fait l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE III - THÉORIE MODALE DE LA PROPAGATION DU SON DANS UNE CONDUITE ANNULAIRE EN PRÉSENCE D'UN ÉCOULEMENT TOURNANT.

Le sujet de ce chapitre est l'étude des modes d'instabilités existant dans un écoulement tournant, et que nous savons susceptibles d'être responsables du bruit de bosses. Nous tentons de généraliser la démarche modale du chapitre I au cas où il existe une rotation de l'écoulement moyen.

INTRODUCTION

La littérature ayant trait à la dynamique des écoulements tournants est assez abondante, en raison de leur importance en géophysique et dans l'étude des phénomènes atmosphériques. En particulier, les ouvrages de Chandrasekhar (1961) et de Greenspan (1968) sur la stabilité des écoulements tournants donnent une vision générale des problèmes posés par la rotation et des théories développées à ce sujet.

Il ressort de ces études que tout écoulement tournant, en raison des accélérations complémentaires qui y opèrent, est sujet à des modes d'instabilité appelés ondes inertielles. Cependant le fluide y est la plupart du temps supposé incompressible, ce qui apporte de grosses simplifications mathématiques lors de la résolution modale des équations.

Il est malgré tout des cas où la compressibilité ne peut être négligée, notamment dans les chambres de combustion, les compresseurs, etc..., et bien sûr lorsqu'on étudie l'acoustique des écoulements. Lors d'une étude complète on doit donc s'attendre à voir émerger de la théorie deux types d'ondes : les ondes inertielles venant de la rotation, et les ondes acoustiques, conséquence de la compressibilité. Ce double aspect des modes de fluctuation se retrouve dans l'étude des ondes acoustiques et de gravité (voir par exemple Lighthill, 1978, et Poirée, 1982).

La littérature sur les écoulements tournants compressibles est peu abondante. Les références actuellement disponibles (SALANT, 1968 ; MORTON et SHAUGHNESSY, 1972 ; MILES, 1981 ; SOZOU, 1969a et 1969b ; SOZOU et SWITHENBANK, 1965) regroupent des théories partielles restreignant l'étude à des cas asymptotiques ou à certains types seulement de mouvements fluctuants, mal adaptées au cas des compresseurs à cause de l'absence d'une vitesse axiale (parallèle à l'axe de la rotation).

La seule approche complète adaptable à l'aérodynamique des turbomachines nous semble celle initialisée par Kerrebrock (1974, 1977) dans un cadre très général permettant aussi à des inhomogénéités d'entropie de générer un troisième type de mouvement fluctuant (modes entropiques).

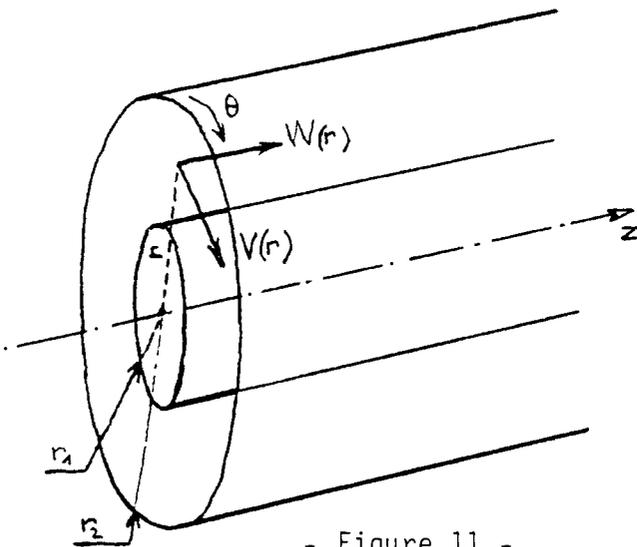
Nous utilisons dans ce chapitre une version simplifiée des calculs de Kerrebrock, dans le cas d'un écoulement tournant isentropique. Cette approximation nous suffit pour deux raisons :

- Dans un étage de compresseur les phénomènes liés aux variations d'entropie sont négligeables (il en serait peut-être autrement dans un étage de turbine).
- Nous recherchons une formulation minimale permettant de décrire qualitativement l'influence de la rotation sur la propagation du bruit.

1. EQUATIONS LINEARISEES DE LA DYNAMIQUE DES GAZ DANS UN ECOULEMENT TOURNANT

a) Ecoulement de base

Nous décrivons l'acoustique par une petite perturbation d'un écoulement de base défini par le champ de vitesse (σ, V, W) , de pression P_0 , et de densité ρ_0 , à dépendance uniquement radiale dans un repère fixe en coordonnées cylindriques (figure 11). Nous nous placerons en l'absence de forces extérieures.



- Figure 11 -

La rotation impose un gradient radial de densité et de pression statique, en accord avec la loi d'équilibre radial :

$$\frac{dP_0}{dr} = \rho \frac{V^2}{r}$$

La perturbation de l'écoulement de base, fonction des variables r , θ , z , t , sera notée $(u, v, w) = \vec{v}$, p, ρ , et nous nous placerons dans le cadre de l'acoustique linéaire.

b) Hypothèses

Nous faisons d'abord l'hypothèse d'un fluide non visqueux et sans conductibilité thermique. Il est alors naturel de le supposer en évolution adiabatique (Landau & Lifschitz, 1971). L'entropie d'une particule fluide se conserve alors au cours de son mouvement.

A partir de l'équation d'état du gaz parfait $\bar{P} = R \bar{\rho} \bar{T}$ et de l'équation d'énergie interne $d\bar{E} = -\bar{P} d(1/\bar{\rho})$, on est en mesure de déduire l'équation d'énergie portant sur le champ de perturbation (voir annexe II).

Cette équation ne fournit pas un lien simple entre la perturbation de pression et la perturbation de densité. Nous sommes donc amenés à faire l'hypothèse supplémentaire que l'entropie du fluide est uniforme, ce qui permet d'écrire :

$$p = c_0^2 \rho \quad \text{où} \quad c_0 = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} \quad \text{est la célérité locale}$$

du son dans l'écoulement de base.

c) Equations de conservation

Nous écrivons ici les équations linéarisées de la mécanique des fluides dans un écoulement moyen tournant, compte-tenu de l'équilibre radial et de l'hypothèse d'isentropie. Les calculs ont été renvoyés dans l'annexe II.

L'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{1}{c^2} \frac{DP}{Dt} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v} + \frac{d\rho_0}{dr} u = 0$$

où $D/Dt \equiv \partial/\partial t + \frac{V}{r} \partial/\partial \theta + W \partial/\partial z$ est l'opérateur de dérivée suivant le mouvement moyen.

De même l'équation de quantité de mouvement a pour composantes :

$$\rho_0 \left[\frac{Du}{Dt} - \frac{2V}{r} v \right] = \frac{V^2}{rc^2} p - \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\rho_0 \left[\frac{Dv}{Dt} + \left(\frac{V}{r} + \frac{dV}{dr} \right) u \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

$$\rho_0 \left[\frac{Dw}{Dt} + \frac{dW}{dr} u \right] = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

d) Equations du champ tourbillonnaire et de la pression

Le rotationnel de l'équation de la quantité de mouvement fournit l'équation d'évolution du champ tourbillonnaire $\vec{\omega} = \operatorname{rot} \vec{v}$. Les composantes sont les suivantes :

$$\frac{D\omega_r}{Dt} = \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} u$$

$$\frac{D\omega_\theta}{Dt} = \frac{2V}{r} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{d^2 W}{dr^2} u + \frac{dW}{dr} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{d}{dr} \left(\frac{V}{r} \right) \frac{\partial w}{\partial \theta}$$

$$\frac{D\omega_z}{Dt} = -\left(\frac{V}{r} + \frac{dV}{dr} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \frac{dW}{dr} \frac{\partial v}{\partial z} - \left(\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} \right) u$$

L'équation de la pression s'obtient à partir de la divergence de l'équation de quantité de mouvement, et de l'équation de continuité :

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{D^2 p}{Dt^2} = \frac{d\rho_0}{dr} \frac{Du}{Dt} - 2\rho_0 \frac{dW}{dr} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{2\rho_0}{r} \left[\frac{dV}{dr} \left(v - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + V \frac{\partial v}{\partial r} \right] \\ + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\rho_0}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{V^2 p}{\rho_0 c^2} \right]$$

(Roger et Arbey, 1983)

On peut d'ores et déjà faire les remarques suivantes. Les équations du champ tourbillonnaire et l'équation de la pression sont fortement modifiées par rapport au cas d'un écoulement uniforme. (Chapitre I).

Elles ne sont plus homogènes. Les termes sources supplémentaires sont la conséquence de la prise en compte d'un champ de vitesse non uniforme et des accélérations complémentaires liées à la rotation. Celle-ci induit un couplage au 1er ordre entre les modes de fluctuation tourbillonnaire et acoustique.

Ces résultats ont déjà été mentionnés par Kerrebrock (1974), qui obtenait une équation sur la densité. Si l'on ne fait pas l'hypothèse d'isentrope, les couplages induits par la rotation se voient compliqués par l'intervention de modes entropiques.

Ces phénomènes sont plus simples à analyser dans deux cas particuliers d'écoulements tournants :

- la rotation solide, qui est une rotation en bloc du fluide :

$$W(r) = W_0 \quad V(r) = \Omega r$$

- le tourbillon libre, qui est un régime d'écoulement de base irrotationnel :

$$W(r) = W_0 \quad V(r) = \frac{\Gamma}{r}$$

Écoulement moyen de rotation solide

Les équations se réécrivent comme suit :

$$\frac{D\omega_r}{Dt} = 2\Omega \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{D\omega_\theta}{Dt} = 2\Omega \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\frac{D\omega_z}{Dt} = -2\Omega \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)$$

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{D^2 p}{Dt^2} = \frac{d\rho_0}{dr} \frac{Du}{Dt} + \rho_0 \Omega \omega_z + \frac{1}{r} \frac{d\rho_0}{dr} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\rho_0}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\Omega^2 r^2 p}{\rho_0 c^2} \right]$$

Écoulement moyen de tourbillon libre

On obtient dans ce cas :

$$\frac{D\omega_r}{Dt} = 0$$

$$\frac{D\omega_\theta}{Dt} = \frac{2\Gamma}{r^2} \omega_r$$

$$\frac{D\omega_z}{Dt} = 0$$

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{D^2 p}{Dt^2} = \frac{d\rho_0}{dr} \frac{Du}{Dt} + \frac{2\rho_0 \Gamma}{r^2} \left[\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r} \frac{d\rho_0}{dr} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\rho_0}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\Gamma^2 p}{\rho_0 r^2 c^2} \right]$$

L'examen de ces cas particuliers montre notamment que si l'écoulement moyen est irrotationnel (tourbillon libre), alors à partir d'un état irrotationnel la perturbation reste irrotationnelle. Il n'y a pas de création de tourbillon.

D'une façon générale, le tourbillon intervient en jouant un rôle de source pour l'équation de la pression. Par conséquent, un champ tourbillonnaire tel que la turbulence, embarqué dans un écoulement tournant, peut produire du bruit.

Ce couplage est d'une grande importance dans les turbomachines, car il montre que la turbulence générée par exemple dans les sillages des aubes d'une soufflante peut produire du bruit à large bande dans le circuit secondaire de la machine. Ce bruit a une raison d'être de par le fait d'un espacement rotor-stator important.

Si de plus le champ tourbillonnaire s'organise dans l'écoulement tournant pour donner lieu à des structures fluctuantes propres, celles-ci produiront un bruit d'une autre nature en jouant le rôle de sollicitations périodiques sur le stator. C'est ce phénomène que nous pensons constituer un mécanisme possible de génération du bruit de bosses.

Nous allons à présent, comme il a été fait au chapitre I pour un écoulement uniforme, adopter une technique modale de résolution des équations de l'écoulement tournant, et voir quelles sont les complications introduites par la rotation. Le but recherché est dans un premier temps la détermination des modes propres de propagation, et de la relation de dispersion du conduit pour chaque mode.

2. TRANSFORMÉE DE FOURIER DES ÉQUATIONS

Les détails de calculs sont reportés en annexe III, et les mêmes notations sont employées pour les grandeurs transformées. La transformée de Fourier appliquée aux équations de conservation permet, après élimination des composantes v et w du champ de vitesse, d'obtenir un système de deux équations différentielles ordinaires du premier ordre à coefficients non constants, portant sur la vitesse radiale u et la pression p :

$$\frac{dp}{dr} = i\rho_0 \left[\lambda - \frac{2V}{\lambda r} \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) \right] u - \left[\frac{2nV}{\lambda r^2} - \frac{V^2}{rc^2} \right] p$$

$$\frac{du}{dr} = - \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} - \frac{n}{\lambda r} \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) - \frac{k}{\lambda} \frac{dW}{dr} \right] u + \frac{1}{\lambda \rho_0} \left[\frac{\lambda^2}{c^2} - k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right] p$$

Dans ces écritures n , k , ω sont les variables conjuguées de θ , z , t , et λ est la valeur propre de l'opérateur de dérivée suivant le mouvement moyen :

$$\lambda(r) = \omega + kW + \frac{nV}{r}$$

$\lambda(r)$ représente la fréquence observée dans le mouvement moyen.

Sur ce système les conditions aux limites imposées par la présence du conduit, que nous supposons infini et parfaitement rigide, s'écrivent :

$$u = 0 \quad \text{en } r=r_1 \text{ et } r=r_2$$

Il est possible ensuite d'éliminer u pour obtenir l'équation radiale de la perturbation de pression :

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 p}{dr^2} + \left[\frac{1}{r} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) - \frac{k}{\lambda} \frac{dW}{dr} - \frac{1}{D} \frac{dD}{dr} \right] \frac{dp}{dr} \\ & + \left\{ \frac{D}{\lambda^2} \left(\frac{\lambda^2}{c^2} - k^2 \right) - \frac{n^2}{r^2} - \frac{2nV}{\lambda r^2} \left[\frac{1}{r} + \frac{k}{\lambda} \frac{dW}{dr} + \frac{1}{D} \frac{dD}{dr} - \frac{1}{V} \frac{dV}{dr} - \frac{V^2}{rc^2} \right] \right. \\ & \left. + \frac{V^2}{rc^2} \left[\frac{k}{\lambda} \frac{dW}{dr} + \frac{1}{D} \frac{dD}{dr} - \frac{2}{V} \frac{dV}{dr} + (\gamma-1) \frac{V^2}{rc^2} \right] \right\} p = 0 \end{aligned}$$

Dans cette expression $D = \lambda^2 - \frac{2V}{r} \left(\frac{V}{r} + \frac{dV}{dr} \right)$. Si D n'est pas nul les conditions aux limites écrites avec la pression sont :

$$\frac{dp}{dr} + \left[\frac{2nV}{\lambda r^2} - \frac{V^2}{rc^2} \right] p = 0 \quad r=r_1, r=r_2$$

3. CAS D'UN ECOULEMENT DE ROTATION SOLIDE

Le cas d'un écoulement tournant de rotation solide est le plus simple analytiquement, et nous nous en servons pour dégager les caractères principaux de la propagation des ondes dans un écoulement tournant.

On a dans ce cas $V(r) = \Omega r$, et le problème sur la pression s'écrit :

$$\frac{d^2 p}{dr^2} + \frac{1}{r} \left[1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2} \right] \frac{dp}{dr} + \left[\left(1 - \frac{4\Omega^2}{\lambda^2} \right) \left(\frac{\lambda^2}{c^2} - k^2 \right) + \frac{2\Omega^2}{c^2} \left(\frac{n\Omega}{\lambda} - 1 \right) + (\gamma - 1) \frac{\Omega^4 r^2}{c^4} - \frac{n^2}{r^2} \right] p = 0$$

$$\frac{dp}{dr} + \left[\frac{2n\Omega}{\lambda r} - \frac{\Omega^2 r}{c^2} \right] p = 0 \quad r=r_1, r=r_2 \quad (\text{Roger et Arbey, 1982})$$

Ce problème étant déjà trop compliqué pour être exploitable analytiquement, nous nous proposons de mettre en lumière les effets premiers de la rotation en considérant le cas d'une rotation solide faible, c'est-à-dire telle que :

$$\frac{\Omega^2 r^2}{c^2} \ll 1$$

$\Omega r/c_0$ représente le nombre de Mach tangentiel.

La célérité du son $c_0(r)$ est donnée par la relation suivante (annexe III) :

$$c_0^2(r) = c^2 + \frac{\gamma - 1}{2} \Omega^2 r^2, \quad \text{soit } c_0^2 = c^2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \varepsilon \right), \quad c \text{ constante}$$

avec : $\varepsilon = \Omega^2 r^2 / c^2$

Nous nous proposons d'écrire un développement limité des termes en $1/c_0^2$ suivant ε . Si l'on s'arrête aux termes d'ordre 0 on obtient :

$$\frac{d^2 p}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp}{dr} + \left[\left(1 - \frac{4\Omega^2}{\lambda^2} \right) \left(\frac{\lambda^2}{c^2} - k^2 \right) - \frac{n^2}{r^2} \right] p = 0$$

avec

$$\frac{dp}{dr} + \frac{2n\Omega}{\lambda r} p = 0 \quad r=r_1, r=r_2$$

La solution s'exprime alors à l'aide de fonctions de Bessel de première et seconde espèces. Ce problème à l'ordre zéro contient déjà tous les effets premiers de la rotation, et c'est pour cela que nous l'utiliserons dans la discussion qualitative du paragraphe suivant.

Il est cependant trop approximatif, et l'équation obtenue en retenant les termes d'ordre 1 en ε est valable dans toutes les plages de fréquence relative (λ très grand ou très petit). Le problème correspondant, étudié en annexe III, s'écrit :

$$\frac{d^2 p}{dr^2} + \frac{1}{r} \left[1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2} \right] \frac{dp}{dr} + \left[\left(1 - \frac{4\Omega^2}{\lambda^2} \right) \left(\frac{\lambda^2}{c^2} - k^2 \right) + \frac{2\Omega^2}{c^2} \left(\frac{n\Omega}{\lambda} - 1 \right) - \frac{n^2}{r^2} - \frac{\gamma-1}{2} \frac{\Omega^2}{c^2} \left(\frac{\lambda^2}{c^2} + \frac{2n\Omega^3}{\lambda c^2} \right) r^2 \right] p = 0$$

$$\frac{dp}{dr} + \left[\frac{2n\Omega}{\lambda r} - \frac{\Omega^2 r}{c^2} \right] p = 0 \quad r=r_1, r=r_2$$

Ce problème a le double avantage d'être une approximation plus valide que la précédente (Kerrebrock, 1974) et d'admettre une solution analytique (exposée dans l'annexe III):

$$r^n \exp\left(\frac{\Omega^2}{4c^2} - \frac{c}{2}\right)r^2 \quad M\left(\frac{n+1}{2} - \frac{K}{4c}; n+1; Cr^2\right)$$

où M est une combinaison de fonctions hypergéométriques dégénérées.

Celle-ci n'a pas été utilisée puisque le programme décrit plus loin appréhende le cas de la rotation quelconque.

4. ETUDE DU CAS DE TRES FAIBLE ROTATION SOLIDE

a) Relation de dispersion

Nous développons ici le cas de l'approximation d'ordre 0 en ε pour mettre en évidence les effets de la rotation dans l'étude de la propagation acoustique. Le problème aux limites à résoudre est le suivant :

$$\frac{d^2 p}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp}{dr} + \left[\Lambda^2 - \frac{n^2}{r^2} \right] p = 0$$

$$\frac{dp}{dr} + \frac{2n\Omega}{\lambda r} p = 0 \quad r=r_1, r=r_2$$

Il ne constitue plus un système du type Sturm-Liouville comme dans le cas d'un écoulement uniforme. En effet la donnée extérieure du problème est toujours la fréquence ω , et la véritable valeur propre est le nombre d'onde k , qui apparaît dans les paramètres :

$$\lambda = \omega + kW_0 + n\Omega \quad \Lambda^2 = \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\lambda^2} \right) \left(\frac{\lambda^2}{c^2} - k^2 \right)$$

Il s'ensuit que la valeur propre intervient dans l'expression des conditions aux limites. De même, si nous avons choisi de résoudre le problème sur la perturbation de vitesse radiale u , les conditions aux limites seraient correctement exprimées, mais alors la valeur propre k intervient dans les coefficients fonctionnels de l'équation.

Cela signifie que pour chaque valeur propre k la solution change avec la valeur attribuée à la fréquence relative λ . Cette levée de dégénérescence est la première conséquence de la rotation. (Roger et Arbey, 1982-b).

Les propriétés classiques des systèmes de Sturm-Liouville ne sont plus applicables ici. Pour chaque mode propre, la résolution fournira un faisceau de distributions $p(r)$ paramétré par λ . Malgré tout, la définition d'une relation de dispersion demeure possible. Considérons pour cela λ comme donnée extérieure. Le problème sur la pression devient alors un système de Sturm-Liouville, de valeur propre :

$$\Lambda^2 = \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\lambda^2}\right) \left(\frac{\lambda^2}{c^2} - k^2\right)$$

C'est un problème auto-adjoint (Nikiforov et Ouvarov, 1974). On peut alors montrer que les valeurs propres sont positives, ce qui implique que les facteurs :

$$\left(1 - \frac{4\Omega^2}{\lambda^2}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\lambda^2}{c^2} - k^2\right) \quad \text{doivent être du même signe.}$$

Cette condition nous permet de déterminer dans le plan (ω, k) le lieu possible de la relation de dispersion hachuré sur la figure 12, lieu limité par quatre droites asymptotes, dont les équations sont :

$$k = \frac{\omega + n\Omega}{c - W_0}$$

$$k = \frac{-(\omega + n\Omega)}{c + W_0}$$

$$k = - \frac{\omega + (n-2)\Omega}{W_0} \quad (\lambda = 2\Omega)$$

$$k = - \frac{\omega + (n+2)\Omega}{W_0} \quad (\lambda = -2\Omega)$$

Les branches de la relation de dispersion sont ensuite tracées à partir des valeurs propres calculées $\Lambda_i^2(\lambda)$, le nombre d'onde k se déduisant de Λ^2 et λ .

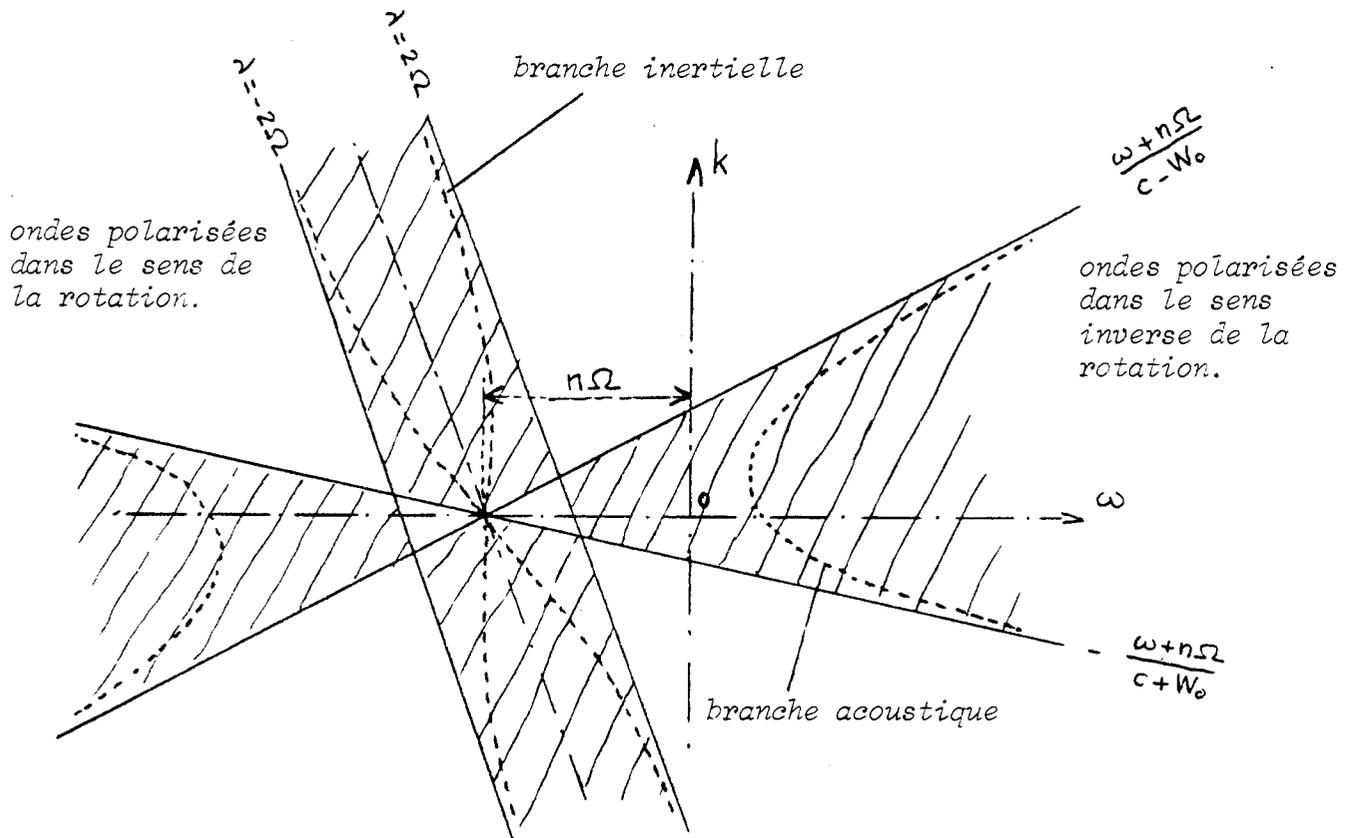


Figure 12 - Relation de dispersion dans un cas de très faible rotation solide.

Il apparaît que la relation de dispersion se développe dans deux régions distinctes :

- Les solutions de la région $\lambda^2 > 4\Omega^2$ se comportent comme la relation de dispersion hyperbolique obtenue dans le cas d'un écoulement uniforme. Pour cette raison les modes de propagation correspondants sont appelés modes acoustiques. Ils sont situés dans la gamme des hautes fréquences relatives λ , et possèdent une fréquence de coupure.

- Les solutions telles que l'on ait $\lambda^2 < 4\Omega^2$ n'existent pas en écoulement uniforme. Elles correspondent à des modes de propagation de faible fréquence relative, c'est-à-dire quasi-convectés, et qui ne souffrent pas de coupure. La condition $\lambda^2 < 4\Omega^2$ est la condition d'existence des ondes inertielles d'instabilité dans un fluide incompressible en rotation, étudiée par Greenspan (1968) ; pour cette raison les modes vérifiant cette condition sont appelés modes inertiels (ondes de cisaillement selon la terminologie employée par Kerrebrock).

On remarque en outre que la relation de dispersion est dissymétrique. Ce décalage de $n\Omega$ par rapport à l'origine du plan (ω, k) traduit sans doute une différence de comportement entre les modes polarisés dans le même sens que la rotation, et les modes polarisés dans le sens inverse. En particulier on peut prévoir deux fréquences de coupure différentes.

b) Problème de la décomposition suivant les modes propres

La méthode modale consiste, après détermination des modes propres de propagation, à décomposer le champ de pression sur l'ensemble de ces modes propres. Elle n'est donc pleinement satisfaisante que lorsque les coefficients de la décomposition sont calculables, c'est-à-dire lorsque l'ensemble des modes propres est orthonormé pour un certain produit scalaire.

Si nous essayons dans le cas de très faible rotation solide d'utiliser le même produit scalaire que celui du chapitre I, il n'y a pas orthogonalité. En effet, considérons deux valeurs propres k_i et k_j pour une fréquence ω fixée, correspondant à deux valeurs λ_i et λ_j et deux modes propres $p_i(r)$, $p_j(r)$. Les conditions aux limites n'étant pas les mêmes pour ces deux modes, on obtient la relation :

$$(\Lambda_i^2 - \Lambda_j^2) \int_{r_1}^{r_2} r p_i(r) p_j(r) dr = 2n\Omega \left(\frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_j} \right) \left[p_i(r) p_j(r) \right]_{r_1}^{r_2}$$

qui n'est pas une intégrale de normalisation.

Ceci ne veut pas dire que l'orthogonalité est impossible vis-à-vis d'un autre produit scalaire. Remarquons en outre que dans le cas des hautes fréquences relatives, c'est-à-dire pour les modes acoustiques, l'orthogonalité est pratiquement obtenue puisque le membre de droite de la relation précédente devient négligeable. En fait la non-orthogonalité vis-à-vis du produit scalaire du chapitre I est directement liée à l'étalement du faisceau des fonctions $p(r)$ lorsque λ varie.

Tous les caractères mentionnés lors de cette étude simplifiée sont des conséquences de la rotation. Ils seront a fortiori valables pour une loi de rotation quelconque, le cas général n'apportant rien de plus en ce qui concerne les propriétés du problème aux limites à résoudre. Ils seront de plus appréhendés quantitativement lors de la résolution numérique, dont l'exposé fait l'objet du paragraphe suivant.

5. RESOLUTION NUMERIQUE POUR UNE LOI DE ROTATION QUELCONQUE

Nous nous sommes proposés de résoudre l'équation de la perturbation de pression écrite à la page 30 dans le cas d'une vitesse axiale uniforme $W = W_0$. Il est pour cela avantageux de la remplacer par le système de deux équations du 1er ordre suivant, mieux adapté au traitement numérique, et qui lui est équivalent :

$$\frac{dp}{dr} = \frac{D}{\lambda} U + \left[\frac{V^2}{rc_0^2} - \frac{2nV}{\lambda r^2} \right] P$$

$$\frac{dU}{dr} = \left[\frac{n}{\lambda r} \left(\frac{V}{r} + \frac{dV}{dr} \right) - \frac{1}{r} \right] U + \frac{1}{\lambda} \left[k^2 + \frac{n^2}{r^2} - \frac{\lambda^2}{c_0^2} \right] P$$

ω étant fixé, on recherche les valeurs propres k permettant d'obtenir des solutions en accord avec les conditions aux limites :

$$U = 0 \quad \text{en } r=r_1 \quad \text{et } r=r_2$$

Ceci peut être traité comme un problème de contrôle optimal à conditions initiales, pour peu que l'on procède comme suit :

- On impose comme condition initiale du calcul la condition $U(r_1) = 0$, une valeur arbitraire étant prise pour $p(r_1)$, puisque les solutions sont définies à une constante multiplicative près.

- On résout ensuite en ajustant la valeur de k pour minimiser $U(r_2)$.

La résolution est menée grâce à un algorithme de Runge et Kutta d'ordre 4 (Boisson, Gay, Gotteland). Le contrôle k est déterminé grâce à un système annexe qui mesure la sensibilité du système de départ vis-à-vis de k :

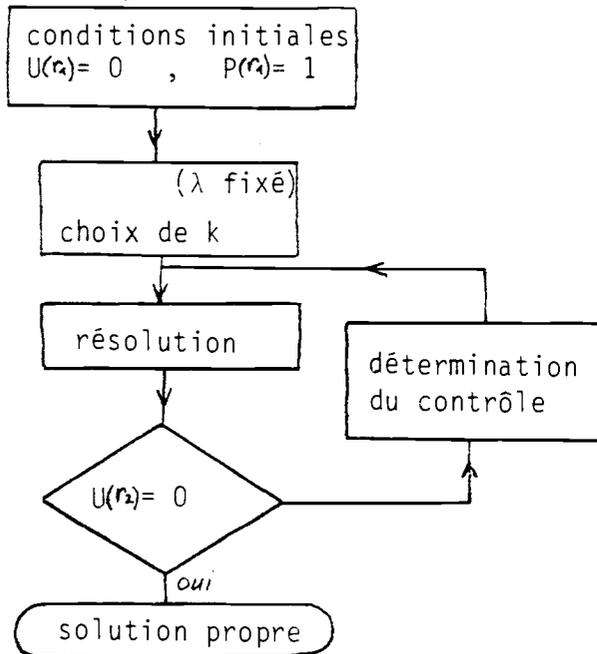
$$\frac{dP'}{dr} = C_1(r) U' + C_2(r) P' \qquad P' = \frac{\partial P}{\partial k}, \quad U' = \frac{\partial U}{\partial k}$$

$$\frac{dU'}{dr} = C_3(r) U' + C_4(r, k) P' + \frac{\partial k}{\partial \lambda} P$$

$$U'(r_1) = P'(r_1) = 0$$

C_1, C_2, C_3, C_4 sont les coefficients du système de départ.

C'est la résolution de ce système annexe qui optimise le tir à partir d'une valeur arbitraire de k (k_0) :



$$k = k_0 - \frac{U(r_2, k_0)}{U'(r_2, k_0)}$$

L'organigramme de principe du programme de calcul est résumé ci-contre.

Généralement cinq ou six essais suffisent à cerner une valeur propre.

Pour le cas d'écoulements tournants où les coefficients des équations admettent des discontinuités entre r_1 et r_2 , un dispositif de centrage du point singulier entre les points de discrétisation est prévu ; cette précaution ne peut cependant éviter tous les chocs dans l'algorithme de Runge et Kutta.

Les résultats de ce programme, qui ne nécessite que l'emploi d'un calculateur modeste, sont présentés dans les paragraphes suivants.

a) Etude paramétrique du cas de la rotation solide

Les planches III-1 à III.3 montrent que la relation de dispersion obtenue dans un cas de rotation solide quelconque est très proche de celle indiquée sur la figure 12, à ceci près que la prise en compte des termes d'ordre plus élevé en $\Omega^2 r^2 / c_0^2$ modifie le comportement des branches inertielles en basse fréquence relative.

L'effet du nombre d'onde azimutal n sur la relation de dispersion s'obtient en examinant la planche III-2; qui montre que lorsque n augmente, les fréquences des coupures augmentent aussi. L'effet est faible sur les branches inertielles. L'influence du rapport des rayons est exposée sur la planche III-3. Lorsque r_2/r_1 croît, les branches acoustiques pour les différents modes se resserrent, et les ondes inertielles semblent favorisées.

Les effets de ces différents paramètres sur les distributions radiales correspondantes sont résumés sur les planches III-4 à III-6. Les signes (+) et (-) servent à distinguer les modes polarisés respectivement dans le sens de la rotation et dans le sens inverse. On s'aperçoit que pour un nombre d'onde azimutal assez grand, l'orthogonalité est pratiquement obtenue sur les modes acoustiques ; en revanche la dispersion demeure sur les modes inertiels (planche III.5).

Comme dans le cas de l'écoulement uniforme, l'augmentation du rapport des rayons tend à concentrer la fluctuation vers la partie périphérique du conduit. L'augmentation du nombre d'onde azimutal a aussi cet effet (Consulter les planches III-5 et III-6).

Signalons enfin que des tests de validité du programme ont été entrepris :

- Il a été d'une part vérifié que dans le cas où $\Omega \rightarrow 0$, on retrouve comme solutions des fonctions de Bessel, et les fréquences de coupure du cas de l'écoulement uniforme (Junger et Perulli, 1978).
- D'autre part, des calculs de fréquences de coupure ont été comparés à des évaluations faites par la SNECMA à partir de l'approximation en très faible rotation solide de Kerrebrock. Les résultats concordaient à 2 % près.

b) Etude paramétrique du cas du tourbillon libre

Comme l'indique la planche III-7, la relation de dispersion d'une conduite annulaire en présence d'un écoulement de tourbillon libre est beaucoup plus simple que celle de la figure 12. Le calcul ne fait apparaître aucune branche inertielle. Les seuls modes propres de perturbation propagatifs sont donc les modes acoustiques. Ceci vient du fait que nous nous plaçons en l'absence de forces extérieures, et que la perturbation de vitesse demeure irrotationnelle à partir d'un état initial irrotationnel.

Tout autre cas d'écoulement que la rotation solide entraîne en revanche une complication du fait que la fréquence λ dépend de r . Ici :

$$\lambda(r) = \omega + kW_0 + \frac{n\Gamma}{r^2}$$

Par conséquent pour certaines valeurs des paramètres, il peut exister entre r_1 et r_2 un rayon critique r_0 pour lequel $\lambda(r_0) = 0$. Il correspond à une fluctuation localement convectée, et pourrait traduire un changement de polarisation du mode. Ce rayon critique représente également une discontinuité des coefficients qui est lissée par la discrétisation dans le programme de résolution. La zone critique, pour laquelle r_0 est compris entre r_1 et r_2 , est représentée dans le plan (ω, k) . Pour les cas traités ici elle n'est pas traversée par les branches de la relation de dispersion.

La planche III-8 montre que le même effet de resserrement des branches correspondant aux divers modes radiaux est à observer lorsque le rapport des rayons r_2/r_1 augmente.

La planche III-9, où est retracé l'effet du nombre d'onde azimutal n sur les distributions de pression, semble indiquer que les problèmes de non-orthogonalité des modes ne disparaissent pas lorsque n augmente.

c) Etude d'un cas de loi mixte

La loi de vitesse tangentielle présente à l'aval d'un rotor de turbomachine est la plupart du temps approximable par la combinaison d'un tourbillon libre et d'une rotation solide. Nous avons donc testé le programme de résolution modale sur un cas de la forme :

$$V(r) = \Omega r + \frac{\Gamma}{r}$$

présentant un minimum de la loi de vitesse entre r_1 et r_2 . Ceci permet de tenir compte de la zone périphérique à gradient de vitesse tangentielle positif que l'on observe sur les soufflantes dont il a été question au chapitre II.

La planche III-10 donne l'allure de la relation de dispersion obtenue pour trois choix de valeur des paramètres tels que la vitesse tangentielle moyenne soit à peu près constante. Ceci permet de déduire un éventuel effet des gradients.

Cet effet est faible sur les branches acoustiques, et paraît étendre en fréquence relative les branches inertielles, ce qui peut signifier qu'un fort gradient favorise celles-ci. (Planche III-11). L'effet des gradients est inexistant sur la distribution radiale des modes acoustiques. Il est par contre plus sensible sur les modes inertiels, comme le montre la planche III-12.

Dans le cas de la loi mixte, qui admet l'existence de modes inertiels, l'une des branches inertielles de la relation de dispersion peut être située dans la zone critique. Ceci est sans doute à l'origine des problèmes numériques rencontrés. Aussi les distributions radiales du mode 1 inertiel polarisé dans le sens de la rotation sont-elles sujettes à caution. (Planche III-13).

L'étude paramétrique qui précède a permis de caractériser les modes propres de propagation d'ondes de pression dans une conduite annulaire, pour des cas simples d'écoulement tournant. Les cas étudiés ont également suffi à mettre en lumière les limitations du programme dues à l'existence de singularités. Il nous reste à tenter dans le chapitre suivant une application dans un cas industriel.

CHAPITRE IV - APPLICATIONS

Nous nous proposons à présent d'utiliser les acquisitions du chapitre III pour étudier le cas réel du compresseur expérimental SNECMA dont il est question au chapitre II.

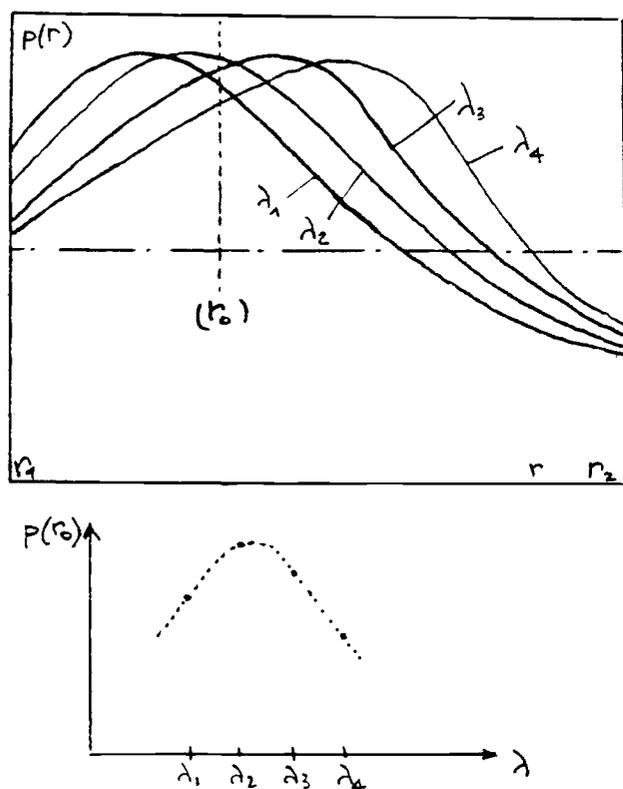
1. DETERMINATION DE LA RELATION DE DISPERSION

L'introduction dans le programme de résolution modale des paramètres qui correspondent à un cas réel d'écoulement crée des difficultés supplémentaires du fait de la valeur élevée du nombre d'onde azimutal ($n = 44$ ici), et de l'existence de discontinuités dans les coefficients.

Nous avons choisi d'approcher la loi de vitesse réelle par une distribution du type $V(r) = \Omega r + \frac{C}{r}$, en ajustant celle-ci de façon à conserver l'existence du minimum de vitesse tangentielle (planche IV.1). La planche IV.2 regroupe les résultats concernant les modes acoustiques 0 et 1 pour la loi réelle et la loi approchée. Les différences notables observées peuvent être attribuées à la zone périphérique où la loi de vitesse tangentielle réelle $V(r)$ comporte des points d'inflexion; ceux-ci, ainsi que les discontinuités dans les coefficients, entraînent des difficultés de convergence dans le programme mis au point au chapitre III. Ainsi dans la relation de dispersion (planche IV.3) n'ont pas pu figurer les branches inertielles, qui doivent pourtant exister. Nous espérons qu'un traitement plus approprié des singularités des coefficients nous permettra de compléter les résultats.

2. TENTATIVES DE LIAISON AVEC LE PHENOMENE DU BRUIT DE BOSSES

Nous avons vu au chapitre III que dans tout écoulement tournant rotationnel existent des modes inertiels de fluctuation de pression. Ces modes donnent lieu à des faisceaux étalés de distributions radiales $p(r)$ paramétrées par la fréquence relative λ (ou par ω), pour chaque indice. De plus ils n'admettent pas de fréquence de coupure.



- Figure 13 -

Ce raisonnement très simple ne prétend pas expliquer le bruit de bosses de façon catégorique, mais met en évidence un mécanisme permis par la non-dégénérescence des modes (existence d'un faisceau). Ce mécanisme n'interviendrait pas dans un écoulement uniforme.

La situation réelle est plus complexe en raison de la superposition de tous les modes radiaux possibles. Malgré tout ceci nous paraît constituer un argument en faveur de l'étude abordée au chapitre III.

Imaginons alors que toutes les distributions radiales de pression correspondant à un mode donné (1 par exemple) coexistent avec une pondération uniforme. Une coupure du faisceau de la Figure 13 en un rayon donné r_0 entre r_1 et r_2 permet de tracer l'intensité du mode en fonction de la fréquence.

Dans une certaine gamme de valeurs de r_0 il apparaît une bosse qui traduit l'existence d'une fréquence dominante, fonction de r_0 . Ce résultat peut être rapproché de la dépendance radiale des bosses observées dans les expériences.

CONCLUSIONS

Les différents résultats expérimentaux exploités lors de cette étude semblent prouver que le bruit de bosses des compresseurs à double flux est attribuable aux instabilités inertielles de l'écoulement de sortie de la soufflante se développant dans la zone périphérique du circuit secondaire (en bout de pales), là où existe un gradient radial de vitesse tangentielle positif. L'idée de base exploitée ici, rarement mentionnée dans la littérature, est que le champ de rotation joue un rôle actif dans les phénomènes de génération et de propagation du bruit dans une turbomachine.

En effet d'une part, une turbulence embarquée dans un écoulement tournant devient une source de bruit à large bande par le jeu des accélérations complémentaires. (couplage des équations de la pression et du champ tourbillonnaire).

D'autre part, les ondes inertielles qui se développent dans le circuit secondaire peuvent produire un bruit semi-cohérent en interagissant avec le redresseur.

Dans cette optique a été développée une technique de détermination des modes de propagation des ondes de pression dans un conduit annulaire en présence d'écoulement tournant. Bien qu'il reste à affiner le traitement numérique des équations dans le cas où les coefficients présentent des singularités, le programme élaboré s'applique à une loi de rotation quelconque. Il permet en particulier de mettre en évidence deux modes de fluctuation dans un écoulement de base tournant en l'absence de forces extérieures : le mode acoustique, permis par la compressibilité du fluide, et le mode inertiel introduit par la rotation.

Sur le plan théorique, le problème de la détermination des coefficients d'une décomposition du champ sonore sur l'ensemble des modes n'a pu être résolu. Cependant une relation de dispersion a été définie pour chaque mode.

Une première confrontation doit encore être tentée entre les acquis théoriques et les résultats expérimentaux. Les développements pourraient se faire suivant deux axes :

- chercher à synthétiser des bosses par le calcul en améliorant les considérations du chapitre IV.

- comparer les distributions radiales de pression synthétisées pour une fréquence donnée à des distributions filtrées mesurées en aval de la soufflante. Ceci est d'ores et déjà prévu en accord avec les prochaines campagnes de mesures de la SNECMA.

BIBLIOGRAPHIE

- ABRAMOWICZ M. et STEGUN I.A.
Handbook of mathematical functions, Dover 1965.
- BENZAËIN M.J.
"Research on fan noise generation", JASA Vol. 51(5-1), 1972.
- BOISSON C., GAY B., GOTTELAND M.
"Résolution des équations différentielles, fascicule 3 : résolution des équations différentielles à conditions initiales", INSA Lyon.
- CHANDRASEKHAR S.
Hydrodynamic and hydromagnetic stability, Oxford Univ. Press, 1961.
- CHAUVIN J., FERRAND P., ÇEN M. et SCHIAVELLO B.
"Décollement tournant dans les pompes et les compresseurs",
- CHU B.T. et KOVASZNAVY L.S.G.
"Non linear interactions in a viscous heat-conducting compressible gas", J.F.M. 3(5), 1958.
- CUMPSTY N.A.
"Sum and difference tones from turbomachines", J.S.V. 32(3), 1974.
- CURLE N.
"The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound", Proc. Roy. Soc. A 231, 1955.
- FFOWCS-WILLIAMS J.E. et HAWKINGS D.L.
"Theory relating to the noise of rotating machinery", J.S.V. 10(1), 1969.
- FFOWCS-WILLIAMS J.E. et HAWKINGS D.L.
"Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion", Phil. Tr. Roy. Soc. A 264, 1969.
- FERRAND P.
"Etude théorique des instabilités de l'écoulement dans les compresseurs axiaux", Thèse, Université d'Aix-Marseille II, 1980.
- FRIEDMAN B.
Principles and techniques of applied mathematics, J. Wiley & Sons, 1956.
- GOLDSTEIN M.E.
Aeroacoustics, Mc Graw-Hill, 1976.
- GREENSPAN H.P.
The theory of rotating fluids, Cambridge Univ. Press, 1968.
- GRIFFITHS J.W.R.
"The spectrum of compressor noise of a jet engine", J.S.V. 1(2), 1964.

HANSON D.B.

"Unified analysis of fan stator noise", J.A.S.A. 54(6), 1973.

HANSON D.B.

"Spectrum of rotor noise caused by atmospheric turbulence", J.A.S.A. 56(1), 1974.

HANSON D.B.

"Study of noise and in flow distortion sources in the NASA QF-1B fan using measured blade and vane pressures", NASA report CR. 2899, 1977.

HOMICZ G.F., LUDWIG G.R. et LORDI J.A.

"Theoretical and experimental studies of discrete-tone rotor-stator interaction noise", AIAA Paper 75-443, 1975.

JONES D.S.

Generalised functions, Mc Graw-Hill, 1966.

JUNGER M.C. et PERULLI M.

Elements d'acoustique physique, Maloine S.A., 1978.

KERREBROCK J.L.

"Waves and wakes in turbomachine annuli with swirl", AIAA Paper 74-87, 1974.

KERREBROCK J.L.

"Flow in a transonic compressor rotor", Transonic flow problems in turbomachinery, Hemisphere Pub. Corp., 1977.

LANDAU L. et LIFCHITZ E.

Mécanique des Fluides, MIR, 1971.

LANDAU L. et LIFCHITZ E.

Mécanique quantique, MIR, 1967.

LIGHTHILL M.J.

"On sound generated aerodynamically/I. General theory", Proc. Roy. Soc. A 221, 1952.

LIGHTHILL M.J.

Waves in fluids, Cambridge Univ. Press, 1978.

LILLEY G.M.

"On the noise from jets", AGARDograph 131, 1973.

LOWSON M.V.

"The sound field for singularities in motion", Proc. Roy. Soc. A 286, 1965.

MANI R., et BEKOFKSKE K.

"Experimental and theoretical studies of subsonic fan noise", NASA Report CR-2660, 1976.

MILES J.W.

"Waves in rapidly rotating gas", JFM, 107, 1981.

MORTON J.B. et SHAUGHNESSY E.J.

"Waves in a gas in solid body rotation", J.F.M. 56(2), 1972.

NIKIFOROV A. et OUVAROV Y.

Elements de la théorie des fonctions spéciales , MIR, 1974.

POIREE B.

"Application de la représentation mixte à l'étude des ondes acoustiques et de gravité", Revue du CETHEDC, n° 73, 1982.

ROGER M., et ARBEY H.

"Analyse du bruit de bosses des compresseurs", Contrat SNECMA/METRAFLU n° 366-594 XY.

a) Rapport d'avancement, Février 1982.

b) Rapport Final de Synthèse, Avril 1982.

ROGER M., et ARBEY H.

"Perturbation d'un écoulement moyen de rotation solide", VIIe Colloque d'Acoustique Aéronautique, Toulouse, 1982.

ROGER M., et ARBEY H.

"Equation radiale de la fluctuation de pression pour un écoulement tournant", IXe Congrès Canadien de Mécanique Appliquée, Saskatoon, 1983.

ROUNHILL J.P. et SCHAUT L.A.

"Model and full scale test results relating to fan noise inflight effects", AIAA Paper 75-465, 1975.

SALANT R.F.

"Symmetric normal modes in a uniformly rotating fluid", J.A.S.A. 43(6), 1968.

SNECMA

Communications privées.

SNEDDON I.N.

Fourier transforms , Mc Graw-Hill, 1951.

SOZOU C.

"Symmetrical normal modes in a Rankine vortex", J.A.S.A. 46(3), 1969.

SOZOU C.

"Adiabatic transverse modes in a uniformly rotating fluid", J.F.M. 36(3), 1969.

SOZOU C. et SWITHENBANK J.

"Adiabatic transverse waves in a rotating fluid", J.F.M. 38,(4), 1969.

SUNYACH M.

"Instationnarité des écoulements dans les turbomachines et prédiction du spectre de bruit émis", Revue d'Acoustique n° 58(3), 1981.

TITCHMARSH E.C.

Eigenfunction expansions associated with second order differential equations Oxford Clarendon Press, 1962.

TYLER J.M. et SOFRIN T.G.

"Axial flow compressor noise studies", SAE Trans., 70, 1962.

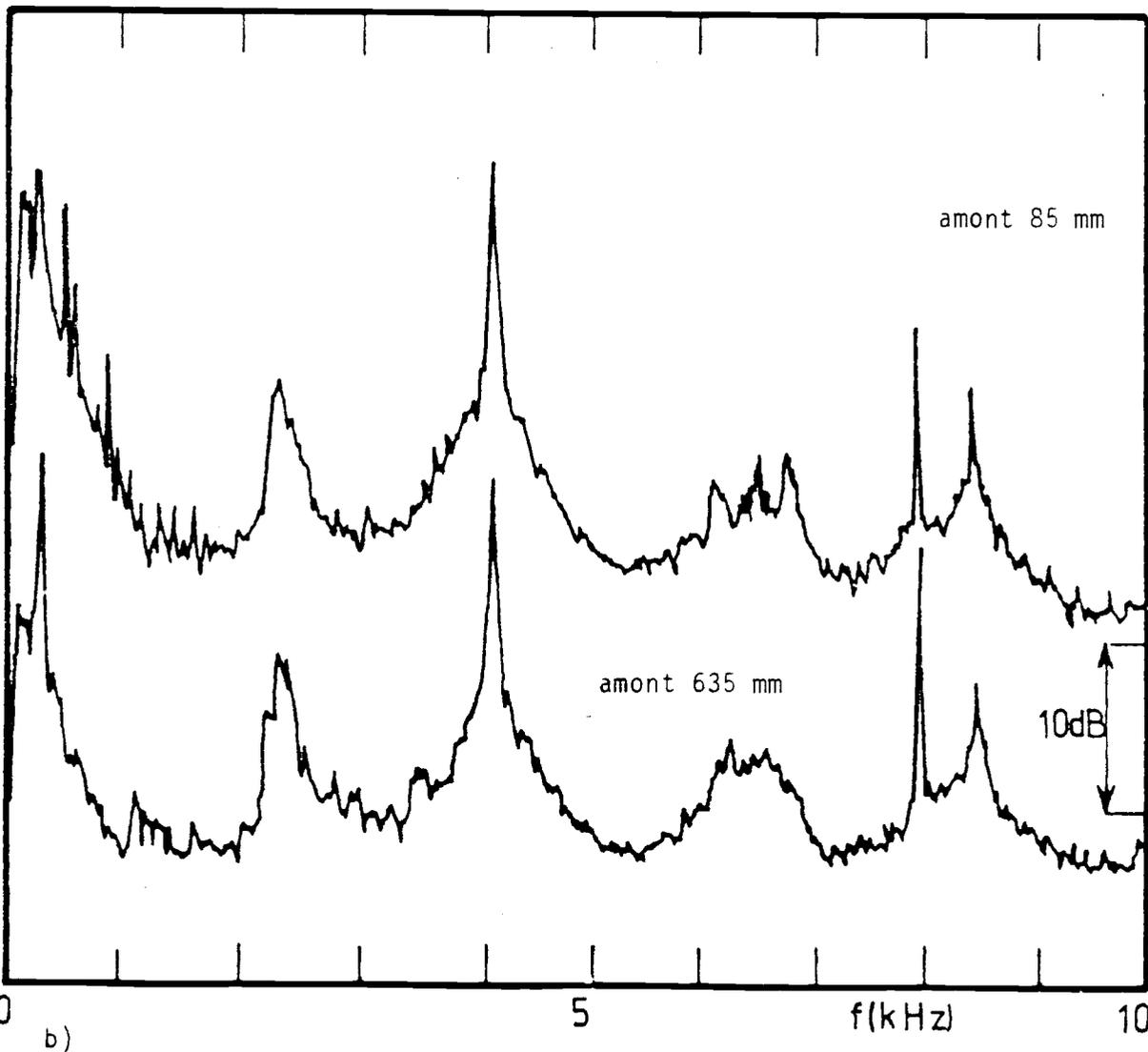
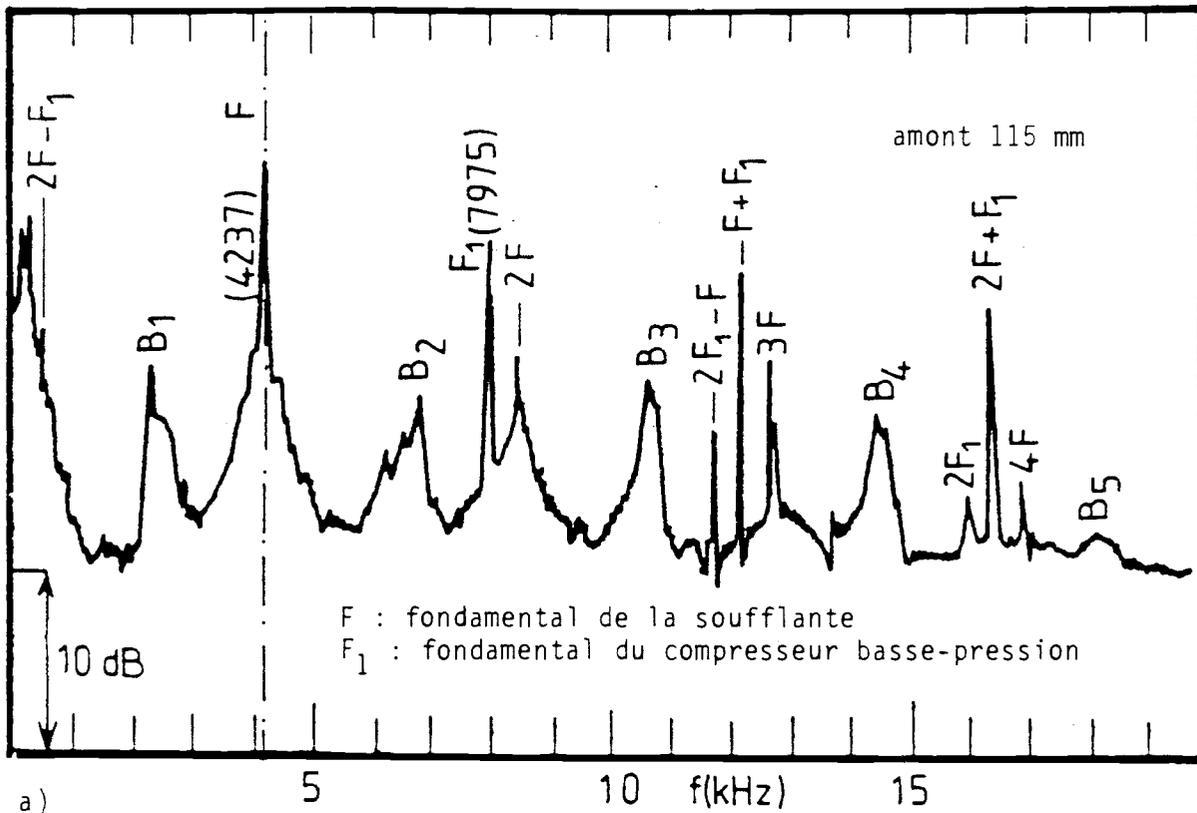
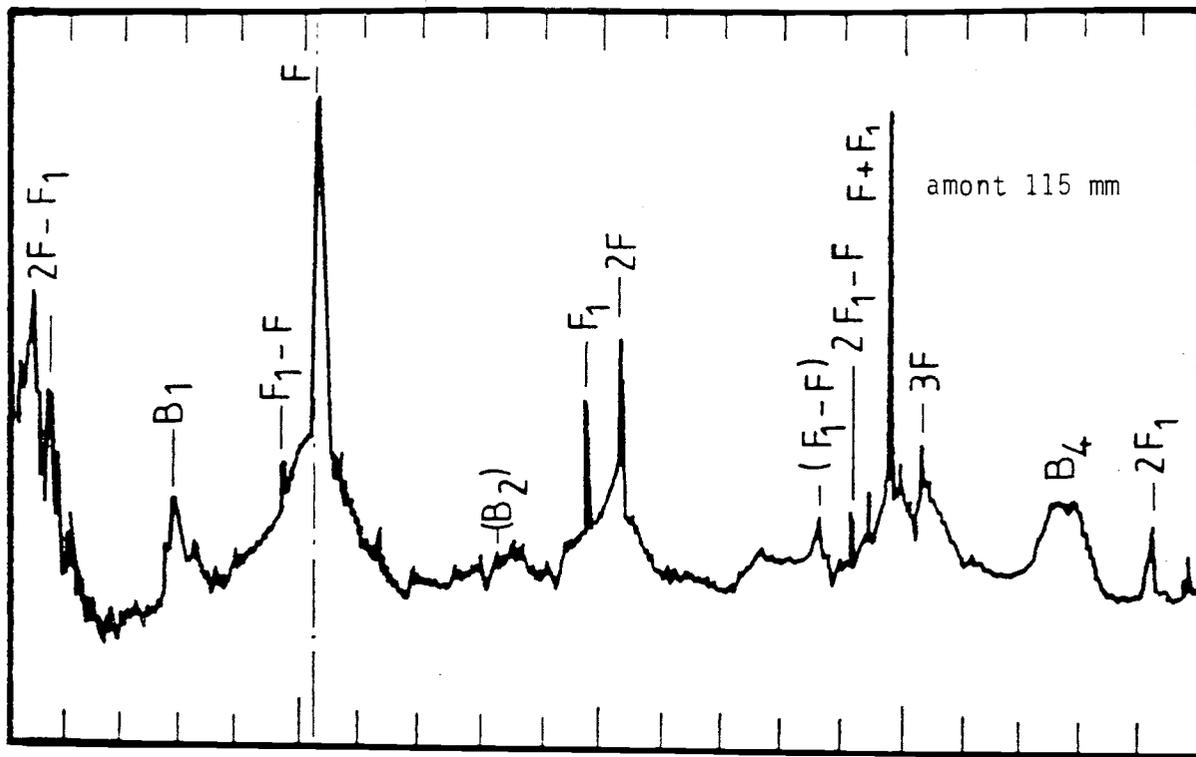
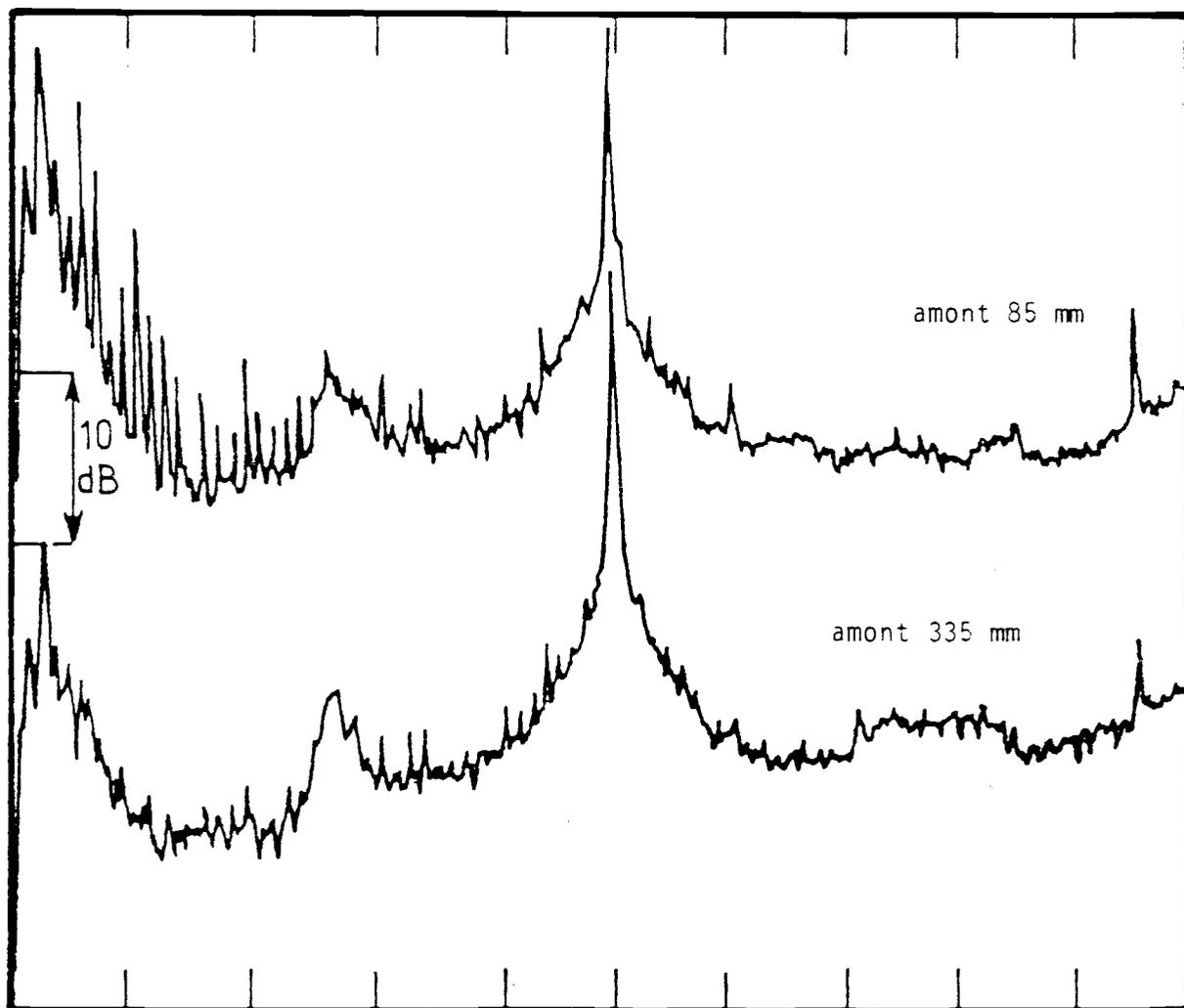


Planche II-1 - Spectres de la fluctuation de pression en amont de la soufflante en paroi de la veine d'essai.
 $\Omega = 0.5 Nn$ a) 0-20 kHz
 b) 0-10 kHz



a) 5 10 15 f(kHz)



b) 0 5 10 f(kHz)

Planche II-2 - Spectres de la fluctuation de pression en amont de la soufflante en paroi de la veine d'essai.

$\Omega = 0.6 Nn$ a) 0-20 kHz
 b) 0-10 kHz

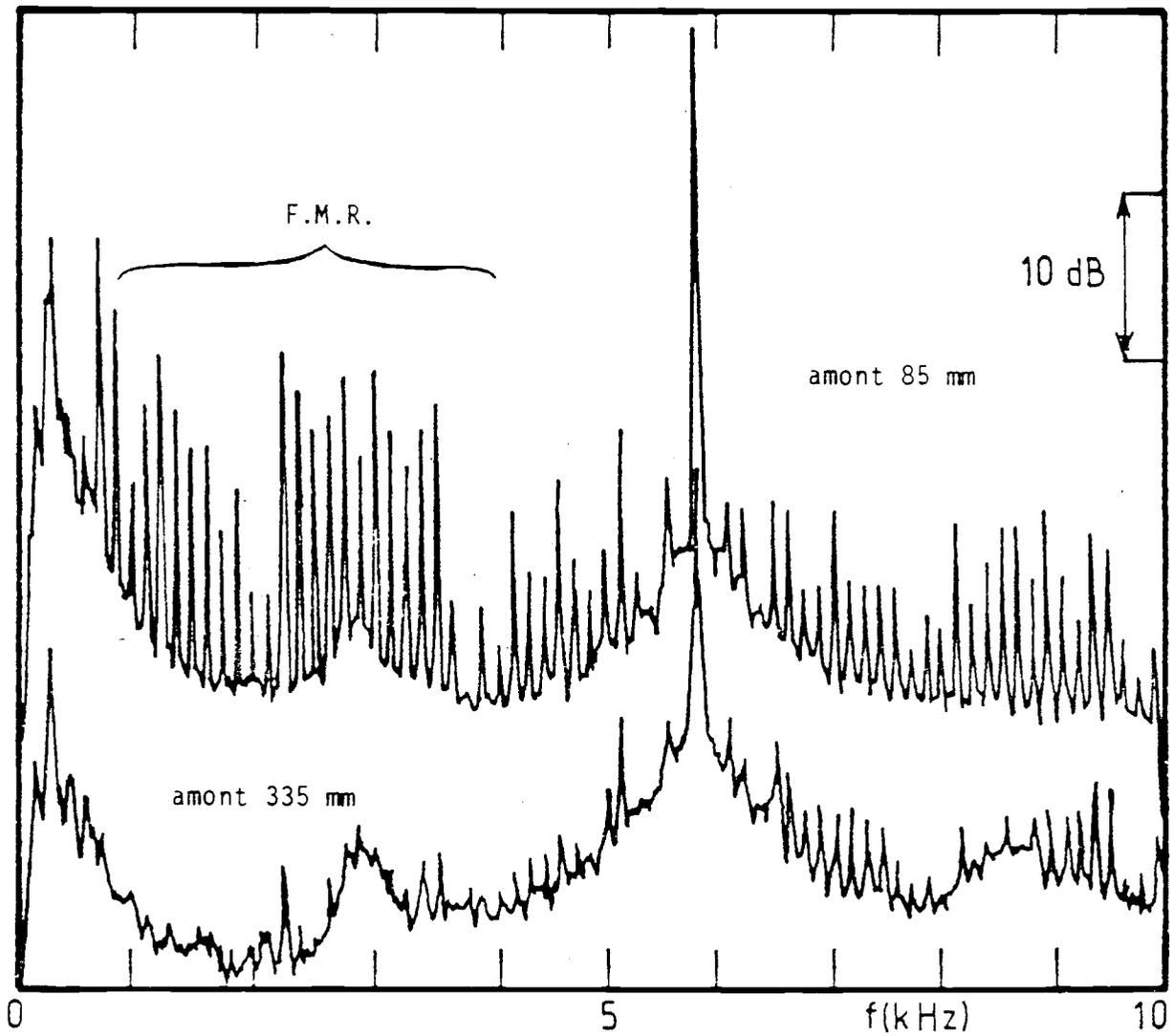


Planche II-3 - Spectres 0-10 kHz de la fluctuation de pression en amont de la soufflante en paroi de la veine d'essai.
 $\Omega = 0.7 Nn$
Apparition des fréquences multiples de la rotation.

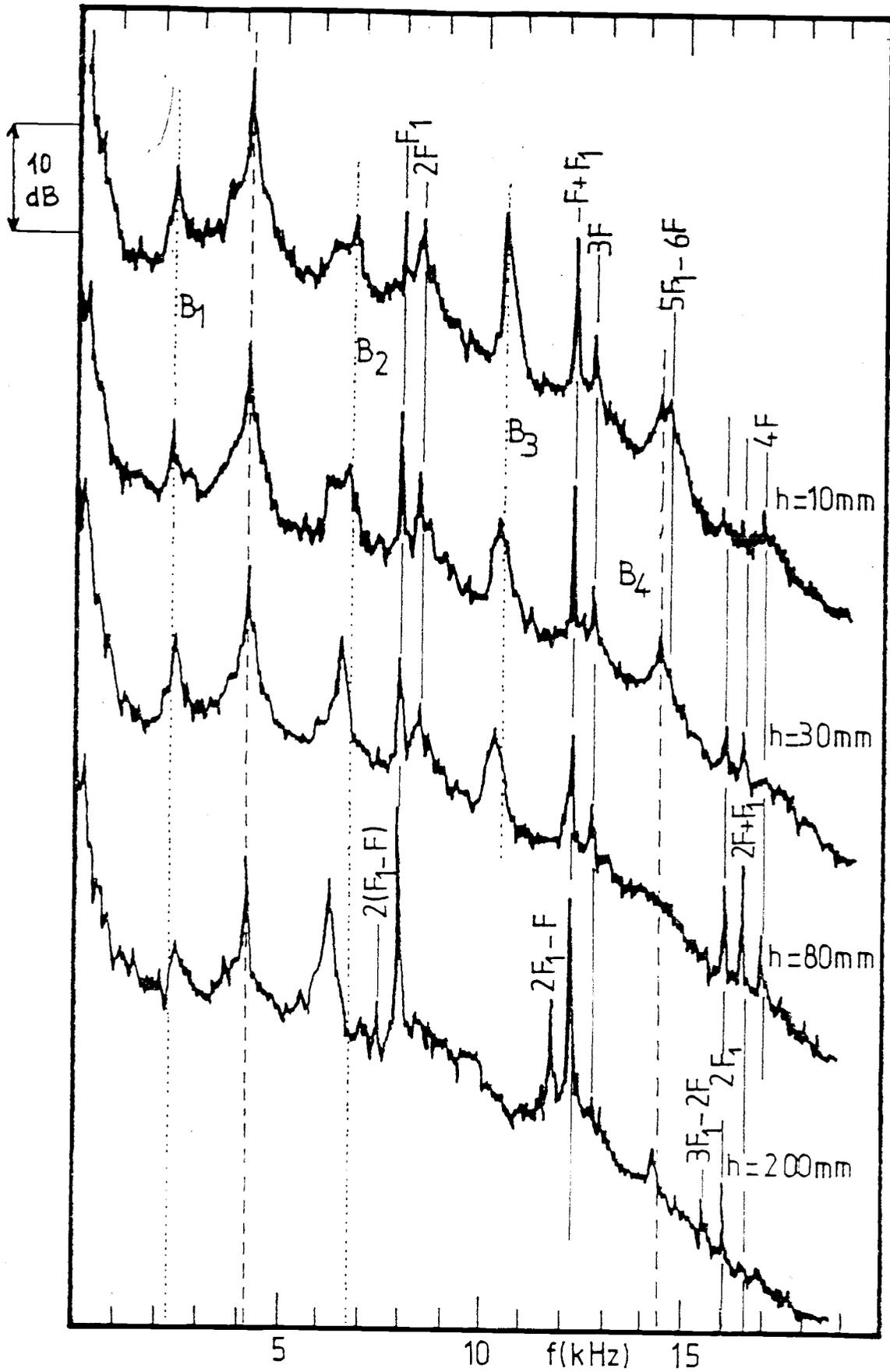


Planche II-4 - Evolution du spectre de bruit de bosse de la soufflante lors d'une exploration radiale à $0.5 N_n$. (amont 215 mm)
La profondeur de pénétration h varie de 10 à 200 mm.

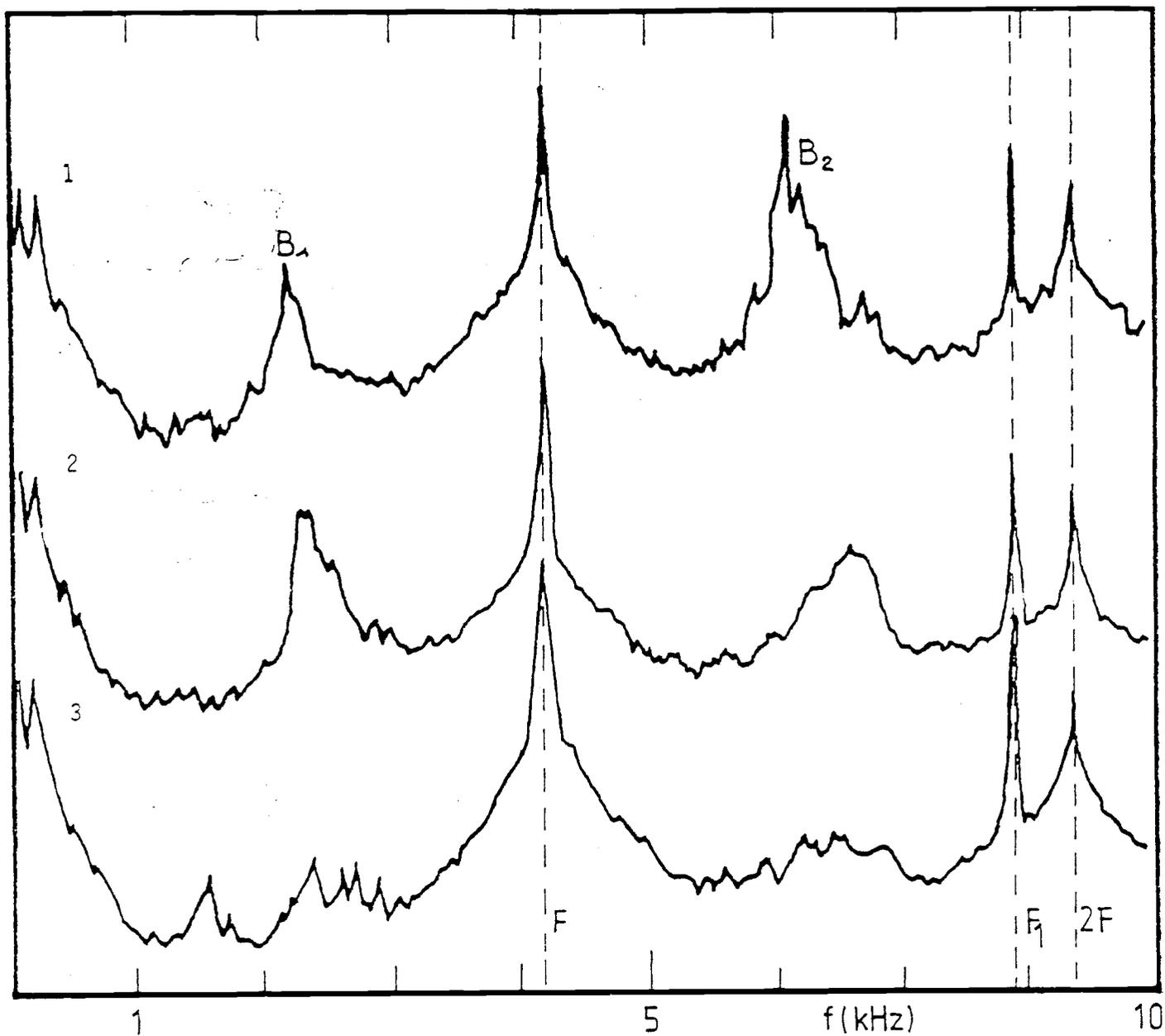


Planche II-5 - Influence de la géométrie en bout de pale sur les bosses de bruit observées à l'amont de la soufflante sur 3 versions (SNECMA, communication privée):

- 1 modification de l'angle de calage entête des aubes
- 2 version étudiée sur les planches précédentes
- 3 épaissement des aubes, entête, sur 5 % de la hauteur

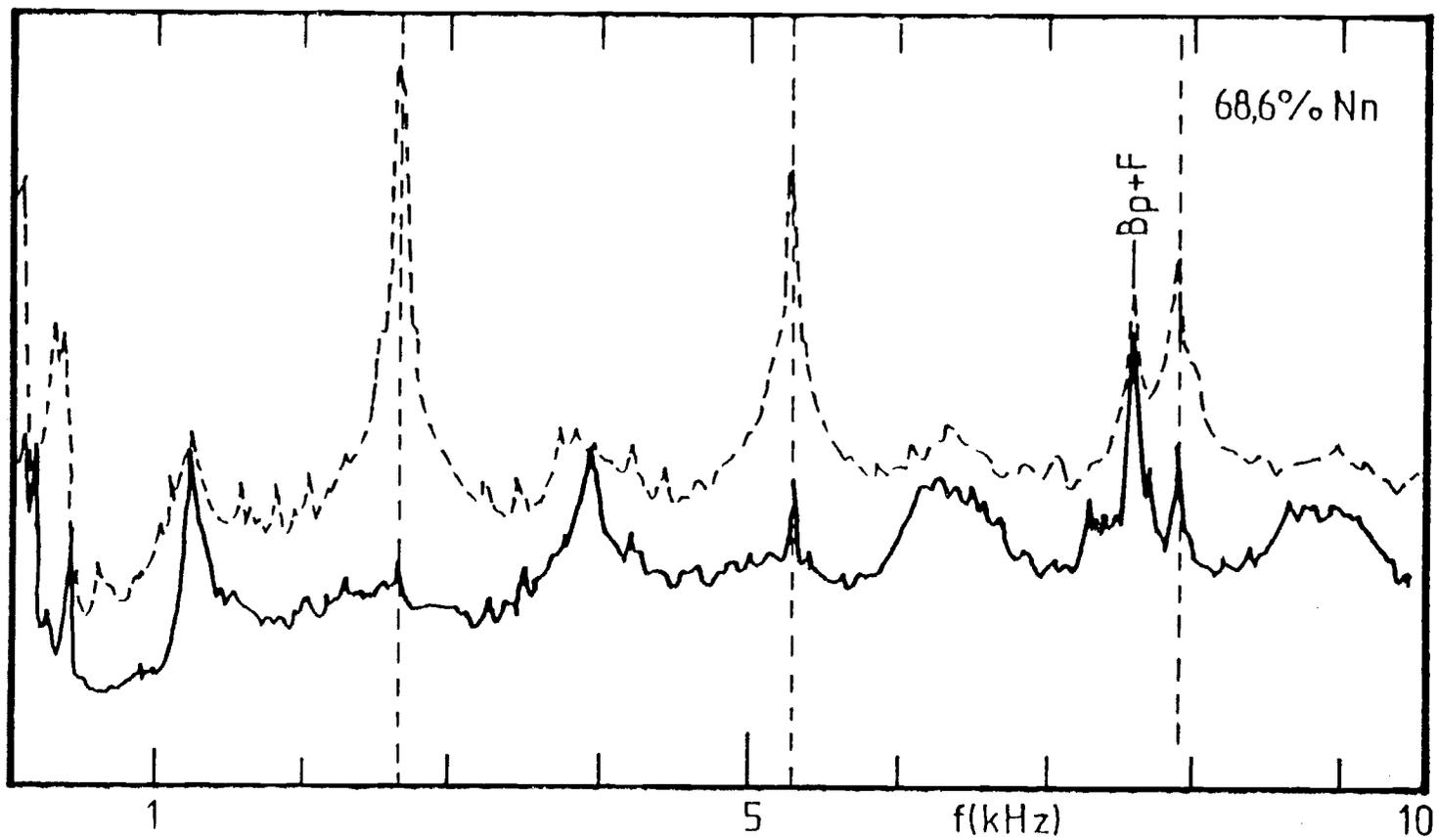
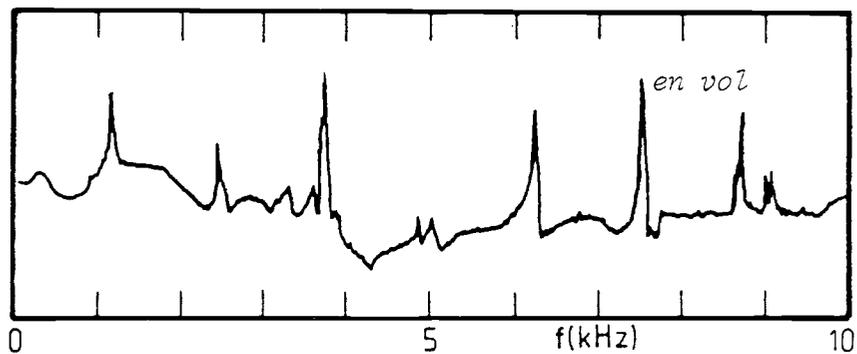
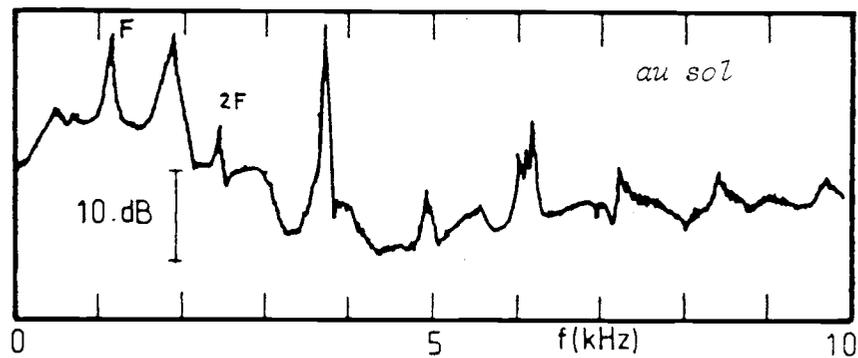
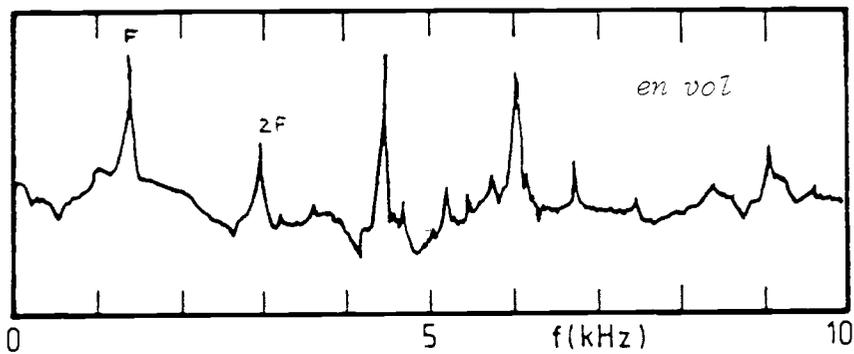
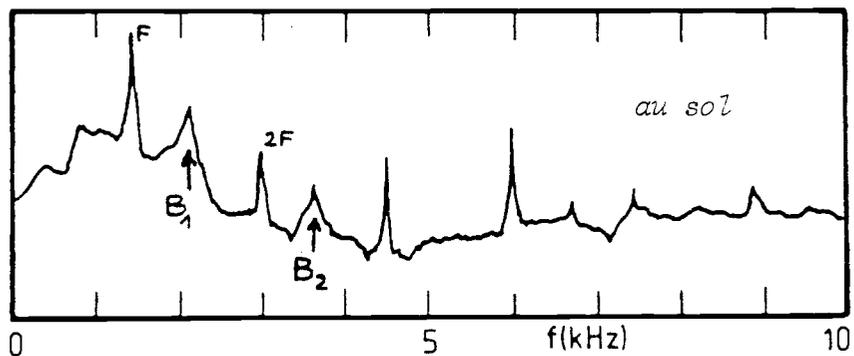


Planche II-6 - Campagne de mesures de la SNECMA pour comparaison des spectres en vol et au sol (communication privée). Extinction des harmoniques de la soufflante.



a)

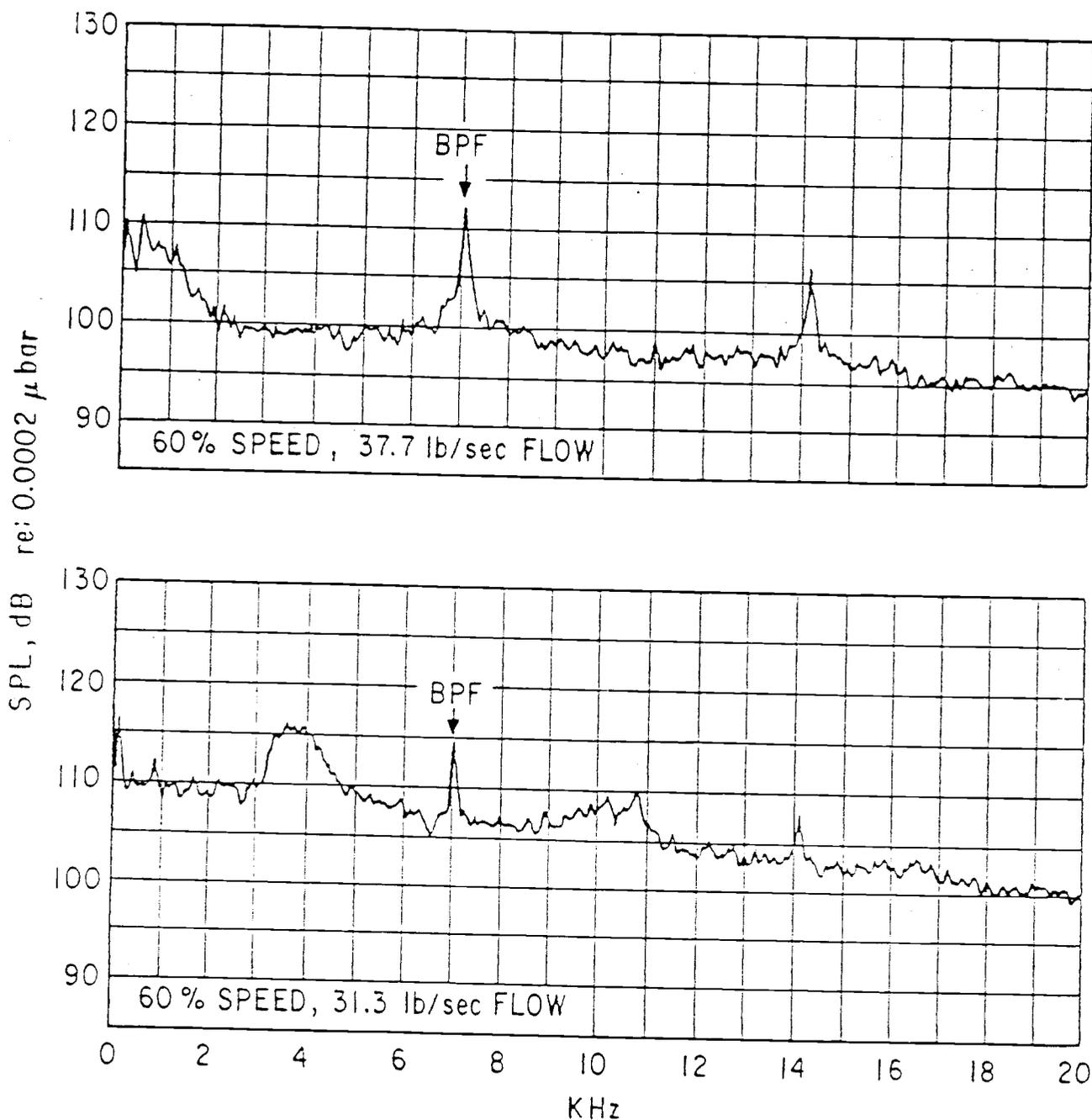


b)

Planche II-7 - Bosses de bruit observées par Roundhill et Schaut sur le CF 6-50.

a) Nombre de Mach en bout de pales : 0.7

b) Nombre de Mach en bout de pales : 0.8



Plaque II-8 : Apparition de bosses de bruit dues à un fonctionnement hors des conditions nominales, sur une soufflante expérimentale.

Résultats de T.F. GELDER (1975) cités par Mani et Bekofske (1976).

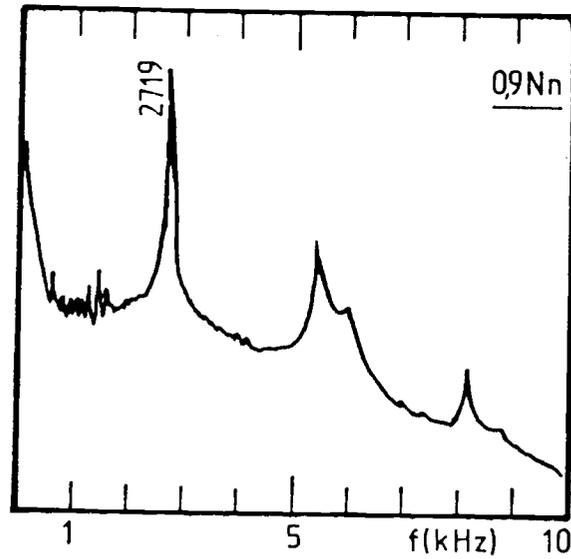
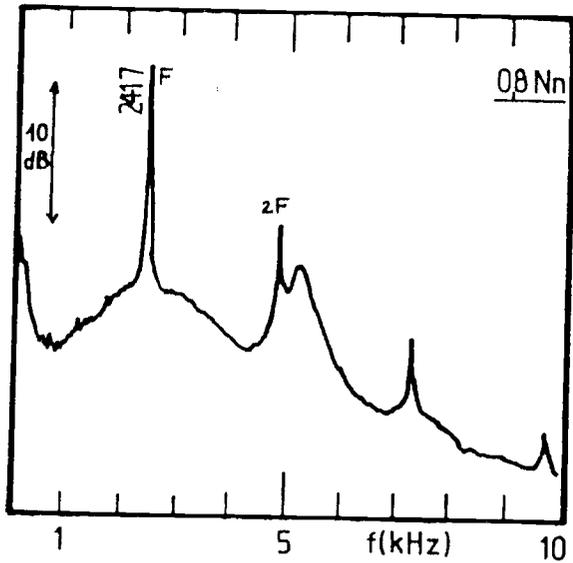
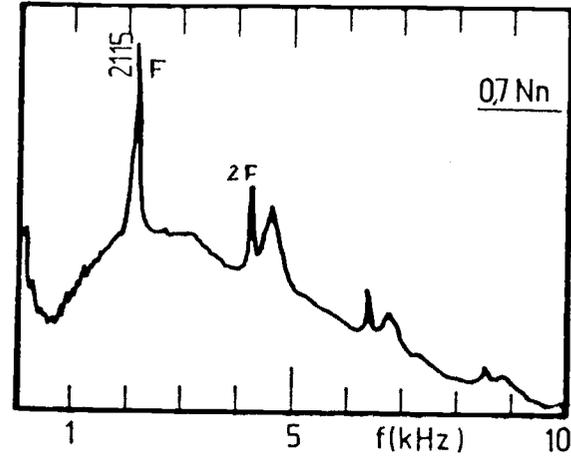
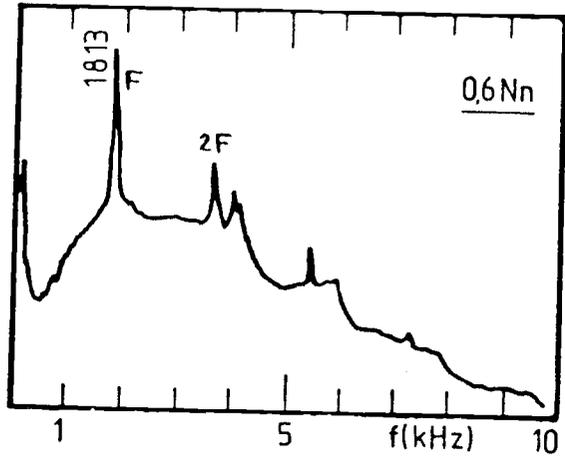
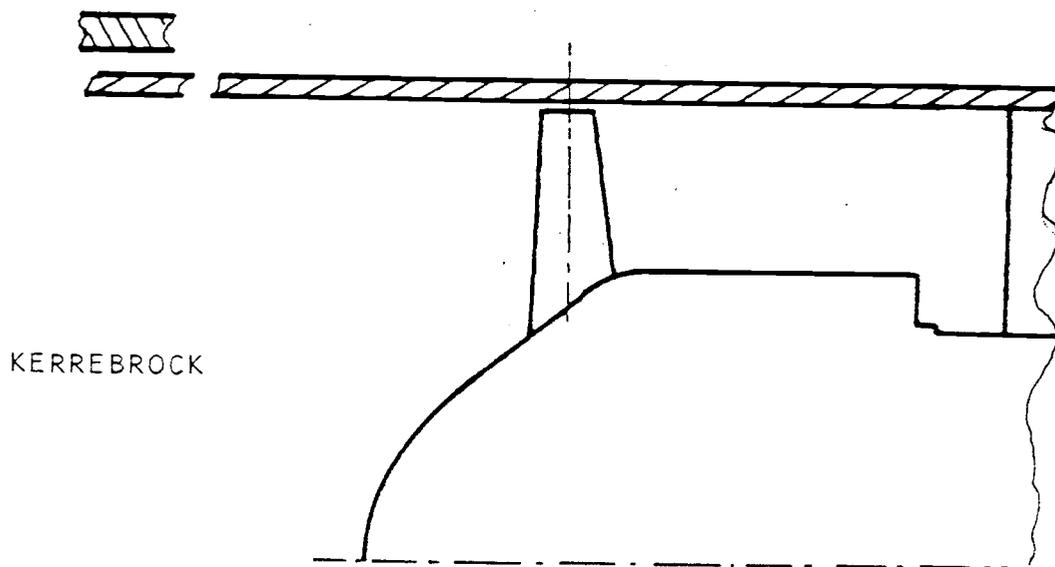
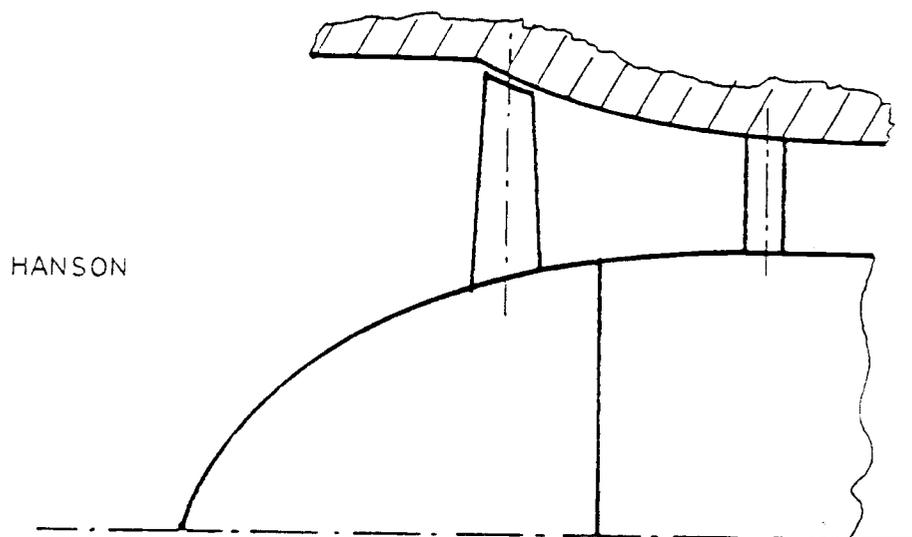


Planche II-9 - Bosses de bruit observées par Hanson sur le QF-1B de la NASA, aux multiples 2,2 ; 3,2 ; etc. ... du fondamental de la soufflante.



a) Soufflante expérimentale du M.I.T.



b) Soufflante QF.1B de la NASA.

Planche II-10 - Installations sur banc d'essai utilisées par Hanson et Kerrebrock.

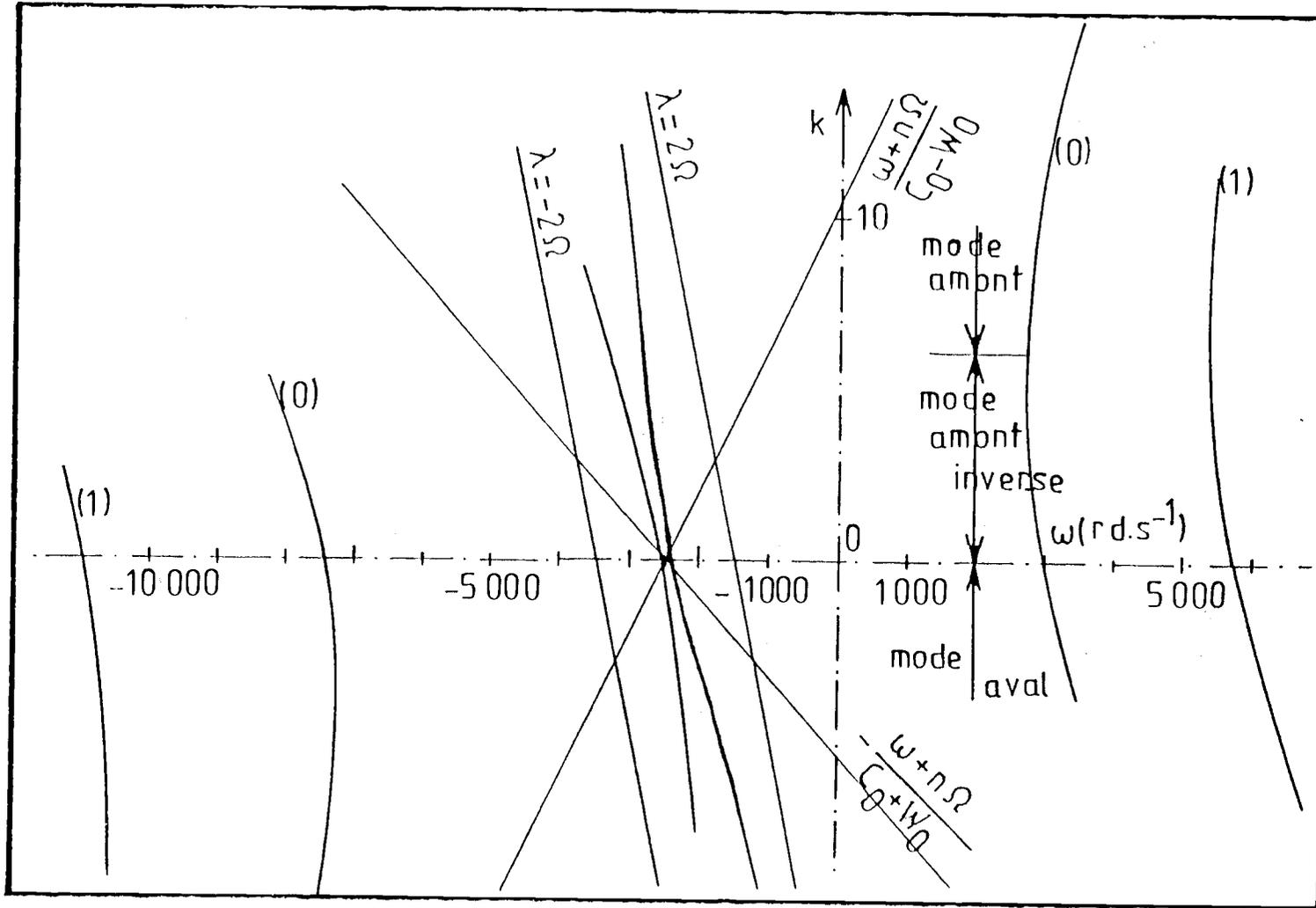


Planche III-1 - Relation de dispersion dans un cas de rotation solide.

$$\Omega = 500 \text{ rds}^{-1}, \quad W_0 = 100 \text{ ms}^{-1}, \quad r_1 = 0.2 \text{ m}, \quad r_2 = 0.4 \text{ m}, \quad n = 5.$$

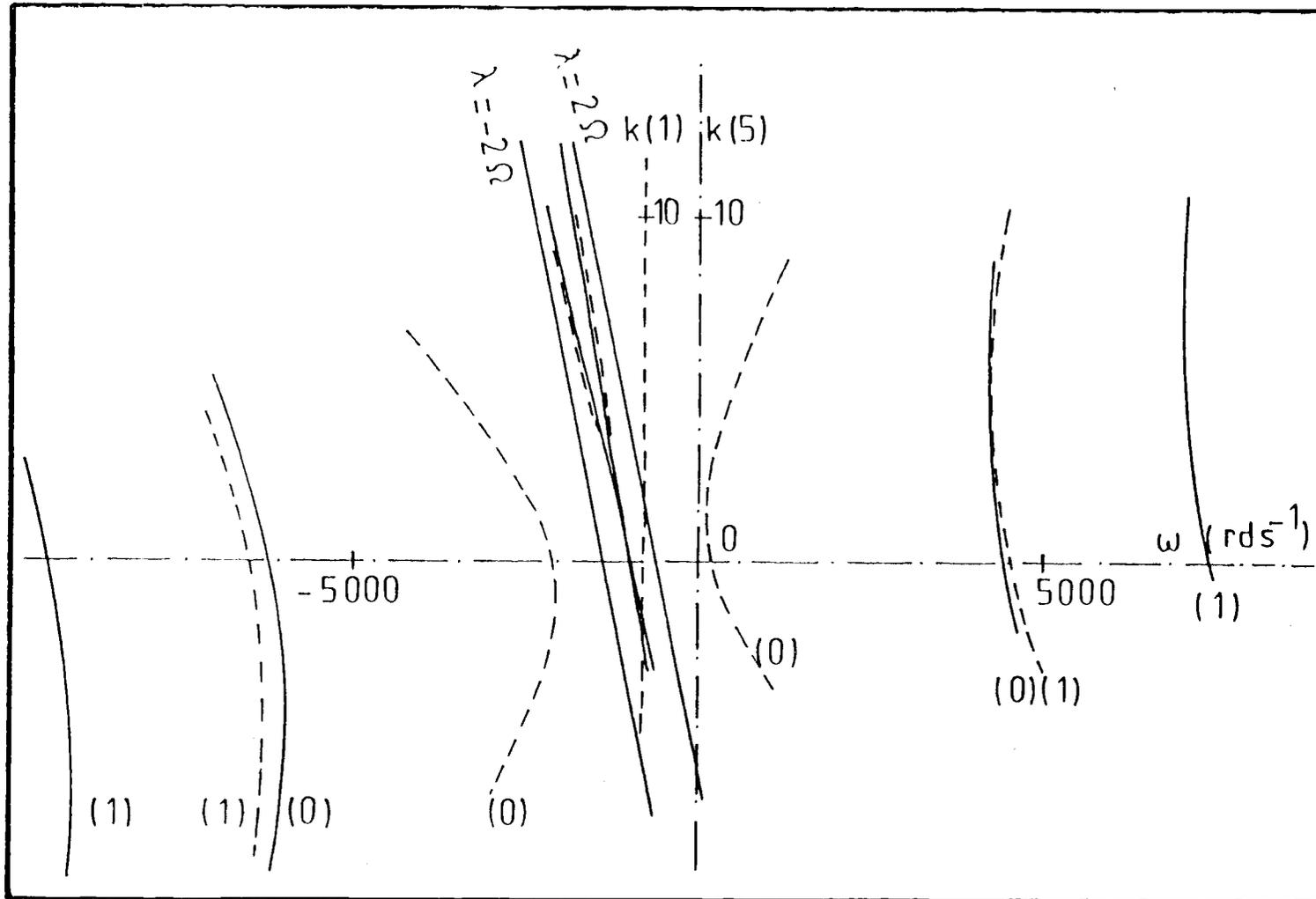
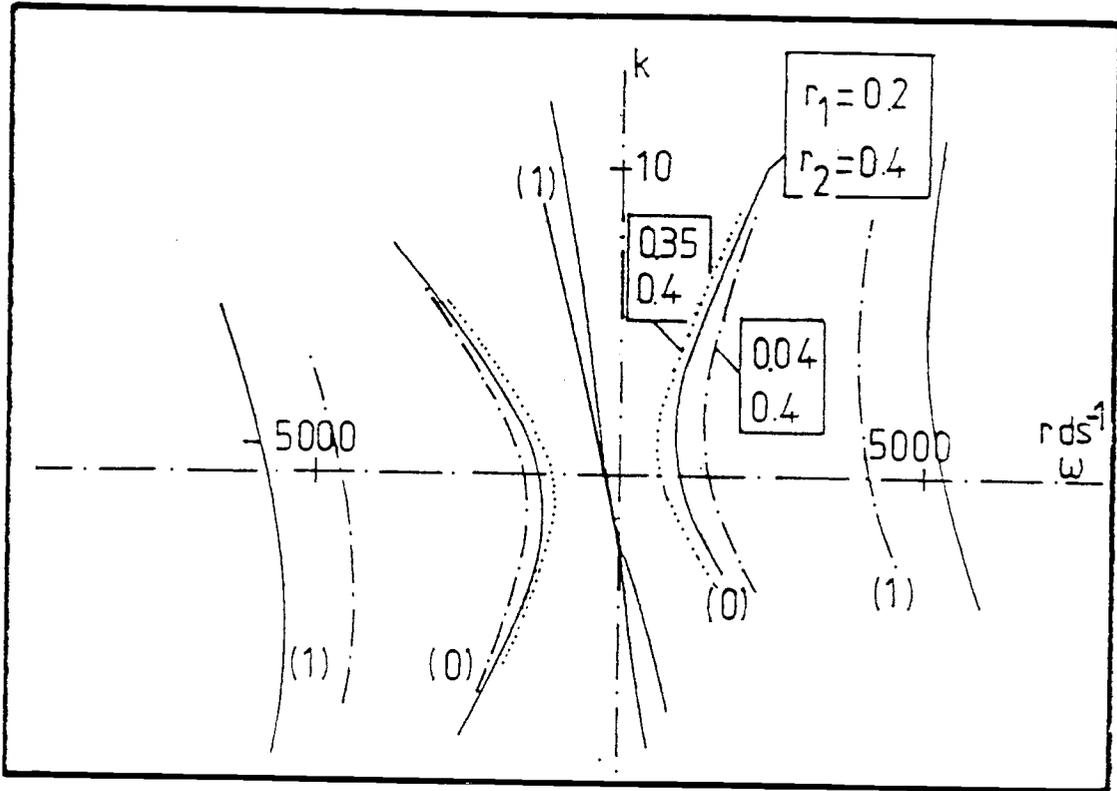
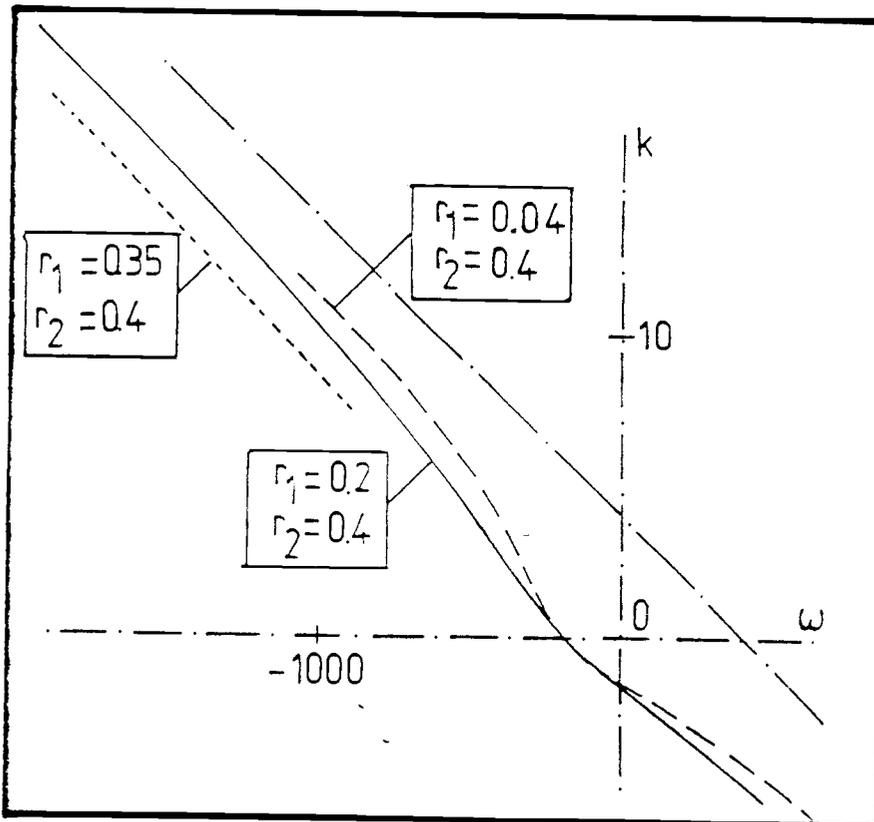


Planche III-2 - Effet du nombre d'onde azimutal n sur la relation de dispersion en écoulement de rotation solide.

$$\Omega = 200 \text{ rds}^{-1} \quad , \quad W_0 = 100 \text{ ms}^{-1} \quad , \quad r_1 = 0.2 \text{ m} \quad , \quad r_2 = 0.4 \text{ m} .$$



a) modes acoustiques.



b) modes inertiels.

Planche III-3 - Influence de la valeur du rapport des rayons r_2/r_1 sur la relation de dispersion en écoulement de rotation solide.

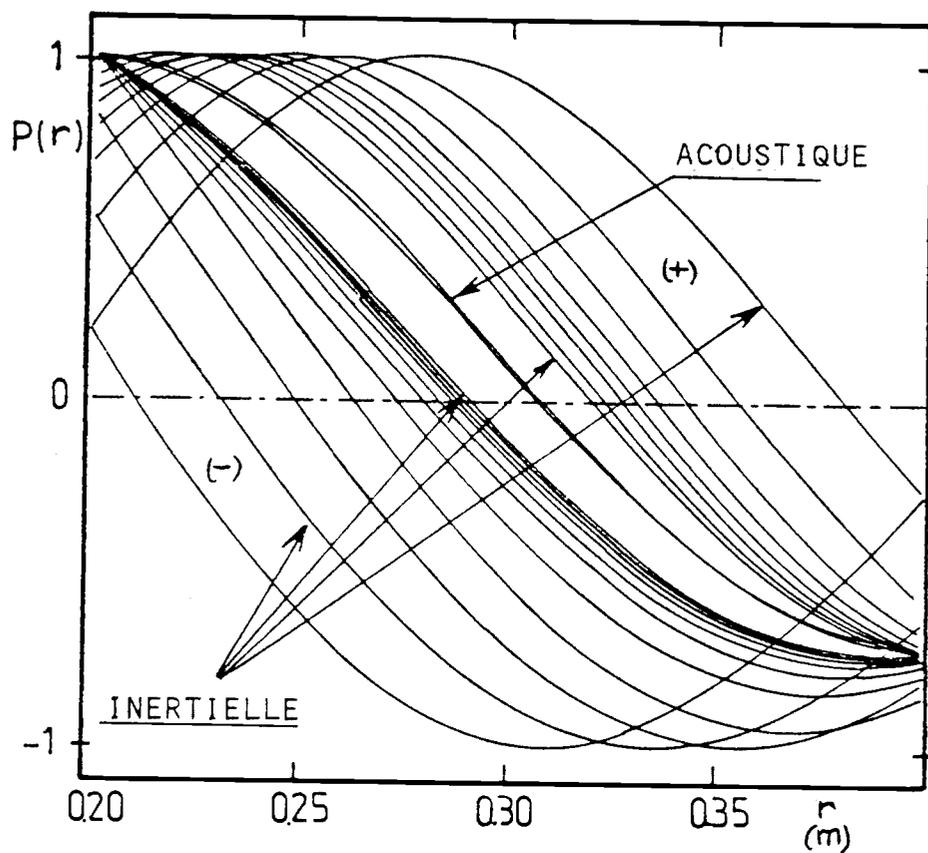
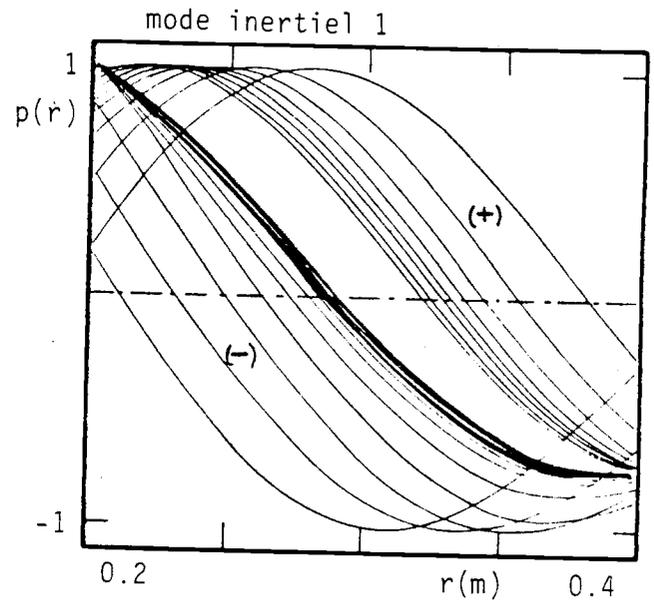
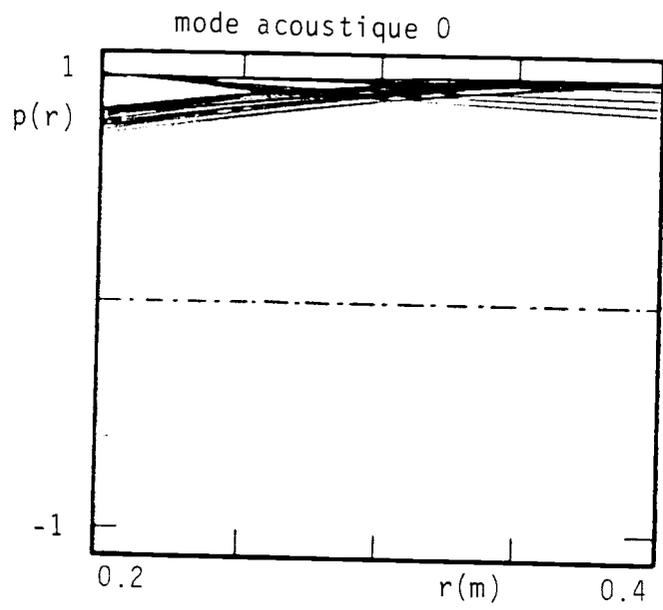
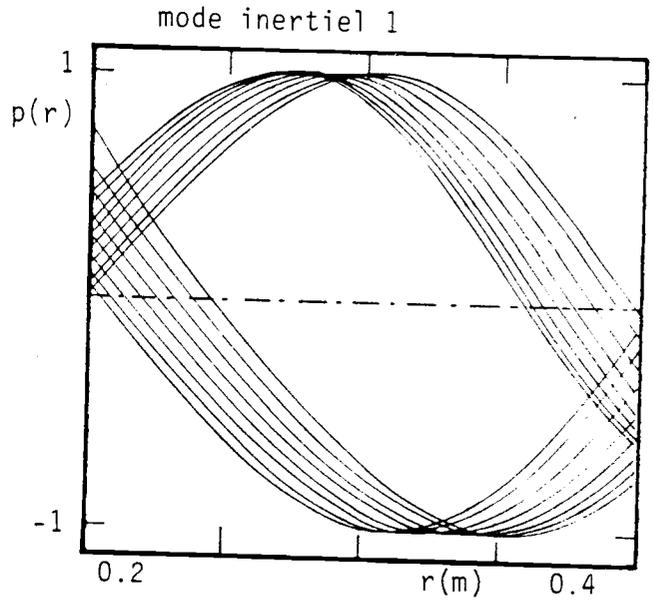
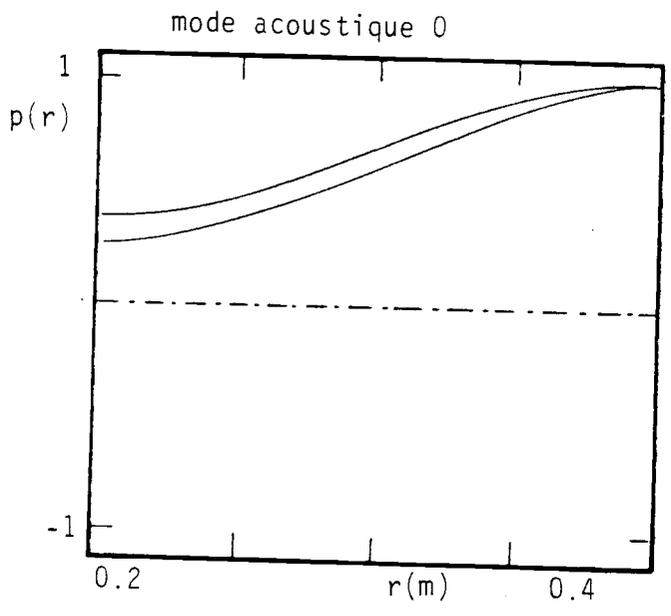


Planche III-4 - Faisceau des distributions radiales de pression correspondant au mode radial 1 en rotation solide.

$$\begin{array}{lll}
 r_1 = 0.2 \text{ m} & n = 1 & \omega_0 = 100 \text{ ms}^{-1} \\
 r_2 = 0.4 \text{ m} & \Omega = 200 \text{ rds}^{-1} &
 \end{array}$$



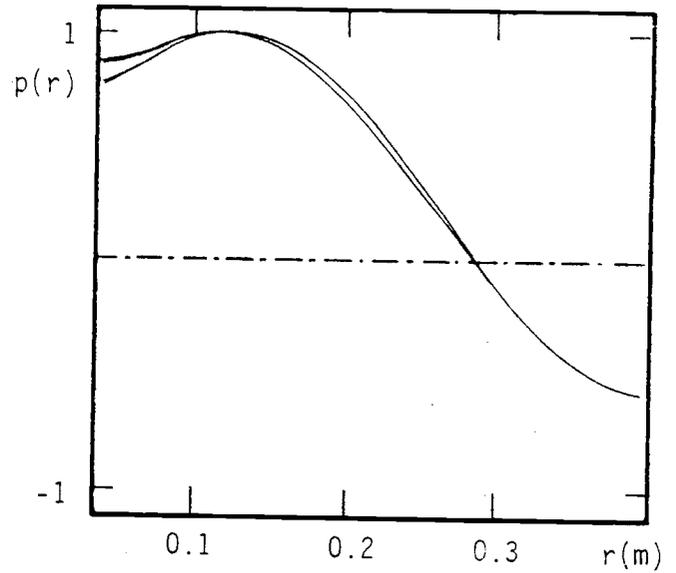
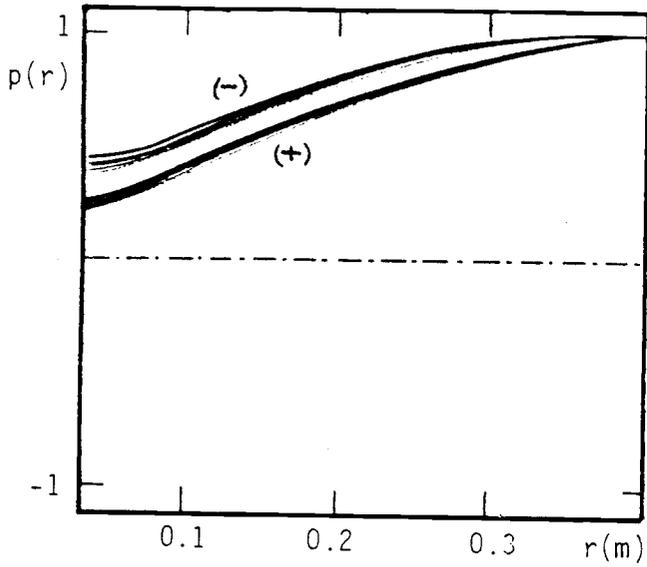
a) Cas n = 1.



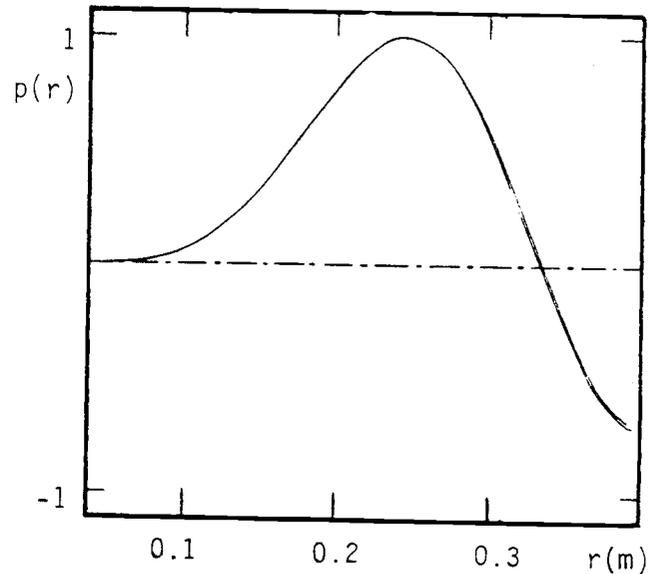
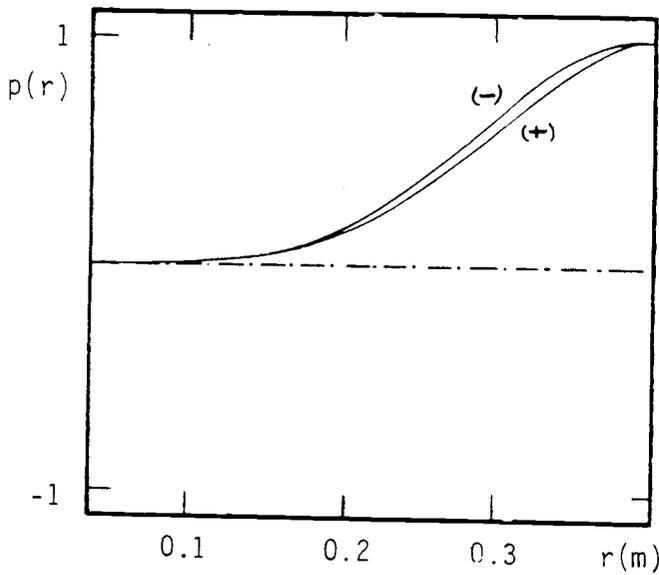
b) Cas n = 5.

Planche III-5 - Effet du nombre d'onde azimuthal sur les modes de pression en rotation solide.

$$\begin{aligned} \Omega &= 200 \text{ rds}^{-1} & W_0 &= 100 \text{ ms}^{-1} \\ r_1 &= 0.2 \text{ m} & r_2 &= 0.4 \text{ m} \end{aligned}$$



a) $n = 1$.



b) $n = 5$.

Planche III-6 - Effet du nombre d'onde azimutal sur les modes acoustiques 0 et 1 en écoulement de rotation solide.

$W_0 = 100 \text{ m/s}$

$\Omega = 200 \text{ rd/s}$

$r_1 = 0.04 \text{ m} , r_2 = 0.4 \text{ m}$

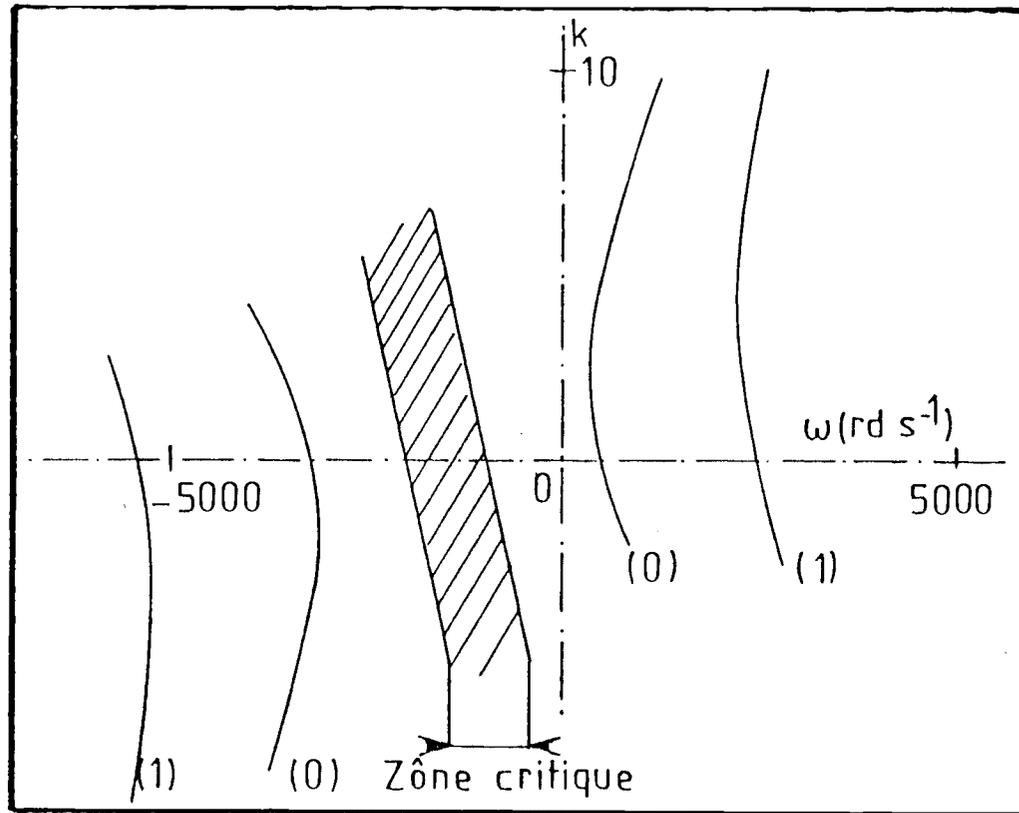


Planche III-7 - Relation de dispersion des modes 0 et 1 en écoulement de tourbillon libre.

$$\Gamma = 200 \quad , \quad W_0 = 100 \text{ ms}^{-1} \quad , \quad n = 5 \quad , \quad r_1 = 0.7 \text{ m} \quad , \quad r_2 = 1 \text{ m}.$$

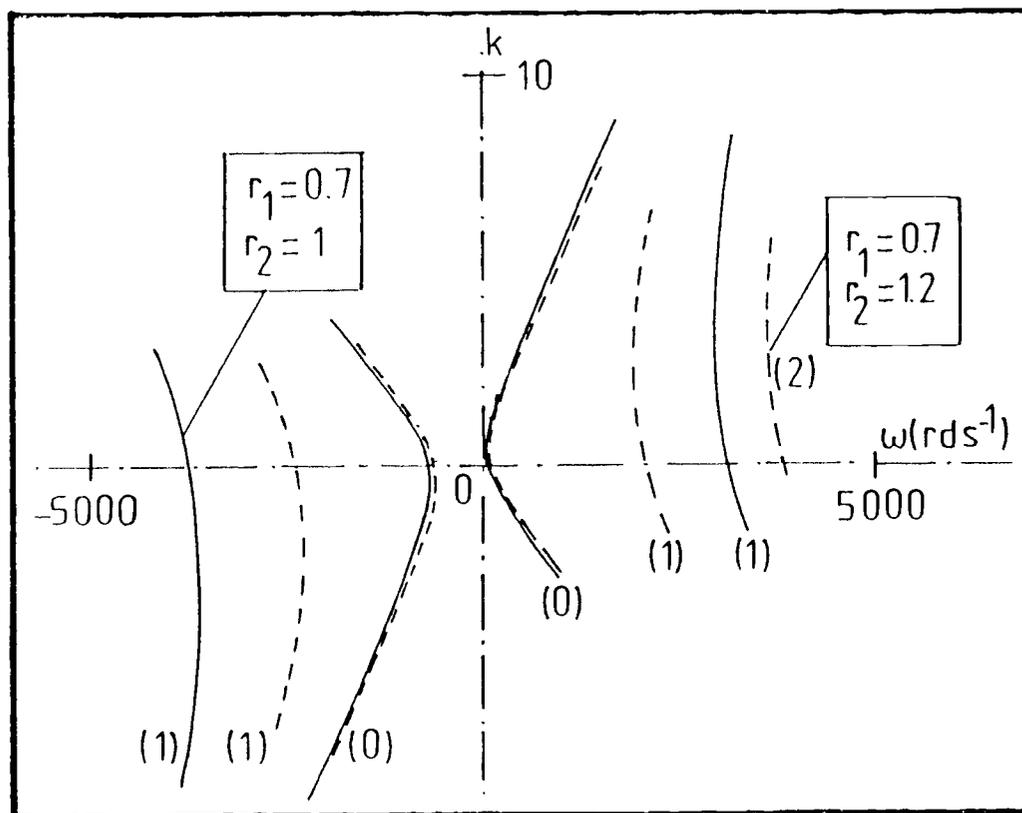


Planche III-8 - Effet du rapport des rayons sur la relation de dispersion en écoulement de tourbillon libre.

$$r = 200 \quad , \quad W_0 = 100 \text{ ms}^{-1} \quad , \quad n = 1$$

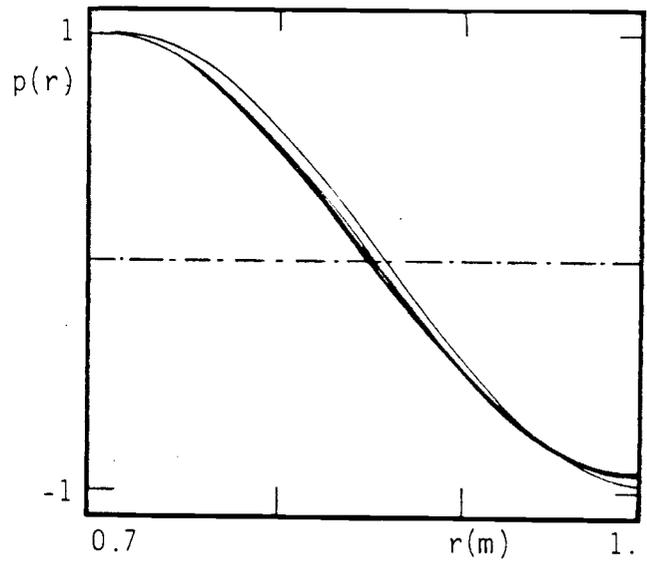
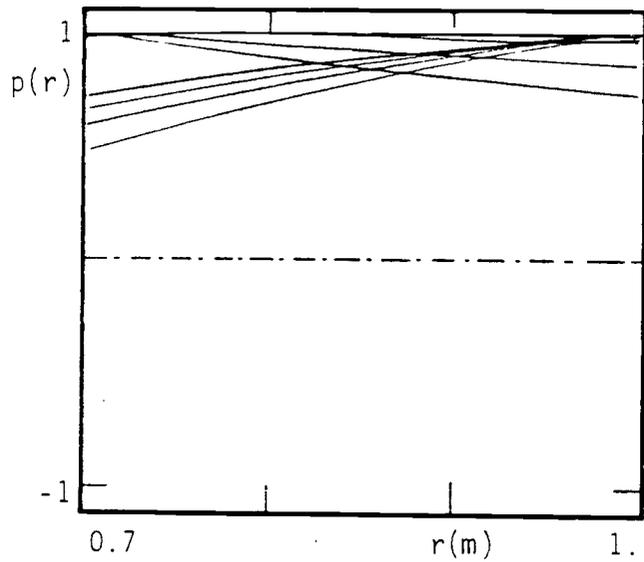
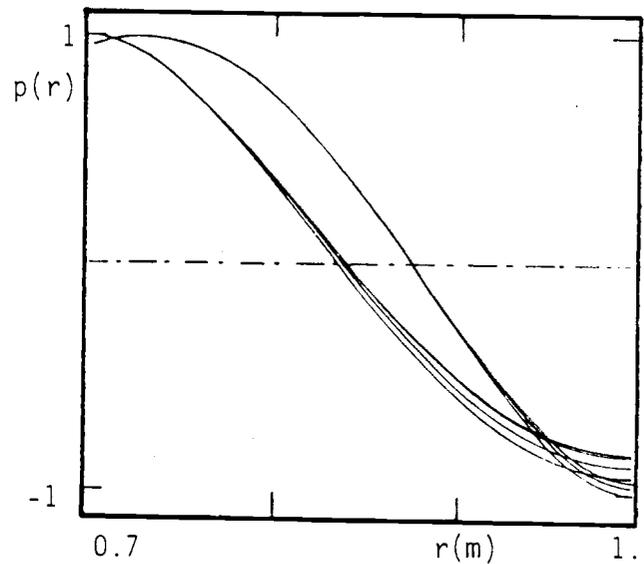
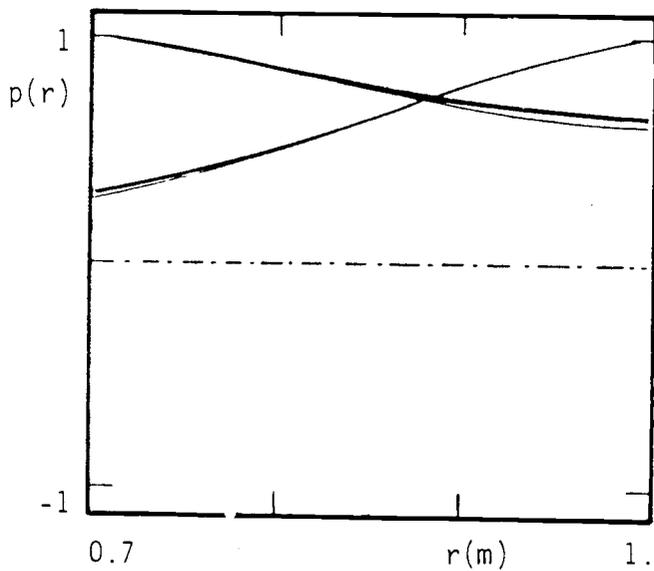
a) $n = 1$.b) $n = 5$.

Planche III-9 - Effet du nombre d'onde azimutal sur les modes acoustiques 0 et 1 en tourbillon libre.

$$W_0 = 100 \text{ ms}^{-1} \quad \Gamma = 200 \quad r_1 = 0.7 \text{ m} \quad r_2 = 1. \text{ m}$$

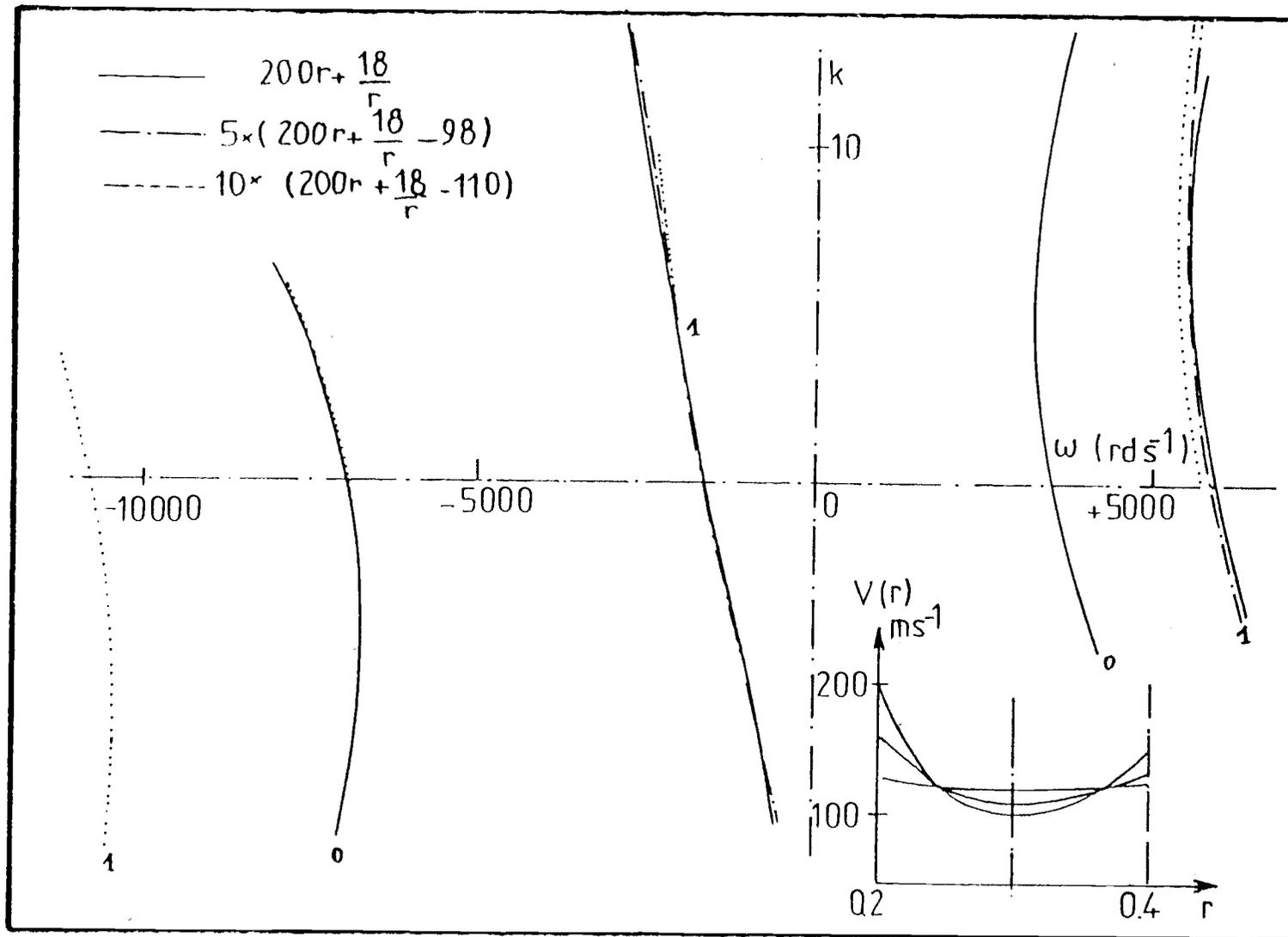


Planche III-10 - Relation de dispersion des modes radiaux 0 et 1 en écoulement mixte.
 Effet de gradient .

$n = 5$, $r_1 = 0.2 \text{ m}$, $r_2 = 0.4 \text{ m}$, $w_0 = 100 \text{ ms}^{-1}$

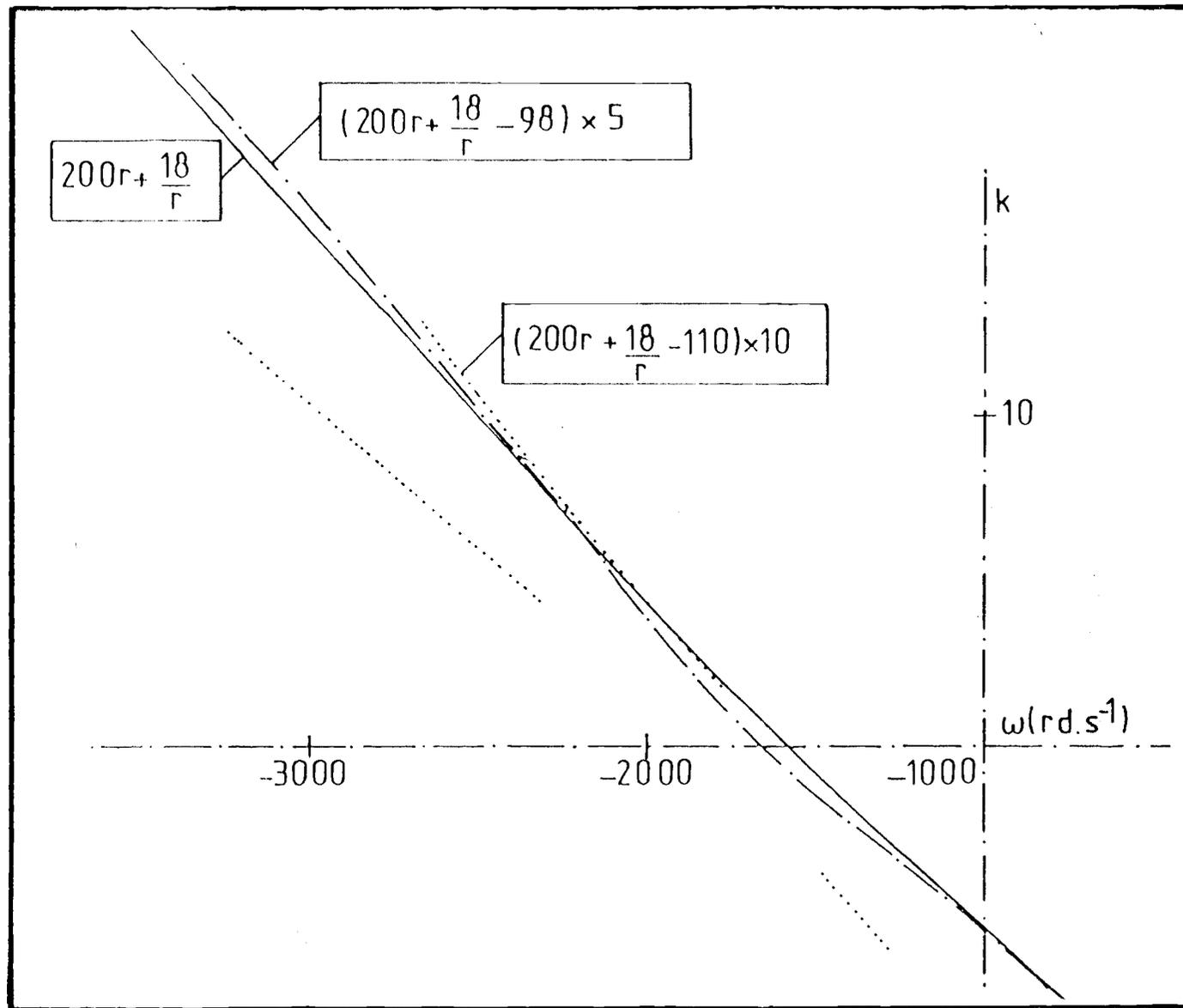


Planche III-11 - Effet de gradients sur les branches inertielles en écoulement mixte.
 $n = 5$, $r_1 = 0.2 \text{ m}$, $r_2 = 0.4 \text{ m}$, $W_0 = 100 \text{ ms}^{-1}$

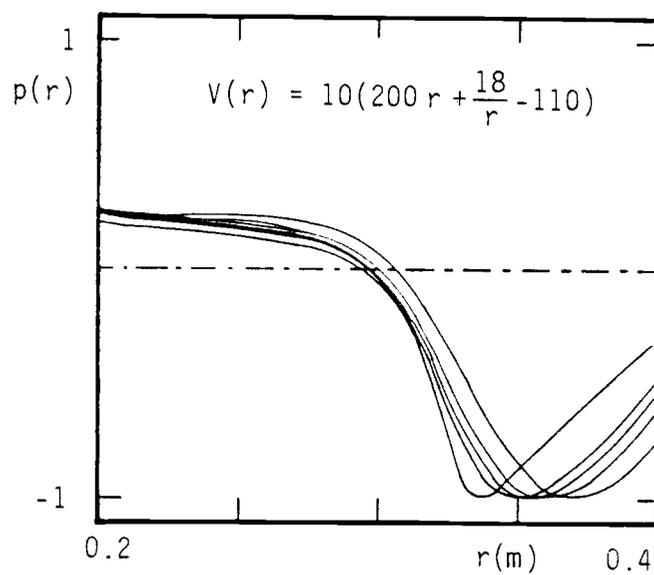
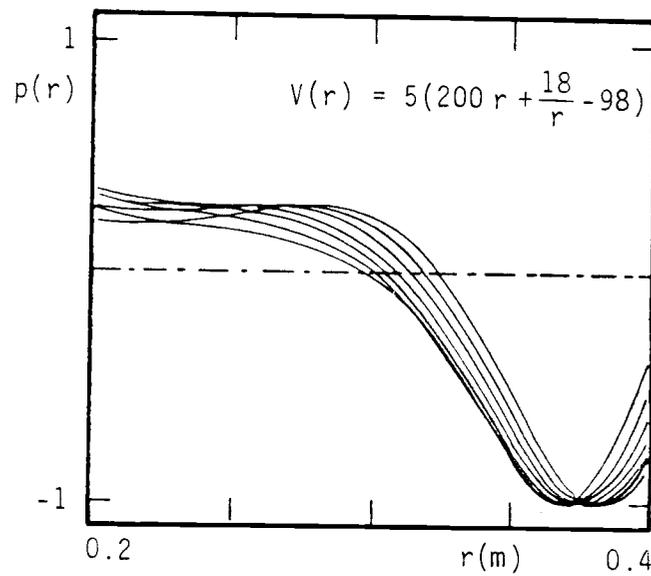
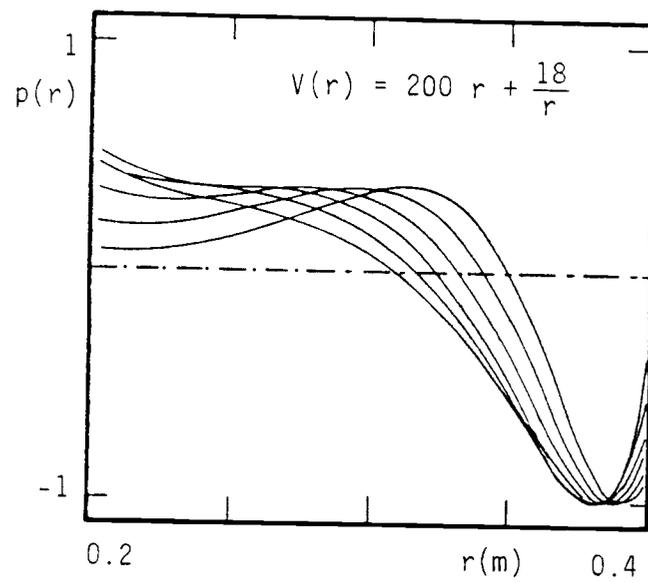
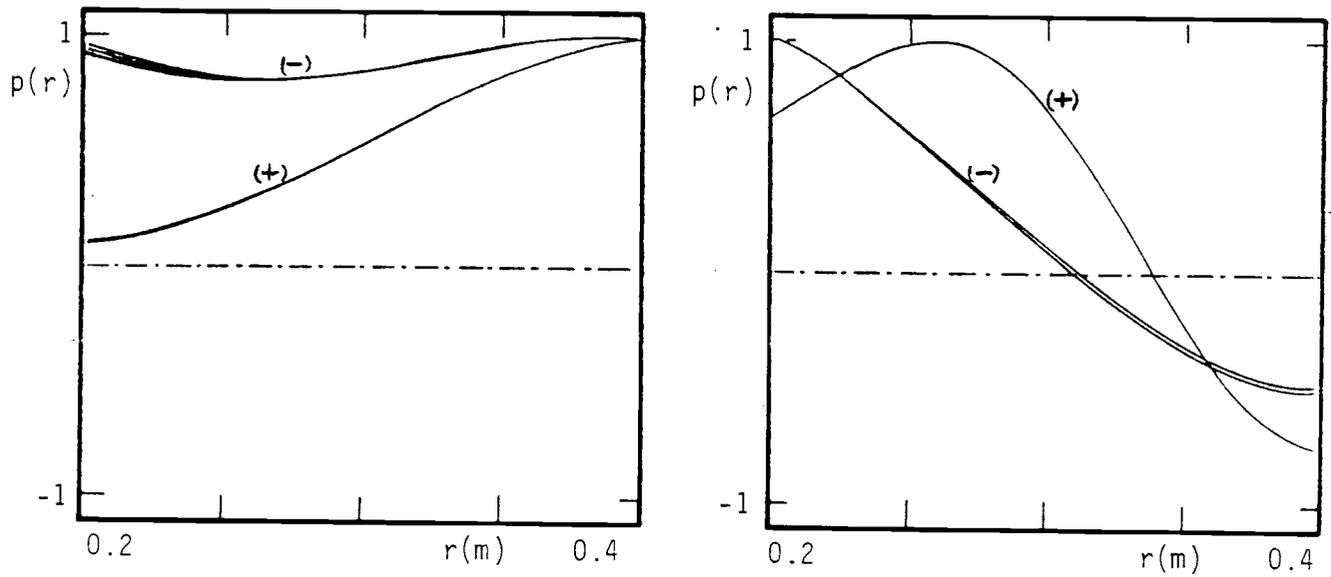
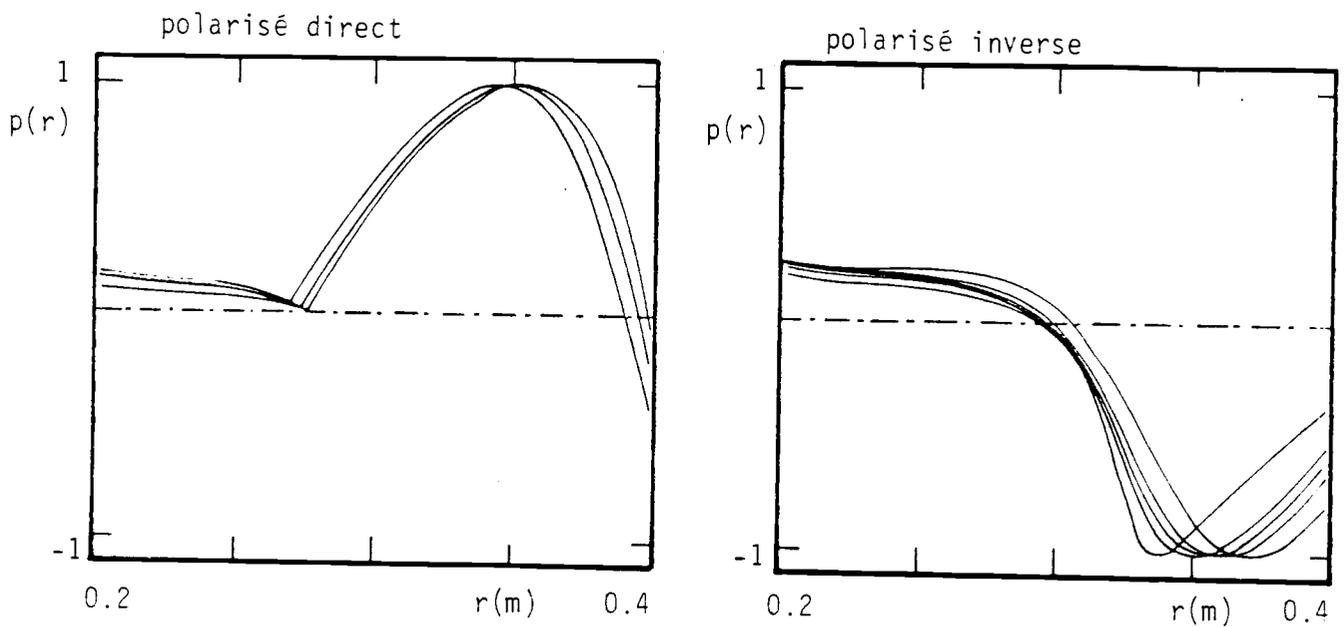


Planche III-12 - Effet de gradient sur le mode inertiel 1 polarisé dans le sens inverse pour une loi mixte de vitesse tangentielle.

$$r_1 = 0.2 \text{ m} , \quad r_2 = 0.4 \text{ m} , \quad n = 5 , \quad \omega = 100 \text{ ms}^{-1} .$$



a) modes acoustiques 0 et 1.



b) modes de cisaillement 1.

Planche III-13 - Modes de pression 0 et 1 dans un écoulement mixte

$$V(r) = 10 \left(200 r + \frac{18}{r} - 110 \right).$$

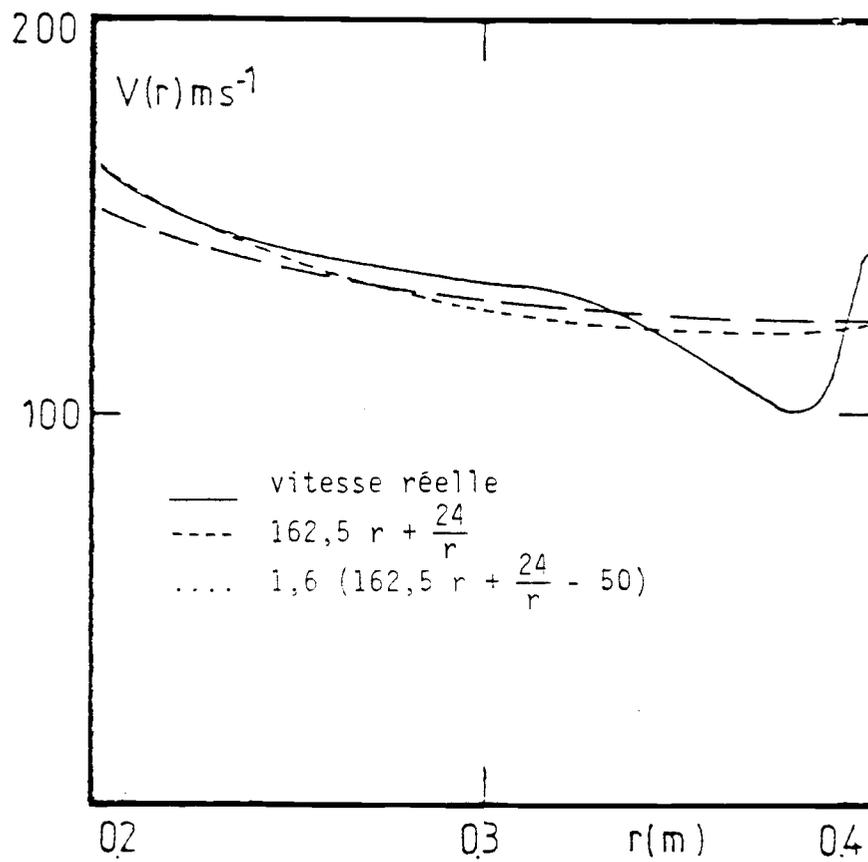
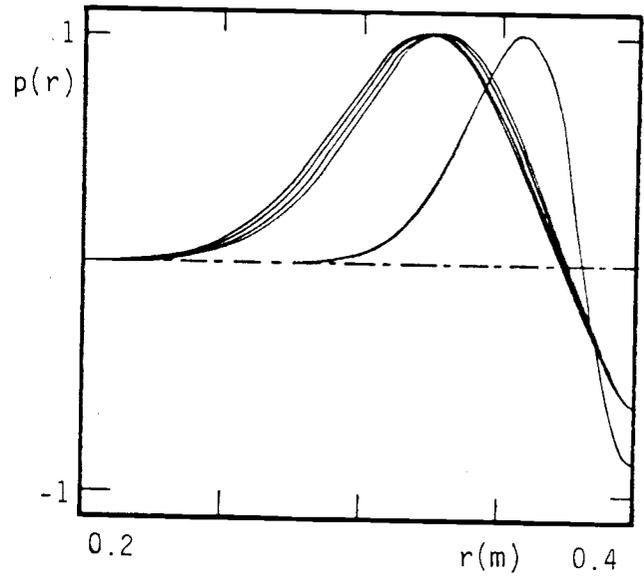
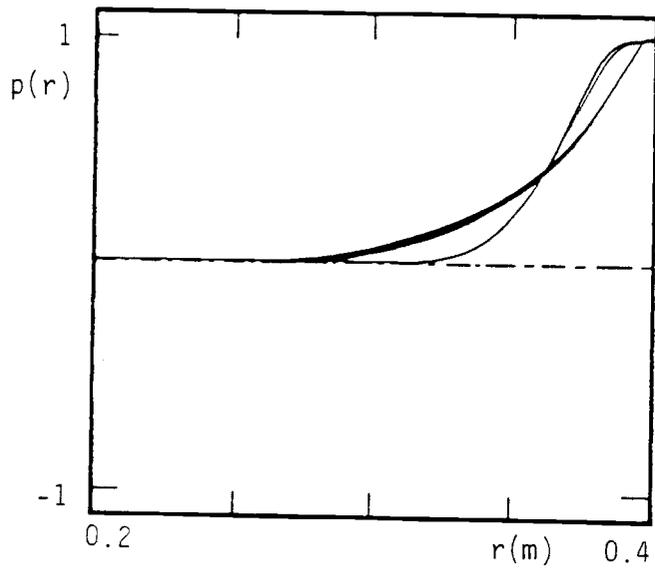


Planche IV-1 - Paramétrisation de la loi de vitesse tangentielle du TS-24 en régime nominal.



a) Loi de vitesse réelle.

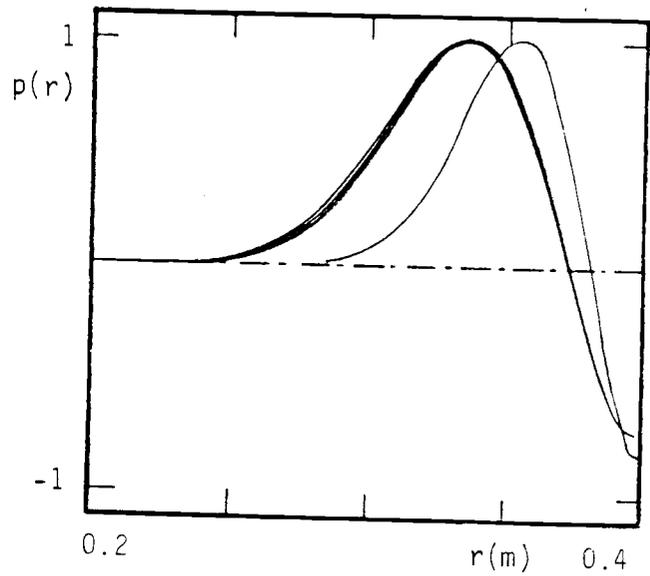
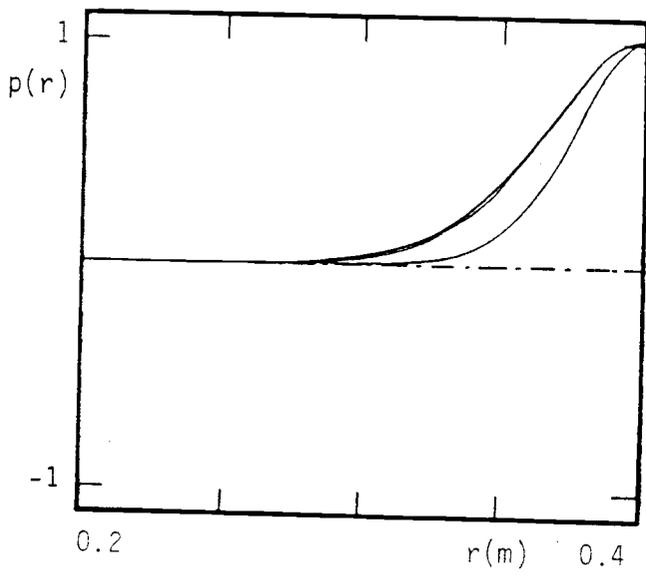
b) Loi de vitesse $V(r) = 162,5 r + \frac{24}{r}$.

Planche IV-2 - Modes acoustiques 0 et 1 dans le cas du TS-24.

$n = 44$

$r_1 = 0.2 \text{ m}$

$r_2 = 0.4 \text{ m}$

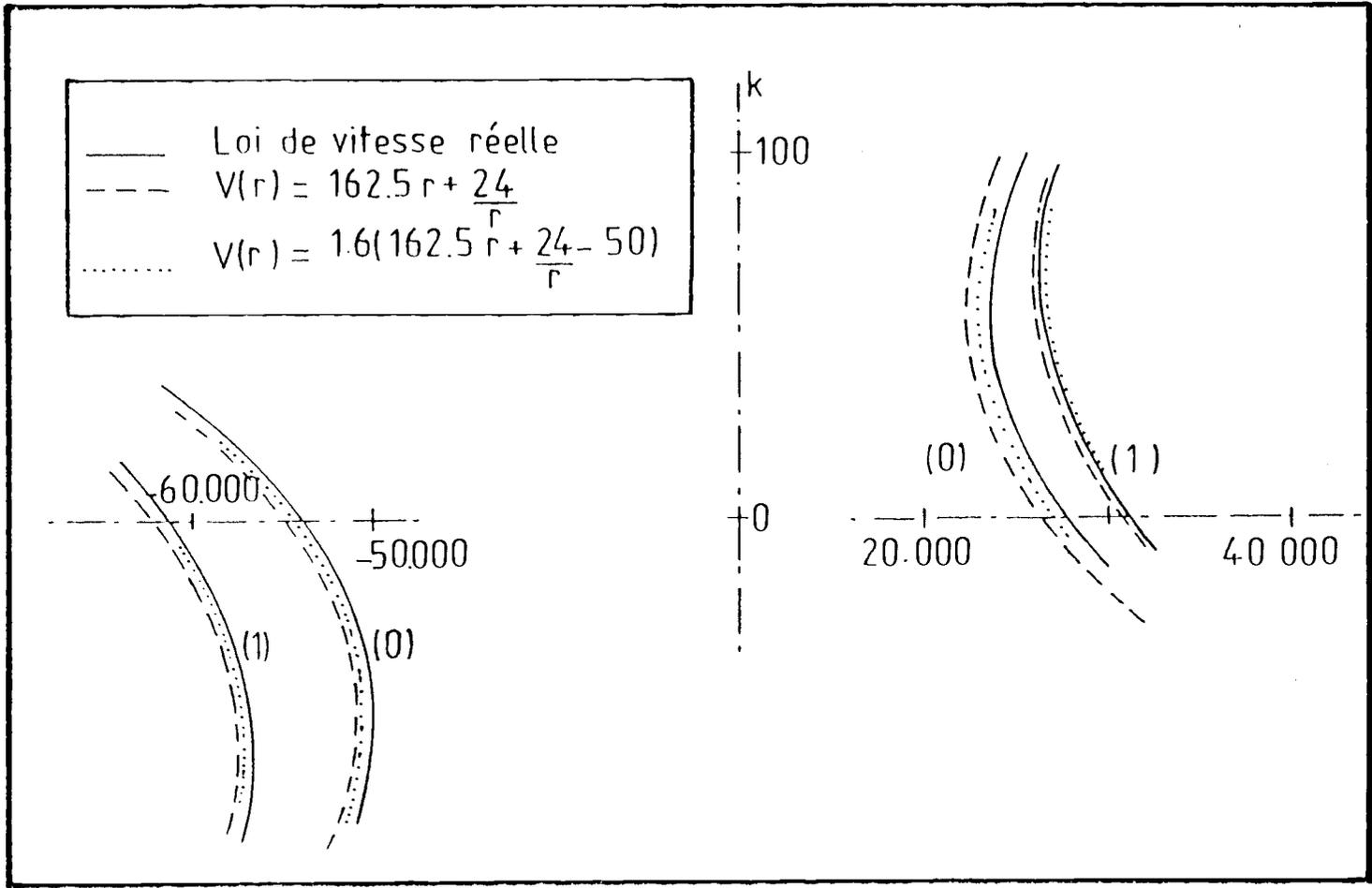


Planche IV-3 - Relation de dispersion des modes acoustiques 0 et 1 dans le cas du IS-24. $n = 44$, $W_0 = 149 \text{ ms}^{-1}$.

ANNEXE I - CALCUL MODAL DU BRUIT DE COMPRESSEUR EN CONDUITE
CYLINDRIQUE ANNULAIRE AVEC ÉCOULEMENT UNIFORME.

Cette annexe regroupe les calculs dont il est fait mention à la fin du chapitre I, et explicite la technique utilisée par Homicz en 1974. Nous convenons de ne pas changer de notation pour décrire une quantité physique et son image dans l'espace spectral.

Résolution dans l'espace spectral

Après transformées de Fourier suivant les variables θ , z , t , l'équation d'onde sur la perturbation de pression donne l'équation radiale suivante :

$$\frac{d^2 p}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp}{dr} + \left[\kappa^2 - \frac{n^2}{r^2} \right] p = S$$

$$\text{avec : } \kappa^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} + 2M_0 k \frac{\omega}{c_0} - (1 - M_0^2) k^2$$

c_0 est la célérité du son, et $M_0 = \frac{W_0}{c_0}$ le nombre de Mach axial. La condition aux limites s'écrit :

$$\frac{dp}{dr} = 0 \quad \text{en } r=r_1 \quad \text{et } r=r_2$$

En dehors des zones où sont concentrées les sources, la propagation s'effectue suivant les modes propres, qui sont solutions du problème homogène :

$$\frac{d^2 p}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp}{dr} + \left[\kappa^2 - \frac{n^2}{r^2} \right] p = 0$$

$$\frac{dp}{dr} = 0 \quad \text{en } r=r_1 \quad \text{et } r=r_2$$

Ceci constitue un problème aux valeurs propres de Sturm-Liouville. Les propriétés en font dans la littérature l'objet d'ouvrages importants (Friedman 1956, Titchmarsh, 1962, Nikiforov et Ouvarov, 1976).

- Pour le type de conditions aux limites précisé il existe une infinité de valeurs propres positives κ_{nj}^2 , $j=0, 1, 2, \dots$, et les solutions propres associées sont des combinaisons de fonctions de Bessel de 1er et 2ème espèces

$$B_{nj}(r) = J_n(\kappa_{nj} r) + A_{nj} Y_n(\kappa_{nj} r)$$

- Les coefficients A_{nj} et les valeurs κ_{nj} sont imposés par les conditions aux limites qui stipulent que :

$$\begin{cases} J_n'(\kappa_{nj} r_1) + A_{nj} Y_n'(\kappa_{nj} r_1) = 0 \\ J_n'(\kappa_{nj} r_2) + A_{nj} Y_n'(\kappa_{nj} r_2) = 0 \end{cases}$$

- Si nous définissons le produit scalaire de deux fonctions $f(r)$ et $g(r)$ par la relation :

$$\langle f, g \rangle = \int_{r_1}^{r_2} r f(r) g(r) dr$$

nous disposons du résultat suivant :

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} r B_{nj}(r) B_{ni}(r) dr &= 0 \quad \text{si } i \neq j \\ &= \left[\frac{r^2}{2} \left\{ \left(1 - \frac{n^2}{\kappa_{nj}^2 r^2} \right) B_{nj}^2(r) + B_{nj}'^2(r) \right\} \right]_{r_1}^{r_2} \\ &\quad \text{si } i = j \end{aligned}$$

(Abramowicz - Stegun, 1965)

Cette propriété nous permet de normaliser les fonctions $B_{nj}(r)$ pour obtenir des fonctions $C_{nj}(r)$ vérifiant l'intégrale de normalisation :

$$\int_{r_1}^{r_2} r C_{nj}(r) C_{ni}(r) dr = \delta_{ij}$$

Les $C_{nj}(r)$, fonctions propres du problème de Sturm-Liouville, forment un ensemble orthonormé pour le produit scalaire considéré. Par suite toute fonction $F(r)$ vérifiant les conditions aux limites peut être décomposée sur cet ensemble :

$$F(r) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j C_{nj}(r) \quad \text{avec} \quad F_j = \int_{r_1}^{r_2} r F(r) C_{nj}(r) dr$$

Ces deux relations définissent une transformée de Bessel finie suivant la variable r (Sneddon, 1951).

On est alors en mesure d'appliquer à toute quantité exprimée dans l'espace physique à l'aide des variables r, θ, z, t une quadruple transformée de Fourier-Bessel, pour se ramener à sa description dans un espace spectral dont les variables j, n, k, ω sont les variables conjuguées de r, θ, z, t .

Par exemple la perturbation de pression s'écrit :

$$p(j, n, k, \omega) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{r_1}^{r_2} r C_{nj}(r) dr \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{i(\omega t + kz)} \int_0^{2\pi} d\theta e^{in\theta} p(r, \theta, z, t)$$

et le théorème d'inversion permet d'écrire la relation conjuguée :

$$p(r, \theta, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-i(\omega t + kz)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p(j, n, k, \omega) C_{nj}(r) e^{-in\theta}$$

Il reste à présent, pour que le problème soit résolu, à déterminer les quantités $p(j, n, k, \omega)$ à partir d'une distribution de sources $S(r, \theta, z, t)$ supposée connue.

Considérons pour cela l'équation complète sur $p(r)$

$$\frac{d^2 p}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp}{dr} + \left[\kappa^2 - \frac{n^2}{r^2} \right] p = S$$

et appliquons la transformée de Bessel définie plus haut. La transformée des deux premiers termes du membre de gauche s'écrit :

$$\int_{r_1}^{r_2} C_{nj}(r) \frac{d}{dr} \left(r \frac{dp}{dr} \right) dr$$

Si nous intégrons deux fois par parties il vient :

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} C_{nj}(r) \frac{d}{dr} \left(r \frac{dp}{dr} \right) dr &= \left[r \frac{dp}{dr} C_{nj}(r) \right]_{r_1}^{r_2} - \left[r C'_{nj}(r) p \right]_{r_1}^{r_2} \\ &+ \int_{r_1}^{r_2} r p \left[C''_{nj}(r) + \frac{1}{r} C'_{nj}(r) \right] dr \end{aligned}$$

En vertu des conditions aux limites et des propriétés des noyaux $C_{nj}(r)$ ceci s'écrit :

$$\int_{r_1}^{r_2} C_{nj}(r) \frac{d}{dr} \left(r \frac{dp}{dr} \right) dr = - \int_{r_1}^{r_2} r p(r) \left[\kappa_{nj}^2 - \frac{n^2}{r^2} \right] C_{nj}(r) dr$$

Il vient donc :

$$\int_{r_1}^{r_2} r C_{nj}(r) \left[\frac{d^2 p}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp}{dr} - \frac{n^2}{r^2} p \right] dr = - \kappa_{nj}^2 \int_{r_1}^{r_2} r p(r) C_{nj}(r) dr$$

Et la transformée de l'équation s'écrit simplement :

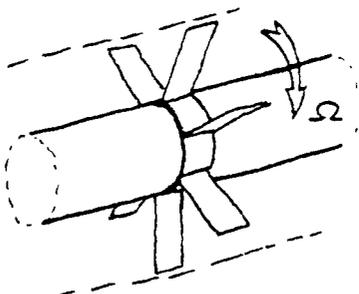
$$\boxed{(\kappa^2 - \kappa_{nj}^2) p(j, n, k, \omega) = S(j, n, k, \omega)}$$

La solution dans l'espace spectral est donc immédiate. On remonte ensuite à la solution dans l'espace physique par le théorème d'inversion. Ce résultat simple vient du fait que la transformée de Bessel utilisée a pour noyaux intégraux les solutions propres de l'équation homogène. C'est par suite une transformée intégrale adaptée aux conditions limites.

La solution de l'équation complète est développable sur les modes propres de propagation dans le conduit, et les coefficients de ce développement sont calculables grâce à l'orthogonalité des modes propres.

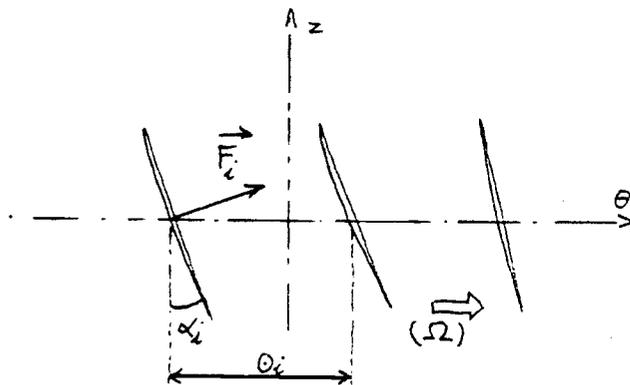
Calcul des termes sources dans le cas d'un rotor seul

Nous donnons ici un exemple d'application inspiré des travaux de Homicz et al., mais utilisant une distribution de sources plus générale. Nous considérons un rotor en conduit annulaire cylindrique, composé de B pales et tournant à la vitesse Ω .



Les angles de calage des pales sont supposés indépendants du rayon, mais variant d'une pale à l'autre en raison d'éventuelles irrégularités de construction. De même l'écartement des pales Θ peut être irrégulier.

On choisit donc la représentation développée suivante, les écarts à la régularité étant supposés petits autour de valeurs moyennes :



$$F_i = F + f_i$$

$$\alpha_i = \alpha + \alpha_i$$

$$\theta_i = \frac{2\pi}{B} - e_i$$

F est un effort instationnaire a priori fonction de r .
Ses composantes sont :

$$F_{zi} = F_i \sin \alpha_i = F \sin \alpha + \alpha_i F \cos \alpha + f_i \sin \alpha$$

$$F_{\theta i} = F_i \cos \alpha_i = F \cos \alpha + f_i \cos \alpha - \alpha_i F \sin \alpha$$

La distribution de forces, supposée ramenée au disque source balayé par le rotor à l'abscisse $z = z_R$, s'écrit alors :

$$\vec{F}(r, \theta, z, t) = \delta(z - z_R) \sum_{\ell=0}^{B-1} \delta(\theta + \Omega t - \frac{2\ell\pi}{B} + e_\ell) \vec{F}_\ell(r, t)$$

Par suite la distribution de sources de l'équation d'ondes s'écrit

$$\begin{aligned} S(r, \theta, z, t) &\equiv \text{div } \vec{F} \\ &= \sum_{\ell=0}^{B-1} \left\{ A_\ell \delta(\theta + \Omega t - \frac{2\ell\pi}{B} + e_\ell) \frac{\partial}{\partial z} \delta(z - z_R) \right. \\ &\quad \left. + \delta(z - z_R) \frac{B\ell}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \delta(\theta + \Omega t - \frac{2\ell\pi}{B} + e_\ell) \right\} \end{aligned}$$

A_ℓ et B_ℓ étant des coefficients.

L'image des sources dans l'espace spectral $S(n, j, k, \omega)$ s'obtient à partir de cette expression par la quadruple transformée de Fourier-Bessel. Les calculs utilisent des résultats simples de la théorie des distributions (par exemple Jones, 1966).

$$S(j, n, k, \omega) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{r_1}^{r_2} r C_{nj}(r) dr \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{i(\omega t + k z)}$$

.79.

$$\sum_{\ell=0}^{B-1} \left[A_{\ell} \frac{\partial}{\partial z} \delta(z-z_R) - i \delta(z-z_R) \frac{B_{\ell} m}{r} \right] \int_0^{2\pi} e^{in\theta} \delta(\theta + \Omega t - \frac{2\ell\pi}{B} + e_{\ell}) d\theta$$

$$= \frac{-i}{2\pi^2} \int_{r_1}^{r_2} r C_{nj}(r) dr \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[k A_{\ell} + \frac{m B_{\ell}}{r} \right] e^{ikz_R} e^{in(\frac{2\ell\pi}{B} - e_{\ell} - \Omega t)}$$

$$S(j, n, k, \omega) = \frac{-i}{2\pi^2} \int_{r_1}^{r_2} r C_{nj}(r) dr e^{ikz_R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - n\Omega)t} \sum_{\ell=0}^{B-1} \left[k A_{\ell} + \frac{n B_{\ell}}{r} \right] e^{i(\frac{2\ell\pi}{B} - e_{\ell})n} dt$$

L'intégrale en t représente une fonction $\mathcal{F}(r, \omega - n\Omega)$ a priori quelconque.

Si l'on suppose A_{ℓ} et B_{ℓ} indépendants du temps, cette intégrale se ramène simplement à la suivante :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - n\Omega)t} dt = \delta(\omega - n\Omega)$$

Sans poursuivre le calcul on voit qu'un tel modèle permet de mettre en évidence les fréquences multiples de la rotation dans le spectre de la quantité $p(j, n, k, \omega)$.

Si nous supposons de plus que le rotor est d'une régularité parfaite, alors :

$$\sum_{\ell=0}^{B-1} \left[k A_{\ell} + \frac{n B_{\ell}}{r} \right] e^{in(\frac{2\ell\pi}{B} - e_{\ell})} = 0 \quad \text{si } n \neq NB$$

$$= B \left[k F \sin \alpha + \frac{n F \cos \alpha}{r} \right] \quad \text{si } n = NB$$

Le spectre contient alors uniquement les harmoniques $NB\Omega$ de la fréquence de passage des pales.

Dans le cas où le rotor est parfait géométriquement, mais où F dépend de r et t , nous avons :

$$S(j, n, k, \omega) = \frac{-iB}{2\pi^2} \int_{r_1}^{r_2} r C_{nj}(r) dr e^{ikz_r} \left[k \sin \alpha + \frac{n \cos \alpha}{r} \right] \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - n\Omega)t} F(r, t) dt, \quad n = NB$$

Les sources sont donc connues si le spectre de F est connu. Ce dernier point relève de l'aérodynamique instationnaire. La relation montre en tout état de cause que dans le cas général le spectre de bruit contiendra une contribution à large bande.

Notons enfin que l'interaction rotor-stator peut se traiter de la même manière en introduisant une fonction source supplémentaire localisée dans le plan du stator.

ANNEXE II - EQUATIONS LINÉARISÉES DE LA DYNAMIQUE DES GAZ
DANS UN ÉCOULEMENT TOURNANT ISENTROPIQUE.

Nous allons ici déduire les équations sur la perturbation au 1er ordre d'un écoulement moyen tournant défini par la pression, la densité et la vitesse P_0 , ρ_0 , $\vec{V}_0 = (0, V(r), W(r))$ en repère cylindrique. La perturbation est notée : p, ρ , $\vec{v} = (u, v, w)$.

Equations de la mécanique des fluides

L'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 + \rho) + \text{div} [(\rho_0 + \rho)(\vec{V}_0 + \vec{v})] = 0$$

soit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right] (\rho_0 + \rho) u + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [(\rho_0 + \rho)(V + v)] + \frac{\partial}{\partial z} [(\rho_0 + \rho)(W + w)] = 0$$

La linéarisation permet d'écrire :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial \rho_0}{\partial r} u + \frac{V}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + W \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$

soit, en introduisant l'opérateur de dérivée suivant le mouvement moyen

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{V}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + W \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho_0 \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{d\rho_0}{dr} u = 0}$$

En l'absence de forces extérieures, l'équation de la quantité de mouvement s'écrit :

(cf. Landau et Lifschitz)

$$(\rho_0 + \rho) \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{V+v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{(V+v)^2}{r} + (W+w) \frac{\partial u}{\partial z} \right] = - \frac{\partial}{\partial r} (\rho_0 + \rho)$$

$$(\rho_0 + \rho) \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial(V+v)}{\partial r} + \frac{V+v}{r} \frac{\partial(V+v)}{\partial \theta} + u \frac{(V+v)}{r} + (W+w) \frac{\partial(V+v)}{\partial z} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho_0 + p)$$

$$(\rho_0 + \rho) \left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial(W+w)}{\partial r} + \frac{V+v}{r} \frac{\partial(W+w)}{\partial \theta} + (W+w) \frac{\partial(W+w)}{\partial z} \right] = -\frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 + p)$$

Ce qui se ramène au système suivant :

$$\rho_0 \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{V}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{V^2}{r} + W \frac{\partial u}{\partial z} - z \frac{V_v}{r} \right] - \rho \frac{V^2}{r} = -\frac{d\rho_0}{dr} - \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\rho_0 \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{dv}{dr} + \frac{V}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{V}{r} u + W \frac{\partial v}{\partial z} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

$$\rho_0 \left[\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{V}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{dW}{dr} u + W \frac{\partial w}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

L'écoulement moyen est assujéti à la condition d'équilibre radial :

$$\frac{d\rho_0}{dr} = \rho_0 \frac{V^2}{r}$$

Si l'on utilise cette relation les équations de quantité de mouvement se réécrivent :

$$\begin{aligned} \rho_0 \left[\frac{Du}{Dt} - \frac{2V}{r} v \right] &= \frac{V^2}{r} \rho - \frac{\partial p}{\partial r} \\ \rho_0 \left[\frac{Dv}{Dt} + \left(\frac{V}{r} + \frac{dV}{dr} \right) u \right] &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ \rho_0 \left[\frac{Dw}{Dt} + \frac{dW}{dr} u \right] &= -\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}$$

Hypothèse d'isentropie

D'une façon très générale l'équation d'énergie interne d'un fluide s'écrit :

$$d\bar{E} = \bar{T} d\bar{s} - \bar{P} d\left(\frac{1}{\bar{\rho}}\right) \quad \begin{array}{l} \bar{s} \text{ entropie spécifique,} \\ 1/\bar{\rho} \text{ volume spécifique.} \end{array}$$

Les quantités barrées concernant un écoulement quelconque, perturbé ou non. Dans le cas d'un fluide parfait en évolution adiabatique, l'entropie des particules fluides se conserve au cours de mouvement :

$$\frac{d\bar{s}}{dt} = 0 \quad \text{et l'on a} \quad \frac{d\bar{E}}{dt} = -\bar{P} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \right)$$

$\frac{d}{dt}$ étant la dérivée particulaire.

Si nous utilisons l'équation d'état d'un gaz parfait :

$$\bar{P} = R \bar{\rho} \bar{T} \quad R = C_p - C_v \quad d\bar{E} = C_v d\bar{T}$$

il vient en supposant que les capacités calorifiques sont constantes:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{E}}{dt} &= \frac{C_v}{R} \frac{d}{dt} \left(\frac{\bar{P}}{\bar{\rho}} \right) \\ &= -\bar{P} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \right) \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad \frac{d\bar{P}}{dt} = \frac{\gamma \bar{P}}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dt} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

$$\text{Ceci s'écrit :} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\bar{P}}{\bar{\rho}^\gamma} \right) = 0$$

L'adiabaticité d'un écoulement permanent quelconque non perturbé \vec{U} , \bar{P}_0 , ρ_0 s'écrit par suite :

$$\vec{U} \cdot \left[\overrightarrow{\text{grad}} P_0 - c_0^2 \overrightarrow{\text{grad}} \rho_0 \right] = 0$$

où $c_0 = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$ est la célérité locale du son.

Si nous faisons la même hypothèse pour un écoulement perturbé admettant le précédent comme écoulement de base nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{P_0 + p}{(\rho_0 + \rho)^\gamma} \right] = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{U} + \vec{v}) \cdot \vec{\text{grad}}$$

La linéarisation fournit alors l'équation :

$$\frac{dp}{dt} - c_0^2 \frac{d\rho}{dt} = c_0^2 \left(\frac{P}{P_0} - \frac{\rho}{\rho_0} \right) \vec{U} \cdot \vec{\text{grad}} \rho_0 - \vec{v} \cdot \left[\vec{\text{grad}} P_0 - c_0^2 \vec{\text{grad}} \rho_0 \right]$$

Cette relation ne donnant pas un lien simple permettant d'éliminer p ou ρ des équations, nous introduisons une hypothèse supplémentaire, à savoir que l'entropie du fluide est uniforme (homoentropie ?). On a alors :

$$\frac{\partial \bar{s}}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\text{grad}} \bar{s} = \vec{0}$$

Pour l'écoulement moyen, ceci s'écrit

$$\vec{\text{grad}} P_0 = c_0^2 \vec{\text{grad}} \rho_0$$

Pour la perturbation on aboutit à la formule généralement utilisée en acoustique, et dont nous nous servirons ici :

$$p = c_0^2 \rho$$

Finalement les équations de la mécanique des fluides se réécrivent dans notre cas :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_0^2} \frac{Dp}{Dt} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v} + \frac{d\rho_0}{dr} u &= 0 \\ \rho_0 \left[\frac{Du}{Dt} - \frac{2V}{r} v \right] &= \frac{V^2 p}{rc_0^2} - \frac{\partial p}{\partial r} \\ \rho_0 \left[\frac{Dv}{Dt} + \left(\frac{V}{r} + \frac{dV}{dr} \right) u \right] &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ \rho_0 \left[\frac{Dw}{Dt} + \frac{dW}{dr} u \right] &= -\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}$$

Equations du champ tourbillonnaire

L'équation vectorielle du champ tourbillonnaire $\vec{\omega} = \overline{rot} \vec{v}$ s'obtient en prenant le rotationnel de l'équation de quantité de mouvement. L'opérateur D/Dt commute avec les opérateurs $\partial/\partial\theta$ et $\partial/\partial z$, mais pas avec $\partial/\partial r$, car :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{Df}{Dt} \right) = \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{d}{dr} \left(\frac{V}{r} \right) \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{dW}{dr} \frac{\partial f}{\partial z}$$

Première composante :

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \rho_0 \left[\frac{Dv}{Dt} + \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) u \right] \right\} + \frac{\rho_0}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{Dw}{Dt} + \frac{dW}{dr} u \right\} = 0$$

soit :

$$\rho_0 \left\{ \frac{D}{Dt} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial z} \right] + \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} u - \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial z} \right\} = 0$$

Seconde composante :

$$\begin{aligned} \rho_0 \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{Du}{Dt} - \frac{2Vv}{r} \right\} - \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \rho_0 \left[\frac{Dw}{Dt} + \frac{dW}{dr} u \right] \right\} \right\} &= \frac{V^2}{rc_0^2} \frac{\partial p}{\partial z} \\ \rho_0 \left\{ \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \frac{2V}{r} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{d^2 W}{dr^2} u - \frac{dW}{dr} \frac{\partial u}{\partial r} \right\} &- \frac{d\rho_0}{dr} \left[\frac{Dw}{Dt} + \frac{dW}{dr} u \right] \\ - \rho_0 \left\{ \frac{d}{dr} \left(\frac{V}{r} \right) \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{dW}{dr} \frac{\partial w}{\partial z} \right\} &= \frac{V^2}{rc_0^2} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \rho_0 \left\{ \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \frac{2V}{r} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{d^2 W}{dr^2} u - \frac{dW}{dr} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{d}{dr} \left(\frac{V}{r} \right) \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{dW}{dr} \frac{\partial w}{\partial z} \right\} \\ = \frac{V^2}{rc_0^2} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}$$

Troisième composante :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \rho_0 \left[\frac{Dv}{Dt} + \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) u \right] \right\} - \frac{\rho_0}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{Du}{Dt} - \frac{2Vv}{r} \right] = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{V^2 \rho}{r c^2} \right]$$

$$\left(\frac{\rho_0}{r} + \frac{d\rho_0}{dr} \right) \left[\frac{Dv}{Dt} + \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) u \right] + \rho_0 \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{Dv}{Dt} + \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) u \right] - \frac{\rho_0}{r} \left[\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right) - \frac{2V}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right]$$

$$= - \frac{V^2}{r^2 c^2} \frac{\partial \rho}{\partial \theta}$$

$$\left(\frac{\rho_0}{r} + \frac{d\rho_0}{dr} \right) \left[\frac{Dv}{Dt} + \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) u \right] + \rho_0 \left\{ \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{d}{dr} \left(\frac{V}{r} \right) \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{dW}{dr} \frac{\partial v}{\partial z} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) u \right] \right\} - \frac{\rho_0}{r} \left[\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right) - \frac{2V}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] = - \frac{V^2}{r^2 c^2} \frac{\partial \rho}{\partial \theta}$$

soit encore :

$$\rho_0 \left\{ \frac{D}{Dt} \left(\frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) \frac{u}{r} + \frac{d}{dr} \left(\frac{V}{r} \right) \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{dW}{dr} \frac{\partial v}{\partial z} + \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial r} \right.$$

$$\left. + \left(\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} - \frac{V}{r^2} \right) u + \frac{2V}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right\} + \frac{d\rho_0}{dr} \left[\frac{Dv}{Dt} + \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) u \right] = - \frac{V^2}{r^2 c^2} \frac{\partial \rho}{\partial \theta}$$

$$\rho_0 \left\{ \frac{D}{Dt} \left(\frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{1}{r} \frac{dV}{dr} + \frac{V}{r^2} \right) \frac{\partial v}{\partial \theta} + \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{dW}{dr} \frac{\partial v}{\partial z} \right.$$

$$\left. + \left[\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} \right] u \right\} = - \frac{V^2}{r^2 c^2} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta}$$

En définitive le champ tourbillonnaire obéit aux équations :

$$\frac{D\omega_r}{Dt} = \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} u$$

$$\frac{D\omega_\theta}{Dt} = \frac{2V}{r} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{d^2 W}{dr^2} u + \frac{dW}{dr} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{d}{dr} \left(\frac{V}{r} \right) \frac{\partial w}{\partial \theta} + \left(\frac{V^2}{r c^2} - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} \right) \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

$$\frac{D\omega_z}{Dt} = - \left(\frac{V}{r} + \frac{dV}{dr} \right) \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] - \frac{dW}{dr} \frac{\partial v}{\partial z} - \left(\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} \right) u$$

$$- \left(\frac{V^2}{r c^2} - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta}$$

L'équation d'énergie du champ moyen s'écrit ici :

$$\frac{dP_0}{dr} - c_0^2 \frac{d\rho_0}{dr} = \rho_0 \frac{V^2}{r} - c_0^2 \frac{d\rho_0}{dr} = 0$$

Par conséquent les termes en $\frac{\partial P}{\partial z}$ et $\frac{\partial P}{\partial \theta}$ disparaissent des équations.

On obtient enfin :

$$\begin{aligned} \frac{D\omega_r}{Dt} &= \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} u \\ \frac{D\omega_\theta}{Dt} &= 2 \frac{V}{r} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{d^2 W}{dr^2} u + \frac{dW}{dr} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{d}{dr} \left(\frac{V}{r} \right) \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ \frac{D\omega_z}{Dt} &= - \left(\frac{V}{r} + \frac{dV}{dr} \right) \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] - \frac{dW}{dr} \frac{\partial v}{\partial z} - \left(\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} \right) u \end{aligned}$$

Ce qui est remarquable dans ces équations c'est que lorsqu'on considère un écoulement moyen irrotationnel, c'est-à-dire tel que W soit constant et $V(r) = \frac{\Gamma}{r}$ où Γ est une constante, les termes $\left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right)$, $\left(\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} \right)$ s'annulent, et l'on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{D\omega_r}{Dt} &= 0 \\ \frac{D\omega_\theta}{Dt} &= - \frac{2\Gamma}{r^2} \omega_r \\ \frac{D\omega_z}{Dt} &= 0 \end{aligned}$$

Dans un tel écoulement la fluctuation de vitesse reste elle-même irrotationnelle à partir d'un état initial irrotationnel.

Equation de la pression

Elle s'obtient par la divergence de l'équation de quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \left[\frac{D u}{D t} - \frac{2V}{r} v - \frac{V^2}{\rho_0 c^2} P + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{D v}{D t} + \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) u + \frac{1}{\rho_0 r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{D w}{D t} + \frac{dW}{dr} u + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} \right] = 0 \\ & \frac{D}{D t} \left[\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \frac{d}{dr} \left(\frac{V}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{dW}{dr} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{2V}{r^2} v - \frac{V^2}{\rho_0 r^2 c^2} P \\ & + \frac{1}{\rho_0 r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{2V}{r} v - \frac{V^2}{\rho_0 c^2} P \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) u + \frac{1}{\rho_0 r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{dW}{dr} u + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} \right] = 0 \end{aligned}$$

D'après l'équation de continuité :

$$\frac{D}{D t} \left[\frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{D P}{D t} \right] + \frac{D}{D t} (\operatorname{div} \vec{v}) + \frac{D}{D t} \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} u \right) = 0$$

On déduit la relation :

$$\frac{D}{D t} (\operatorname{div} \vec{v}) = - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} \frac{D u}{D t} - \frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{D^2 P}{D t^2}$$

Il vient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right] - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} \frac{D u}{D t} - \frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{D^2 P}{D t^2} + 2 \frac{dW}{dr} \frac{\partial u}{\partial z} \\ & - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{2V}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} v - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{V^2 P}{\rho_0 c^2} \right] = 0 \end{aligned}$$

Le premier crochet est l'expression du Laplacien ΔP .

L'équation se réécrit alors :

$$\begin{aligned} & \Delta P - \frac{1}{c^2} \frac{D^2 P}{D t^2} = \frac{d\rho_0}{dr} \frac{D u}{D t} - 2 \rho_0 \frac{dW}{dr} \frac{\partial u}{\partial z} \\ & + \frac{2\rho_0}{r} \left[\frac{dV}{dr} \left(v - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + V \frac{\partial v}{\partial r} \right] + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\rho_0}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{V^2 P}{\rho_0 c^2} \right] \end{aligned}$$

Ce n'est plus une équation d'ondes homogène comme celle qu'on obtenait en l'absence d'écoulement tournant.

ANNEXE III - RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DE L'ÉCOULEMENT TOURNANT
PAR LA MÉTHODE SPECTRALE.

Nous regroupons ici les calculs de transformée de Fourier permettant d'obtenir les équations radiales sur la perturbation de vitesse radiale u et de pression p . Les mêmes notations sont utilisées pour les quantités réelles et leurs transformées.

Transformée de Fourier des équations

L'application d'une triple transformée de Fourier $(\theta, z, t) \rightarrow (r, k, \omega)$ à l'équation de la pression fournit une équation différentielle ordinaire du second ordre à coefficients non constants, sur l'inconnue p , de variable r .

Les calculs étant compliqués il est souhaitable d'opérer à partir des équations du champ :

continuité :

$$-\frac{i\lambda}{c_0^2} p + \left[\frac{u}{r} + \frac{du}{dr} - \frac{in}{r} v - ik w \right] \rho_0 + \frac{d\rho_0}{dr} u = 0 \quad \lambda = \omega + kW + \frac{nV}{r}$$

quantité de mouvement :

$$-\rho_0 \left[i\lambda u + \frac{2V}{r} v \right] = \frac{V^2}{rc_0^2} p - \frac{dp}{dr}$$

$$-\rho_0 \left[i\lambda v - \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) u \right] = \frac{in}{r} p$$

$$-\rho_0 \left[i\lambda w - \frac{dW}{dr} u \right] = ikp$$

Les composantes v et w s'expriment en fonction de u et p :

$$w = -\frac{k}{\lambda \rho_0} p - \frac{i}{\lambda} \frac{dW}{dr} u$$

$$v = \frac{-i}{\lambda} \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) u - \frac{n}{\lambda \rho_0 r} p$$

On peut donc les éliminer pour obtenir un système de deux équations différentielles sur u et p .

$$\begin{aligned} \frac{-i\lambda}{\rho_0 c_0^2} p + \frac{u}{r} + \frac{du}{dr} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} u - \frac{n}{\lambda r} \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) u + \frac{i n^2}{\lambda \rho_0 r^2} p + \frac{i k^2}{\lambda \rho_0} p \\ - \frac{k}{\lambda} \frac{dW}{dr} u = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{dp}{dr} - \frac{V^2}{\rho_0 r c_0^2} p - i\lambda u + \frac{2iV}{\lambda r} \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) u + \frac{2nV}{\lambda \rho_0 r^2} p = 0$$

soit :

$$\frac{dp}{dr} + \left[\frac{2nV}{\lambda r^2} - \frac{V^2}{r c_0^2} \right] p = i \rho_0 \left[\lambda - \frac{2V}{\lambda r} \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) \right] u$$

ce qu'on écrit :

$$\frac{dp}{dr} + \left[\frac{2nV}{\lambda r^2} - \frac{V^2}{r c_0^2} \right] p = \frac{i \rho_0}{\lambda} D u \quad \text{avec} \quad D = \lambda^2 - \frac{2V}{r} \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right)$$

Cette première relation fournit un lien entre la pression et la vitesse radiale. La seconde s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dr} + \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} - \frac{n}{\lambda r} \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) - \frac{k}{\lambda} \frac{dW}{dr} \right] u \\ + \frac{i}{\lambda \rho_0} \left[\frac{n^2}{r^2} + k^2 - \frac{\lambda^2}{c_0^2} \right] p = 0 \end{aligned}$$

La première présente l'intérêt d'aider à traduire directement les conditions aux limites de rigidité du conduit annulaire de rayon intérieur r_1 et de rayon extérieur r_2 :

$$u = 0 \quad \text{en} \quad r_1, r_2$$

c'est-à-dire :

$$\frac{dp}{dr} + \left[\frac{2nV}{\lambda r^2} - \frac{V^2}{r c_0^2} \right] p = 0 \quad \text{en} \quad r_1 \text{ et } r_2 \quad \text{pourvu que } D \text{ soit non nul.}$$

L'équation de la pression s'obtient maintenant par élimination de la vitesse radiale.

En supposant D non nul, on a :

$$u = \frac{-i\lambda}{\rho_0 D} \left\{ \frac{dp}{dr} + \left(\frac{2nV}{\lambda r^2} - \frac{V^2}{rc^2} \right) p \right\}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{du}{dr} = & \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} - \frac{k}{\lambda} \frac{dW}{dr} - \frac{n}{\lambda r} \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) \right] \frac{i\lambda}{\rho_0 D} \left[\frac{dp}{dr} + \left(\frac{2nV}{\lambda r^2} - \frac{V^2}{rc^2} \right) p \right] \\ & + \frac{i}{\lambda \rho_0} \left[\frac{\lambda^2}{c^2} - k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right] p \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{d^2 p}{dr^2} + \left[\frac{2nV}{\lambda r^2} - \frac{V^2}{rc^2} \right] \frac{dp}{dr} + \frac{d}{dr} \left[\frac{2nV}{\lambda r^2} - \frac{V^2}{rc^2} \right] p \\ = \frac{i\rho_0 D}{\lambda} \frac{du}{dr} + i \frac{d}{dr} \left(\frac{\rho_0 D}{\lambda} \right) u \end{aligned}$$

$$\frac{i\rho_0 D}{\lambda} \frac{du}{dr} = - \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} - \frac{k}{\lambda} \frac{dW}{dr} - \frac{n}{\lambda r} \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) \right] \frac{dp}{dr}$$

$$- \left\{ \left(\frac{2nV}{\lambda r^2} - \frac{V^2}{rc^2} \right) \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} - \frac{k}{\lambda} \frac{dW}{dr} - \frac{n}{\lambda r} \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) \right] + \frac{D}{\lambda^2} \left[\frac{\lambda^2}{c^2} - k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right] \right\} p$$

D'où l'équation du second ordre en p :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 p}{dr^2} + \left\{ \left(\frac{2nV}{\lambda r^2} - \frac{V^2}{rc^2} \right) + \frac{1}{r} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} - \frac{k}{\lambda} \frac{dW}{dr} - \frac{n}{\lambda r} \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) - \frac{\lambda}{\rho_0 D} \frac{d}{dr} \left(\frac{\rho_0 D}{\lambda} \right) \right\} \frac{dp}{dr} \\ + \left\{ \frac{d}{dr} \left(\frac{2nV}{\lambda r^2} - \frac{V^2}{rc^2} \right) + \left(\frac{2nV}{\lambda r^2} - \frac{V^2}{rc^2} \right) \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} - \frac{k}{\lambda} \frac{dW}{dr} - \frac{n}{\lambda r} \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{D}{\lambda^2} \left(\frac{\lambda^2}{c^2} - k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) - \frac{\lambda}{\rho_0 D} \frac{d}{dr} \left(\frac{\rho_0 D}{\lambda} \right) \left(\frac{2nV}{\lambda r^2} - \frac{V^2}{rc^2} \right) \right\} p = 0 \end{aligned}$$

Il reste à simplifier les coefficients fonctionnels.

Commençons par le coefficient de $\frac{dp}{dr}$.

$$\frac{\lambda}{\rho_0 D} \frac{d}{dr} \left(\frac{\rho_0 D}{\lambda} \right) = \frac{\lambda}{\rho_0} \frac{d}{dr} \left(\frac{\rho_0}{\lambda} \right) + \frac{1}{D} \frac{dD}{dr} = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} + \frac{1}{D} \frac{dD}{dr} - \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dr}$$

Par conséquent le gradient de densité moyenne disparaît du calcul.

$$\frac{d\lambda}{dr} = \frac{n}{r} \frac{dV}{dr} - \frac{nV}{r^2} \quad . \text{ Le coefficient s'écrit donc :}$$

$$\frac{1}{r} - \frac{V^2}{rc^2} - \frac{k}{\lambda} \frac{dW}{dr} - \frac{1}{D} \frac{dD}{dr}$$

Le coefficient de p est plus compliqué. Pour la même raison que précédemment les termes en :

$$\left(\frac{2nV}{\lambda r^2} - \frac{V^2}{rc^2} \right) \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} \quad \text{s'éliminent.}$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{2nV}{\lambda r^2} - \frac{V^2}{rc^2} \right) = - \frac{4nV}{\lambda r^3} + \frac{2n}{\lambda r^2} \frac{dV}{dr} - \frac{2nV}{\lambda^2 r^2} \frac{d\lambda}{dr} - \frac{d}{dr} \left(\frac{V^2}{rc^2} \right)$$

D'où :

$$\begin{aligned} & \frac{2n}{\lambda r^2} \frac{dV}{dr} - \frac{4nV}{\lambda r^3} - \frac{2nV}{\lambda^2 r^2} \frac{d\lambda}{dr} - \frac{d}{dr} \left(\frac{V^2}{rc^2} \right) + \frac{D}{\lambda^2} \left(\frac{\lambda^2}{c^2} - k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \\ & + \left[\frac{1}{r} - \frac{k}{\lambda} \frac{dW}{dr} - \frac{n}{\lambda r} \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) + \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dr} - \frac{1}{D} \frac{dD}{dr} \right] \left(\frac{2nV}{\lambda r^2} - \frac{V^2}{rc^2} \right) \end{aligned}$$

Les termes en $\frac{2nV}{\lambda^2 r^2} \frac{d\lambda}{dr}$ s'éliminent :

$$\frac{D}{\lambda^2} \left(\frac{\lambda^2}{c^2} - k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) = \frac{D}{\lambda^2} \left(\frac{\lambda^2}{c^2} - k^2 \right) - \frac{n^2}{r^2} + \frac{2n^2 V}{\lambda^2 r^3} \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right)$$

Les termes en $\frac{2n^2 V}{\lambda^2 r^3} \frac{dV}{dr}$ s'éliminent également.

$$\begin{aligned} \text{Il reste :} & \quad \frac{2nV}{\lambda r^2} \left[\frac{1}{r} - \frac{k}{\lambda} \frac{dW}{dr} - \frac{nV}{\lambda r^2} - \frac{1}{D} \frac{dD}{dr} - \frac{2}{r} + \frac{1}{V} \frac{dV}{dr} + \frac{nV}{\lambda r^2} + \frac{V^2}{rc^2} \right] \\ & - \frac{d}{dr} \left(\frac{V^2}{rc^2} \right) - \frac{V^2}{rc^2} \left[\frac{1}{r} - \frac{k}{\lambda} \frac{dW}{dr} - \frac{1}{D} \frac{dD}{dr} \right] + \frac{D}{\lambda^2} \left(\frac{\lambda^2}{c^2} - k^2 \right) - \frac{n^2}{r^2} \end{aligned}$$

Soit encore :

$$-\frac{2nV}{\lambda r^2} \left[\frac{1}{r} + \frac{k}{\lambda} \frac{dW}{dr} + \frac{1}{D} \frac{dD}{dr} - \frac{1}{V} \frac{dV}{dr} - \frac{V^2}{rc_0^2} \right] + \frac{V^2}{rc_0^2} \left[\frac{k}{\lambda} \frac{dW}{dr} + \frac{1}{D} \frac{dD}{dr} \right] \\ - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{V^2}{c_0^2} \right) + \frac{D}{\lambda^2} \left(\frac{\lambda^2}{c_0^2} - k^2 \right) - \frac{n^2}{r^2}$$

ou

$$\frac{D}{\lambda^2} \left(\frac{\lambda^2}{c_0^2} - k^2 \right) - \frac{n^2}{r^2} - \frac{2nV}{\lambda r^2} \left[\frac{1}{r} + \frac{k}{\lambda} \frac{dW}{dr} + \frac{1}{D} \frac{dD}{dr} - \frac{1}{V} \frac{dV}{dr} - \frac{V^2}{rc_0^2} \right] \\ + \frac{V^2}{rc_0^2} \frac{dc_0^2}{dr} + \frac{V^2}{rc_0^2} \left[\frac{k}{\lambda} \frac{dW}{dr} + \frac{1}{D} \frac{dD}{dr} - \frac{2}{V} \frac{dV}{dr} \right]$$

Il est possible de remplacer la dérivée $\frac{dc_0^2}{dr}$ par d'autres quantités par souci d'homogénéité des écritures.

En effet :

$$\frac{dc_0^2}{dr} = \frac{\gamma}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} - \frac{\gamma \rho_0}{\rho_0^2} \frac{d\rho_0}{dr} = \frac{\gamma-1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} = (\gamma-1) \frac{V^2}{r}$$

Le dernier terme du dernier coefficient s'écrit alors :

$$\frac{V^2}{rc_0^2} \left[\frac{k}{\lambda} \frac{dW}{dr} + \frac{1}{D} \frac{dD}{dr} - \frac{2}{V} \frac{dV}{dr} + (\gamma-1) \frac{V^2}{rc_0^2} \right]$$

et l'équation radiale de la pression :

$$\frac{d^2 p}{dr^2} + \left[\frac{1}{r} \left(1 - \frac{V^2}{c_0^2} \right) - \frac{k}{\lambda} \frac{dW}{dr} - \frac{1}{D} \frac{dD}{dr} \right] \frac{dp}{dr} \\ + \left\{ \frac{D}{\lambda^2} \left(\frac{\lambda^2}{c_0^2} - k^2 \right) - \frac{n^2}{r^2} - \frac{2nV}{\lambda r^2} \left[\frac{1}{r} + \frac{k}{\lambda} \frac{dW}{dr} + \frac{1}{D} \frac{dD}{dr} - \frac{1}{V} \frac{dV}{dr} - \frac{V^2}{rc_0^2} \right] \right. \\ \left. + \frac{V^2}{rc_0^2} \left[\frac{k}{\lambda} \frac{dW}{dr} + \frac{1}{D} \frac{dD}{dr} - \frac{2}{V} \frac{dV}{dr} + (\gamma-1) \frac{V^2}{rc_0^2} \right] \right\} p = 0$$

Cas particulier d'un écoulement de rotation solide

Dans ce cas, on a $W(r) = W_0$ et $V(r) = \Omega r$, W_0 et Ω constantes.
Il s'ensuit que :

$$\frac{dW}{dr} = 0 \quad D = \lambda^2 - 4\Omega^2 \quad \frac{dD}{dr} = 0$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 p}{dr^2} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c_0^2} \right) \frac{dp}{dr} + \\ + \left[\left(1 - \frac{4\Omega^2}{\lambda^2} \right) \left(\frac{\lambda^2}{c_0^2} - k^2 \right) - \frac{n^2}{r^2} - \frac{2n\Omega}{\lambda r} \left(-\frac{\Omega r}{c_0^2} \right) + \frac{\Omega^2 r}{c_0^2} \left(\frac{-2}{r} + (\gamma-1) \frac{\Omega^2 r}{c_0^2} \right) \right] p = 0 \end{aligned}$$

soit :

$$(1) \frac{d^2 p}{dr^2} + \left[\frac{1}{r} - \frac{\Omega^2 r}{c_0^2} \right] \frac{dp}{dr} + \left[\left(1 - \frac{4\Omega^2}{\lambda^2} \right) \left(\frac{\lambda^2}{c_0^2} - k^2 \right) + \frac{2n\Omega^3}{\lambda c_0^2} - \frac{2\Omega^2}{c_0^2} + (\gamma-1) \frac{\Omega^4 r^2}{c_0^4} - \frac{n^2}{r^2} \right] p = 0$$

Cette équation est assez compliquée à résoudre du fait que c_0 n'est pas constant.

Cependant, pour un cas de faible rotation : $\Omega^2 r^2 \ll c_0^2$
on peut se ramener à l'équation suivante :

$$\frac{d^2 p}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp}{dr} + \left[\left(1 - \frac{4\Omega^2}{\lambda^2} \right) \left(\frac{\lambda^2}{c_0^2} - k^2 \right) - \frac{n^2}{r^2} \right] p = 0$$

en considérant que c_0 est constant. Dans ce cas les effets premiers de la rotation existent de par le terme constant du coefficient en p :

$$\Lambda = \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\lambda^2} \right) \left(\frac{\lambda^2}{c_0^2} - k^2 \right)$$

L'équation est simplement l'équation de Bessel.

Cependant dans la pratique la rotation peut être plus importante. De plus pour de faibles valeurs de λ , certains termes qu'on a négligés peuvent être significatifs. Nous nous proposons d'écrire une équation intermédiaire entre l'équation de Bessel et l'équation (1) en cherchant un développement des termes en $\frac{1}{c^2}$ à l'ordre 1 en fonction du petit paramètre :

$$\varepsilon = \frac{\Omega^2 r^2}{c^2} \quad \text{avec} \quad c_0^2 = c^2 + \frac{\gamma-1}{2} \Omega^2 r^2$$

$$c_0^2 = c^2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \varepsilon \right)$$

L'équation s'écrit alors :

$$\frac{d^2 p}{dr^2} + \frac{1}{r} \left[1 - \varepsilon \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} \varepsilon \right) \right] \frac{dp}{dr} + \left[\left(1 - \frac{4\Omega^2}{\lambda^2} \right) \left(\frac{\lambda^2}{c^2} \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} \varepsilon \right) - k^2 \right) \right. \\ \left. + \frac{2\Omega^2}{c^2} \left(\frac{n\Omega}{\lambda} - 1 \right) \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} \varepsilon \right) - \frac{n^2}{r^2} + \frac{\gamma-1}{c^4} \Omega^4 r^2 \left(1 - (\gamma-1) \varepsilon \right) \right] p = 0$$

au second ordre, en tenant compte de ce qui a été dit ci-dessus, nous obtenons :

$$\frac{d^2 p}{dr^2} + \left[\frac{1}{r} - \frac{\Omega^2 r}{c^2} \right] \frac{dp}{dr} + \left[\left(1 - \frac{4\Omega^2}{\lambda^2} \right) \left(\frac{\lambda^2}{c^2} - k^2 \right) + \frac{2\Omega^2}{c^2} \left(\frac{n\Omega}{\lambda} - 1 \right) \right. \\ \left. - \frac{n^2}{r^2} - \frac{\gamma-1}{2} \left\{ \left(\frac{\lambda^2}{c^2} - \frac{4\Omega^2}{c^2} \right) + \frac{2\Omega^2}{c^2} \left(\frac{n\Omega}{\lambda} - 1 \right) \right\} \frac{\Omega^2 r^2}{c^2} \right] p = 0$$

Le dernier terme du crochet peut être encore simplifié :

$$\frac{d^2 p}{dr^2} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2} \right) \frac{dp}{dr} \\ + \left[\left(1 - \frac{4\Omega^2}{\lambda^2} \right) \left(\frac{\lambda^2}{c^2} - k^2 \right) + \frac{2\Omega^2}{c^2} \left(\frac{n\Omega}{\lambda} - 1 \right) - \frac{n^2}{r^2} - \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{\lambda^2}{c^2} + \frac{2n\Omega^3}{\lambda c^2} \right) \frac{\Omega^2 r^2}{c^2} \right] p = 0$$

N.B. : C est une constante provenant de l'intégration de la loi :

$$\frac{dc^2}{dr} = (\gamma-1) \frac{v^2}{r}$$

L'intérêt de cette équation est multiple.

- c'est d'abord une approximation meilleure que l'équation de Bessel, d'autant plus qu'elle est valable pour n'importe quelle valeur, petite ou grande, de λ .
- Elle a un comportement assez proche de celui de l'équation de Bessel en ce qui concerne la relation de dispersion définie ici par :

$$\Lambda_i(\lambda) = \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\lambda^2}\right) \left(\frac{\lambda^2}{c^2} - k_i^2\right) + \frac{2\Omega^2}{c^2} \left(\frac{n\Omega}{\lambda} - 1\right)$$

- Elle admet enfin une solution analytique.

Cette contribution prolonge le travail de Kerrebrock, qui traitait le cas de l'équation de Bessel (ordre 0 en ϵ), sur la variable p (1974). L'équation a la forme :

$$\frac{d^2 p}{dr^2} + \left[\frac{1}{r} - \frac{\Omega^2 r}{c^2} \right] \frac{dp}{dr} + \left[\Lambda - \frac{n^2}{r^2} + \alpha r^2 \right] p = 0$$

avec :

$$\alpha = -\frac{\gamma-1}{2} \frac{\Omega^2}{c^2} \left(\frac{\lambda^2}{c^2} + \frac{2n\Omega^3}{\lambda c^2} \right)$$

Recherche d'une solution analytique de l'équation de rotation solide à l'ordre 1

Cette équation s'écrit :

$$\frac{d^2 p}{dr^2} + \left[\frac{1}{r} - \frac{\Omega^2 r}{c^2} \right] \frac{dp}{dr} + \left[\Lambda - \frac{n^2}{r^2} + \alpha r^2 \right] p = 0$$

En effectuant le changement de variables $p = fq$, avec $F = e^{\frac{\Omega^2 r^2}{4c^2}}$, il vient :

$$\frac{d^2 q}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dq}{dr} + \left[\Lambda + \frac{\Omega^2}{c^2} - \frac{n^2}{r^2} + \left(\alpha - \frac{\Omega^4}{4c^4} \right) r^2 \right] q = 0$$

Si l'on pose $K = \Lambda + \frac{\Omega^2}{c^2}$

et $A = \alpha - \frac{\Omega^4}{4c^4}$

L'équation s'écrit :

$$\frac{d^2 q}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dq}{dr} + \left[K - \frac{n^2}{r^2} + Ar^2 \right] q = 0$$

• Cas $A < 0$

L'équation se réécrit alors :

$$\frac{d^2 q}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dq}{dr} + \left[K - \frac{n^2}{r^2} - Cr^2 \right] q = 0$$

et le changement de variables $\rho = Cr^2$ donne la nouvelle équation :

$$\rho \frac{d^2 q}{d\rho^2} + \frac{dq}{d\rho} + \left[\frac{K}{4C} - \frac{n^2}{4\rho} - \frac{\rho}{4} \right] q = 0$$

cette équation est résolue par Landau et Lifchitz dans "Mécanique Quantique" (1971).

En posant $q = e^{-\rho/2} \varphi$ on trouve :

$$\rho \frac{d^2 \varphi}{d\rho^2} + (1-\rho) \frac{d\varphi}{d\rho} + \left[\frac{K}{4C} - \frac{1}{2} - \frac{n^2}{4\rho} \right] \varphi = 0$$

Le nouveau changement $\varphi = \rho^{n/2} f$ permet enfin d'aboutir à l'équation de Kummer :

$$\rho \frac{d^2 f}{d\rho^2} + (n+1-\rho) \frac{df}{d\rho} + \left(\frac{K}{4C} - \frac{n+1}{2} \right) f = 0$$

qui admet la solution : $M \left(\frac{n+1}{2} - \frac{K}{4C} ; n+1 ; \rho \right)$

- M est une combinaison de fonctions hypergéométriques dégénérées dont les coefficients sont imposés par les conditions aux limites.

(Abramowicz M. et Stegun I.A., 1965).

d'où

$$p \approx c^{n/2} r^n e^{\left(\frac{\Omega^2}{4c^2} - \frac{C}{2}\right)r^2} M\left(\frac{n+1}{2} - \frac{K}{4C}; n+1; Cr^2\right)$$

- Cas $A > 0$

Le raisonnement précédent est valable, en remplaçant C par le nombre complexe iC :

$$\frac{d^2q}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dq}{dr} + \left[K - \frac{n^2}{r^2} - (iC)^2 r^2 \right] q = 0$$

On obtient :

$$\hat{p} \approx (iC)^{n/2} r^n e^{\left(\frac{\Omega^2}{4c^2} - \frac{iC}{2}\right)r^2} M\left(\frac{n+1}{2} - \frac{K}{4iC}; n+1; iCr^2\right)$$

Cette fonction complexe est solution de l'équation réelle de départ. Par conséquent sa partie réelle est la solution cherchée lorsque A est positif.

Singularité $A = 0$

L'équation se ramène à une équation de Bessel

$$\frac{d^2q}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dq}{dr} + \left[K - \frac{n^2}{r^2} \right] q = 0$$

NOM : ROGER (avec précision du nom de jeune fille, le cas échéant)		DATE de SOUTENANCE
Prénoms : Michel		22 Juin 1983
TITRE : Bruit à large bande des compresseurs double flux : rôle éventuel des ondes inertielles liées aux écoulements tournants.		
NATURE :		Numéro d'ordre : ECL 83-04
DOCT. d'UNIV.	DOCTEUR- INGENIEUR	DOCTORAT D'ETAT
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
DOCTORAT de 3e CYCLE		Spécialité :
<input type="checkbox"/>		
Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis		CLASSE :
RÉSUMÉ : La présente étude, entreprise à la suite d'une demande de la SNECMA, porte sur un type d'émission sonore inhabituel des compresseurs double flux de l'aéronautique. Le phénomène appelé "bruit de bosse" est essentiellement caractérisé par des remontées du bruit à large bande privilégiant des fréquences différentes de celles imposées par la rotation de la machine (harmoniques de la fréquence de passage des pales). Des comportements semblables sont aussi signalés dans la littérature internationale. Un mécanisme non classique de génération de bruit a été recherché dans les ondes inertielles de pression prenant naissance dans le circuit secondaire du compresseur, au sein de l'écoulement tournant engendré par la soufflante. La rotation du fluide y est en effet importante. Une analyse modale a été développée. La relation de dispersion des ondes de pression dans le conduit annulaire a été établie et elle permet de distinguer effectivement deux modes de propagation, le mode acoustique et le mode inertiel. Différents cas de rotation sont considérés pour approcher le régime réel (tourbillon libre, rotation solide, ou leur association). Les liaisons possibles avec le "bruit de bosse" sont suggérées. <u>Publications</u> - 8ème Colloque d'Acoustique Aéronautique (Toulouse, 1982) - 8ème Forum Européen de Turbomachines (Aix-en-Provence, 1982) - 9ème Congrès Canadien de Mécanique Appliquée (Saskatoon, 1983) - 11ème Congrès International d'Acoustique (Paris, 1983) - Congrès FASE/DAGA (Göttingen, 1982)		
MOTS-CLES : BRUIT - COMPRESSEURS - ECOULEMENTS TOURNANTS		
Laboratoire (s) de recherches : ACOUSTIQUE - Ecole Centrale de Lyon		
Directeur de recherches : Henri-Simon ARBEY		
Président de jury : G. COMTE-BELLOT, Professeur		
Composition du jury : J. BATAILLE, M. SUNYACH, B. JUBELIN, B. POIREE, H. ARBEY.		

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'article 3 de l'arrêté du 16 avril 1974,

Vu le rapport de présentation de Mademoiselle
Messieurs

COMTE-BELLOT
BATAILLE
SUNYACH
JUBELIN
POIREE
ARBEY

Monsieur **ROGER Michel**

est autorisé à présenter une soutenance de thèse pour l'obtention du titre de **DOCTEUR INGENIEUR, Spécialité Acoustique.**

Fait à Ecully, le 3 juin 1983

Le Directeur de l'E.C.L.


A. MOROUX

1

+

ECOLE CENTRALE DE LYON Bibliothèque

Ouvrage à rendre le :

17 NOV 1950





ECL - LYON



005906