

10ème Congrès Français d'Acoustique

Lyon, 12-16 Avril 2010

Méthodes de réduction numérique pour l'analyse de modèles aéroacoustiques linéarisés

Gilles Serre¹, Philippe Lafon¹, Xavier Gloerfelt², Christophe Bailly³

¹ LaMSID, 1 Avenue du Général de Gaulle, 92141 Clamart Cedex, gilles.serre@edf.fr

² Laboratoire de Simulation Numérique en Mécanique des Fluides, ENSAM, 151 Boulevard de L'Hopital, 75013 Paris, France

³ Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, 36 Av Guy de Collongue, 69134 Ecully Cedex, France

L'objectif de cette présentation est l'analyse et la comparaison de plusieurs approches numériques émergentes visant à réduire de manière drastique la dimension d'un modèle physique numérique. Cette étude est effectuée dans un premier temps sur des configurations simples à l'aide des techniques POD (*Proper Orthogonal Decomposition*) et *balanced-POD*. Un cas critique pour lequel la construction d'un système réduit nécessite une grande précaution sur le plan numérique est examiné. Cette exemple est l'occasion d'illustrer les limites fondamentales des méthodes équilibrées et l'importance de la formulation mathématique du modèle physique lorsqu'une projection de type Galerkin est employée. Cette problématique de réduction repose sur la volonté industrielle de prédire à moindre coût la réponse des modèles lorsque certains paramètres de conception varient ou bien la réponse de couplages mécano-acoustiques variés.

1 Introduction

La construction de modèles numériques réduits est devenu un enjeu industriel très important. Le but de la réduction de modèle numérique est de construire des systèmes dynamiques de très faible dimension à partir de données issues de simulations numériques haute-fidélité. Ces simulations haute-fidélité, obtenues à l'aide de codes industriels ou de recherche, nécessitent en général des calculs basés sur plusieurs millions de degrés de liberté. C'est le cas en dynamique des fluides et plus particulièrement dans les problèmes aéroacoustiques numériques qui nous intéressent. Une telle dimension impose des délais de résultats trop importants si l'on souhaite optimiser, contrôler ou encore comprendre certains mécanismes physiques impliquant des études paramétriques avec un temps de retour raisonnable. La question qui se pose alors est de savoir s'il est possible d'exploiter des données issues de quelques calculs complets pour induire un modèle de très faible dimension (quelques dizaines ou centaines de degrés de liberté tout au plus) qui soit valable dans d'autres configurations plus ou moins proches.

Le passage d'un modèle haute-fidélité à un modèle réduit est cependant une étape très délicate sur le plan numérique. Des problèmes de consistance et d'instabilité émergent. Pour cette raison, plusieurs validations intermédiaires sont nécessaires avant de concrétiser des applications. En particulier, le modèle réduit doit :

1. savoir reproduire parfaitement les données issues du modèle complet ;
2. assurer des propriétés numériques comme la stabilité à long terme ;
3. assurer une fiabilité sur une gamme de paramètres d'intérêt.

Le premier point est relativement bien maîtrisé maintenant. Il est encore rencontré des difficultés pour le deuxième *item* que les modèles mathématiques soient linéaires ou non. Enfin, le troisième point est probablement le plus grand défi de la recherche des prochaines décennies sur le sujet. Ces différentes problématiques seront introduites au cours de cet exposé avec le modèle d'Euler linéarisé qui est à la base des méthodes de simulation aéroacoustique hybrides.

2 Modèle physique

Parmi les différentes méthodes de calcul direct du bruit, se distinguent les méthodes basées sur la résolution des équations de Navier-Stokes compressibles et celles basées sur la résolution d'équations formulées directement sur les quantités fluctuantes. Nous nous plaçons ici dans ce dernier cadre.

2.1 Points intérieurs

Les équations d'Euler sont linéarisées autour d'une solution stationnaire $(\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{p})$. Les perturbations (ρ, u, v, p) sont exprimées en formulation non conservative et en coordonnées cartésiennes bidimensionnelles. Elles peuvent s'écrire par exemple sous la forme

$$\partial_t \mathbf{q} + A_1 \partial_x \mathbf{q} + A_2 \partial_y \mathbf{q} + A_3 \mathbf{q} = \mathbf{s}, \quad (1)$$

avec

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{Bmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{p} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{u} & 0 & 1/\bar{\rho} \\ 0 & 0 & \bar{u} & 0 \\ 0 & \gamma \bar{p} & 0 & \bar{u} \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \bar{v} & 0 & \bar{\rho} & 0 \\ 0 & \bar{v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{v} & 1/\bar{\rho} \\ 0 & 0 & \gamma\bar{p} & \bar{v} \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} \partial_x \bar{u} + \partial_y \bar{v} & \partial_x \bar{\rho} & \partial_y \bar{\rho} & 0 \\ (\bar{u}\partial_x \bar{u} + \bar{v}\partial_y \bar{u})/\bar{\rho} & \partial_x \bar{u} & \partial_y \bar{u} & 0 \\ (\bar{u}\partial_x \bar{v} + \bar{v}\partial_y \bar{v})/\bar{\rho} & \partial_x \bar{v} & \partial_y \bar{v} & 0 \\ 0 & \partial_x \bar{p} & \partial_y \bar{p} & \gamma(\partial_x \bar{u} + \partial_y \bar{v}) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$\gamma = 1.4$ la constante de gaz parfait et $\mathbf{s}$ le terme source. Lorsque le champ de base est uniforme, la matrice des gradients de champ moyen A_3 est nulle et le modèle est grandement simplifié. Les équations d'Euler linéarisées (1) forment un système d'équations aux dérivées partielles hyperbolique et symétrisable. Dans le cas d'un écoulement uniforme, le symétriseur H ($H = H^\dagger > 0$ avec $H^\dagger$ la transposée de H) suivant peut être construit

$$H = \begin{pmatrix} \alpha^2 a & 0 & 0 & -\alpha^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\alpha^2 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}, \quad (3)$$

avec $a = \gamma\bar{p}/\bar{\rho}$, $d = \frac{1}{a}(\alpha^2 + \frac{1}{\bar{\rho}^2})$ et $\alpha > 0$ un paramètre arbitraire. La projection du système (1) sur H lorsque l'écoulement de base est uniforme donne alors

$$\partial_t H\mathbf{q} + HA_1 \partial_x \mathbf{q} + HA_2 \partial_y \mathbf{q} = H\mathbf{s}, \quad (4)$$

avec HA_1 et HA_2 des matrices symétriques. Cette nouvelle formulation du modèle bénéficie de propriétés mathématiques qui peuvent s'avérer cruciales pour construire un système numérique réduit stable par projection de Galerkin [2].

2.2 Points frontières

Dans le cadre de cette étude, on considère seulement des perturbations acoustiques autour d'un écoulement uniforme dans un domaine non borné physiquement. La sortie des ondes acoustiques du domaine de calcul est modélisé à l'aide des conditions de rayonnement acoustique de Tam et Dong [8]. Il s'agit d'une généralisation des conditions de Sommerfeld dans le cas d'un écoulement de base non uniforme. On parle aussi de conditions de non réflexion. Elles s'écrivent en coordonnées cartésiennes

$$\partial_t \mathbf{q} + V(x, y) \left[\frac{x - x_0}{r} \partial_x \mathbf{q} + \frac{y - y_0}{r} \partial_y \mathbf{q} + \frac{1}{2r} \mathbf{q} \right] = 0, \quad (5)$$

avec $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ la distance à une source placée en (x_0, y_0) et $V(x, y)$ la vitesse de groupe, composition de la célérité du son et de la vitesse moyenne locale.

3 Modèle numérique complet

3.1 Traitement des points intérieurs

Les opérateurs aux dérivées spatiales du modèle (1) sont discrétisés à l'aide de différences finies centrées explicites d'ordre 8, par conséquent non dissipatifs.

3.2 Traitement des conditions aux limites

Le modèle des conditions aux limites (5) est introduit sur les 3 derniers points de chaque côté du domaine. À l'approche des frontières, des différences finies décentrées d'ordre 4 sont utilisées.

3.3 Construction du système complet

Une formulation matricielle est adoptée. La construction de la matrice nécessite la vectorisation des grandeurs bidimensionnelles. Le vecteur inconnu $\mathbf{x}$ de taille $N = 4 \times n \times m$ où 4 représente le nombre de grandeurs physiques, n le nombre de points dans la direction x et m le nombre de points dans la direction y est défini. Les degrés de liberté sont ordonnés de la manière suivante : si i représente la position de la i -ème ligne et j la position de la j -ème colonne, un degré de liberté (ddl) à la position (i, j) est repéré par la position $k = n(j - 1) + i$ dans le vecteur $\mathbf{x}$ (à un facteur 4 près de par le nombre de grandeurs physiques définies pour chaque position (i, j)). La semi-discrétisation et la numérotation des ddls adoptées donnent une matrice nonadiagonale par blocs à structure creuse dont chaque bloc est lui-même nonadiagonal. Le système ainsi construit (semi-discrétisé en espace et formulé matriciellement) s'écrit sous la forme

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \quad (6)$$

où $B\mathbf{u}$ est la semi-discrétisation spatiale du terme source $\mathbf{s}$. Ce dernier est supposé s'écrire comme une somme de termes dont les variables temps et espace sont séparables. L'écriture du modèle numérique complet sous cette forme est justifié par le cadre de la théorie du contrôle dans lequel la réduction de modèle numérique linéarisé est bien établie [1].

3.4 Résolution

Le système (6) est un ensemble de N équations différentielles ordinaires. Il est résolu par intégration temporelle. Une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est utilisée.

4 Modèle numérique réduit

4.1 Objectif

Etant donné un système contrôlé de dimension N et de type MIMO (*Multiple Input Multiple Output*)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x} \end{cases}, \quad (7)$$

avec $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^N$ (vecteur d'état), $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $B \in \mathbb{R}^{N \times q}$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^q$ (vecteur entrées), $C \in \mathbb{R}^{p \times N}$ et $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ (vecteur sorties) ; l'objectif est de construire un système réduit de dimension $r \ll N$:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_r &= A_r \mathbf{x}_r + B_r \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= C_r \mathbf{x}_r \end{cases}, \quad (8)$$

avec $\mathbf{x}_r(t) \in \mathbb{R}^r$, $A_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $B_r \in \mathbb{R}^{r \times q}$ et $C_r \in \mathbb{R}^{p \times r}$. La dimension des entrées $\mathbf{u}(t)$ et sorties $\mathbf{y}(t)$ est inchangée.

4.2 Principe de construction

La méthode de troncature est l'approche la plus couramment utilisée pour construire un système réduit. Son principe est le suivant :

- construire l'espace d'approximation $V = (\phi_1, \dots, \phi_r)$, $V \in \mathbb{R}^{N \times r}$, du vecteur d'état : $\mathbf{x} \simeq V\mathbf{x}_r$;
- substituer l'approximation $V\mathbf{x}_r$ dans le modèle numérique haute-fidélité (7), le système est alors surdéterminé ;
- construire l'espace de projection $W = (\psi_1, \dots, \psi_r)$ (orthogonal à V en général) ;
- projeter le système surdéterminé sur W ;
- induire le système réduit (8) de dimension r avec $A_r = W^\dagger A V$, $B_r = W^\dagger B$ et $C_r = C V^\dagger$;
- résoudre le système réduit par intégration temporelle ;
- reformer le vecteur d'état $\mathbf{x}(t) \simeq W^\dagger \mathbf{x}_r(t)$.

Parmi toutes ces étapes, le principal défi concerne la construction des deux sous-espaces V et W . La construction de ces deux sous-espaces représente par ailleurs le principal coût de calcul dans la formation d'un système réduit. Dans le cas d'une projection de Galerkin, il y a identité des deux sous espaces ($V = W$) ce qui implique un coût de construction moindre.

4.3 Gramiens

Les sous-espaces V et W peuvent être calculés de manière efficace à partir des gramien dans l'espace temps.

4.3.1 Définitions

Les gramien finis d'énergie $\mathcal{G}_e$, de contrôlabilité $\mathcal{G}_c$ et d'observabilité $\mathcal{G}_o$ sont respectivement définis par

$$\mathcal{G}_e = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^\dagger dt, \quad (9)$$

$$\mathcal{G}_c = \int_{t_0}^{t_f} e^{A^t} B B^\dagger e^{A^\dagger t} dt, \quad (10)$$

et

$$\mathcal{G}_o = \int_{t_0}^{t_f} e^{A^\dagger t} C^\dagger C e^{A t} dt. \quad (11)$$

Par construction, les gramien sont des matrices symétriques semi-définies positives de dimension $N \times N$. Elles sont donc diagonalisables à l'aide de matrices orthogonales.

4.3.2 Approximation

Les gramien définis ci-dessus s'écrivent sous la forme générale

$$\mathcal{G} = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{f}(t)\mathbf{f}(t)^\dagger dt \quad (12)$$

Cette intégrale peut être approchée numériquement par une méthode de quadrature connaissant un ensemble de

M clichés $\{\mathbf{f}(t_i)\}$, tels que $t_1 = t_0 \leq t_i \leq t_f = t_M$ pour $i \in \{1, \dots, M\}$ et

$$\mathcal{G} \simeq \sum_{i=1}^M \omega_i \mathbf{f}(t_i)\mathbf{f}(t_i)^\dagger = \sum_{i=1}^M \mathbf{g}(t_i)\mathbf{g}(t_i)^\dagger = X X^\dagger, \quad (13)$$

avec $X = \{\mathbf{g}(t_1), \dots, \mathbf{g}(t_M)\}$, $\mathbf{g}(t_i) = \sqrt{\omega_i} \mathbf{f}(t_i)$ et ω_i les poids de quadrature.

4.4 Calcul des modes

La construction d'un système réduit de dimension r est basée sur la détermination des r modes associés aux r plus grandes valeurs propres des gramien. Il s'agit donc de résoudre le problème aux valeurs propres suivant

$$X X^\dagger \phi_i = \lambda_i \phi_i, \quad 1 \leq i \leq r. \quad (14)$$

Il est impossible en pratique de les calculer de cette façon car la matrice $X X^\dagger$ est de dimension $N \times N$. Il est plus adéquat de transformer le problème aux valeurs propres de taille $N \times N$ en un problème aux valeurs propres de taille $M \times M$, lié au nombre de clichés représentatifs. En effet, le nombre de clichés est en général très inférieur au nombre de ddls. Cette transformation dénommée *snapshot-POD* fut introduite par Sirovich [7]. Son principe est le suivant dans le cas d'une approche matricielle. Le problème aux valeurs propres $X^\dagger X \psi_i = \lambda_i \psi_i$ de taille $M \times M$ est d'abord résolu. Par ailleurs, la matrice $X \in \mathbb{R}^{N \times M}$ admet une décomposition aux valeurs singulières (SVD). Dans la méthode SVD, les relations suivantes sont établies

$$X \psi_i = \sqrt{\lambda_i} \phi_i, \quad X^\dagger \phi_i = \sqrt{\lambda_i} \psi_i. \quad (15)$$

Les modes ϕ_i sont alors récupérés à l'aide de la relation

$$\phi_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} X \psi_i. \quad (16)$$

4.4.1 Modes POD

Les modes POD peuvent être calculés à partir du gramien d'énergie dans le cadre d'une approche matricielle ou non. Il est important de noter que les gramien sont calculés par défaut à l'aide d'un produit scalaire L^2 , c'est l'approche classique. D'autres produits scalaires peuvent s'avérer plus pertinents pour améliorer la qualité de l'approximation ou pour obtenir un système réduit stable. Il a notamment été démontré que l'emploi des produits scalaires H [2] et $\mathcal{G}_o$ [6] seraient plus robustes sur ce plan.

4.4.2 Modes équilibrés

La méthode de troncature équilibrée, introduite par Moore [5], est une méthode de réduction des systèmes MIMO linéaires et stables. L'objet de la troncature équilibrée est d'éliminer les états les moins contrôlables et les moins observables simultanément. Les modes équilibrés sont les vecteurs singuliers du produit des gramien de contrôlabilité et d'observabilité $\mathcal{G}_c \mathcal{G}_o$.

Le calcul des clichés correspondant au gramien d'observabilité nécessite la construction de l'opérateur adjoint stationnaire du modèle d'Euler linéarisé. Ce dernier est ici identifié dans le cas d'un écoulement uniforme pour simplifier, par l'équation

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega} [A_1 \partial_x \mathbf{q} + A_2 \partial_y \mathbf{q}] \cdot \mathbf{q}^\dagger d\mathbf{x} \\
&= - \int_{\Omega} \mathbf{q} [\partial_x A_1^\dagger \mathbf{q}^\dagger + \partial_y A_2^\dagger \mathbf{q}^\dagger] d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{q} \cdot A_n \mathbf{q}^\dagger ds
\end{aligned} \tag{17}$$

Le problème adjoint est similaire au problème direct. Le signe des vitesses caractéristiques est inversé si bien que l'information se propage dans la direction opposée. Les conditions de sortie acoustique de Tam et Dong sont adaptées en modifiant le sens de propagation de l'écoulement moyen dans la vitesse de groupe. Alors, la matrice adjointe est obtenue après discrétisation spatiale de l'opérateur

$$-A_1^\dagger \partial_x \mathbf{q}^\dagger - A_2^\dagger \partial_y \mathbf{q}^\dagger, \tag{18}$$

pour les points intérieurs et des conditions de rayonnement adaptées pour les points frontières. Il est important de noter qu'il n'est pas possible ici de considérer directement la transposée de la matrice car les conditions de Tam et Dong ne sont pas linéaires en (x, y) . Il est donc nécessaire de reconstruire la matrice. Le principe de calcul des modes équilibrés empiriques, lorsque la dimension N est grande, est décrit par Rowley [6] dans l'espace temporel et par Willcox [9] dans l'espace fréquentiel. Dans [6], Rowley montre que la méthode équilibrée revient à appliquer la méthode POD avec $\mathcal{G}_o$ comme produit scalaire.

5 Analyses numériques

Deux cas-tests simples pour des conditions aux limites différentes sont analysés. Ces exemples introduisent les problématiques numériques essentiels du processus de réduction d'un modèle numérique haute-fidélité.

5.1 Avec des conditions aux limites périodiques

Le modèle (1) est simplifié à une propagation unidirectionnelle périodique suivant y . La condition initiale est un pulse acoustique gaussien placé au centre du domaine de calcul. Seul le nombre de Mach est susceptible de varier ici. Dans ce type de configuration, les ondes propagatives et rétrogrades interfèrent à des positions qui varient dans le temps et dans l'espace. Pour certaines valeurs du nombre de Mach, le phénomène peut devenir périodique en temps si bien que l'ensemble des positions de croisement se répète au cours du temps.

5.1.1 Paramètres numériques

Le domaine de calcul est un carré de taille $100m \times 100m$ discrétisé par 120×120 points. Le pas de temps est déduit de la condition CFL (Courant-Friedrichs-Lewy condition). Le champ de base est $(\rho_0, 0, Mc_0, p_0)$ avec $\frac{\rho_0}{p_0} = 1,2 \text{ kg/m}^3$, $p_0 = 1,01325 \times 10^5 \text{ Pa}$, $c_0 = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$ la célérité du son et M le nombre de Mach. La condition initiale est donnée par $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t_0) = (0, 0, 0, p(\mathbf{x}, t_0))^\dagger$ avec $p(\mathbf{x}, t_0) = \exp(-\beta[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2])$, $\beta = \log(2)/b^2$, $b = 7$

la demi-largeur de la gaussienne et $(x_0, y_0) = (50, 50)$ son centre. La condition aux limites périodique suivant la direction y s'écrit $\mathbf{q}(x, 0, t) = \mathbf{q}(x, 100, t)$ pour tout temps t .

5.1.2 Cas $M = 0$: périodicité en temps

Comportement sur l'intervalle des clichés Le tableau (1) compare la qualité du système réduit suivant le produit scalaire et le nombre de modes considérés. L'erreur relative est définie par

$$e_r = \max_i \frac{\|\mathbf{x}(t_i) - W^\dagger \mathbf{x}_r(t_i)\|}{\|\mathbf{x}(t_i)\|} \tag{19}$$

Les modes sont calculés à partir de clichés sur une seule période. Le nombre de modes nécessaires pour une qualité d'approximation donnée dépend de la demi-largeur b de gaussienne. Les modes POD $\mathcal{G}_o$ -orthogonaux sont calculés à partir des modes POD L^2 -orthogonaux. Les modes POD H -orthogonaux sont calculés en prenant $\alpha = 0, 1$. Les produits scalaires H et $\mathcal{G}_o$ nécessitent moins de modes et il est constaté une erreur du même ordre de grandeur.

	15	20	25	30
L^2	0,31	0,02	5,18e-04	1,09e-05
H	0,013	1,2e-03	9,69e-06	2,5e-07
$\mathcal{G}_o$	0,013	0,001	-	-

TABLE 1: Erreur relative en fonction du nombre de modes et du produit scalaire

Comportement à long terme L'analyse de la stabilité à long terme du système réduit est réalisée en calculant la plus grande partie réelle des valeurs propres de la matrice réduite. Ces dernières sont comparées dans le tableau 2. Dans le cas traité ici, tous les modes sont neutres. Cela se traduit par la nullité à précision machine de la partie réelle des valeurs propres. La méthode *balanced-POD* n'assure pas la stabilité. En effet, d'un point de vue théorique il est seulement démontré que la méthode conserve la stabilité si la matrice est asymptotiquement stable. Le théorème de Lyapunov est rappelé en annexe A. Pour remédier à cette limitation, Ma et *al.* [4] proposent de soustraire les modes neutres du modèle complet avant d'appliquer la *balanced-POD*. Cette technique est limitée à un faible nombre de modes neutres or ici tous les modes sont neutres. On observe cependant que l'utilisation du gramien $\mathcal{G}_o$ comme produit scalaire améliore la qualité d'approximation au même titre que l'emploi du produit scalaire symétrisant H . La nullité de la partie réelle à précision machine, dans le cas du produit scalaire H , s'explique par le fait que la matrice non réduite est parfaitement anti-symétrique, or une projection de Galerkin conserve cette propriété. Les systèmes réduits obtenus à l'aide des produits scalaires L^2 et $\mathcal{G}_o$ sont marginalement stables tandis que le système réduit construit avec H conserve la stabilité neutre du modèle. La figure 1 illustre l'instabilité de Galerkin après plusieurs périodes.

	15	20	25	30
L^2	0,009	0,002	0,06	2,46
H	8,21e-15	1,1e-14	5,2e-15	2,66e-14
$\mathcal{G}_o$	0,07	9,29e-08	-	-

TABLE 2: $\max_i \mathcal{R}e(\lambda_i)$ en fonction du nombre de modes et du produit scalaire

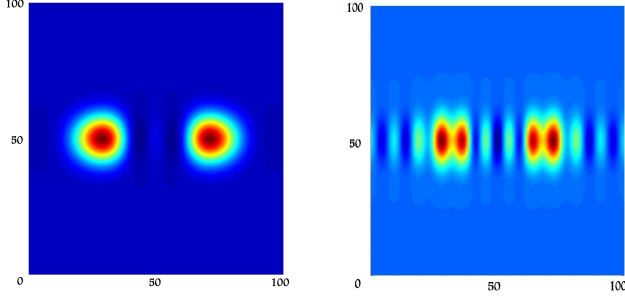


FIGURE 1: Comparaison de la stabilité à long terme du modèle réduit. À gauche : pression après 1000 périodes avec 25 modes POD H -orthogonaux. À droite : pression après 330 périodes avec 25 modes POD L^2 -orthogonaux, développement de l'instabilité de Galerkin

5.1.3 Cas $M = 0.4$

Les modes sont calculés à partir de clichés sur une demi-période temporelle ce qui correspond à plusieurs passages des deux ondes au centre du domaine. Pour s'affranchir de l'instabilité de Galerkin, le produit scalaire H est utilisé. On observe sur la figure 2 que le modèle réduit est inconsistant en dehors de la période de construction des modes. En effet, selon le théorème de Lax [3], une approximation stable non convergente est nécessairement non consistante.

Cela suggère que le système réduit est extrêmement sensible à une légère modification de la configuration de calcul des modes. En dehors de la demi-période de construction des modes, l'erreur relative diverge et la solution du modèle réduit ne converge pas vers la solution du modèle haute-fidélité. En revanche, la convergence est assurée si les modes sont construits sur une période. Un moyen de construire des modes valables quelque soit le nombre de Mach, c'est-à-dire sans avoir à connaître à l'avance la période, est de simuler la propagation des deux ondes séparément. Le calcul des modes est alors fondé sur le gramien de contrôlabilité. Le système réduit nécessite dans ce cas davantage de modes, cependant il reste consistant dès que le nombre de Mach est modifié.

5.2 Avec des conditions de non réflexion

Ce paragraphe traite la propagation bidimensionnelle d'une impulsion dans un écoulement de base uniforme vertical subsonique. Les paramètres numériques géométriques et la condition initiale sont identiques à ceux du cas périodique. L'écoulement de base est $\bar{\mathbf{q}} = (\rho_0, 0, Mc_0, p_0)^\dagger$ avec $M = 0,5$. Ce cas est mieux adapté à la *balanced-POD* car la matrice est asymptotiquement stable. Les conditions de Tam et Dong imposent en effet la sortie des informations du domaine de calcul si bien que l'énergie du signal tend vers 0

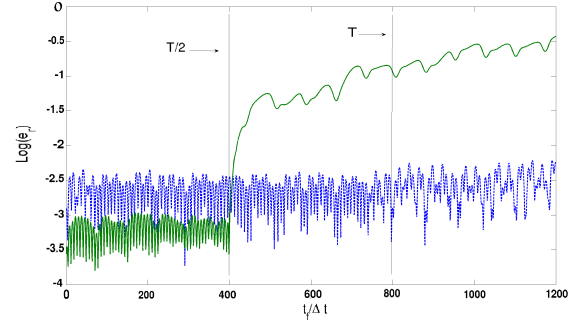


FIGURE 2: Erreur relative $\log(e_r)$ suivant l'intervalle $[0, t_f]$ de construction des modes. En trait discontinu bleu : construction des modes sur $[0, T]$. En trait continu vert : construction des modes sur $[0, T/2]$

au bout d'un certain temps. Les figures 3, 4 et 5 comparent le champ de pression des premiers et dixièmes modes POD (respectivement à gauche et à droite) sur le domaine de calcul $[0, 100] \times [0, 100]$ pour chacun des produits scalaires. Une meilleure qualité d'approximation est encore observée avec les modes POD H -orthogonaux et $\mathcal{G}_o$ -orthogonaux. À titre indicatif, le nombre de ddls est de 57600 pour le modèle complet et une vingtaine pour le modèle réduit suivant la qualité d'approximation souhaitée. Par ailleurs ces modes peuvent être utilisés pour simuler un monopôle. La condition initiale est alors prise nulle et le terme source est implémenté sous la forme $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t) = (0, 0, 0, d(\mathbf{x}, t))^\dagger$ avec $d(\mathbf{x}, t) = \sin(2\pi ft)[\exp -\beta((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2)]$, $(x_1, y_1) = (50, 50)$ et f la fréquence de pulsation. Le modèle réduit s'est révélé valable sur une large gamme de fréquences à condition d'ajuster le nombre de modes en fonction de la fréquence de pulsation.

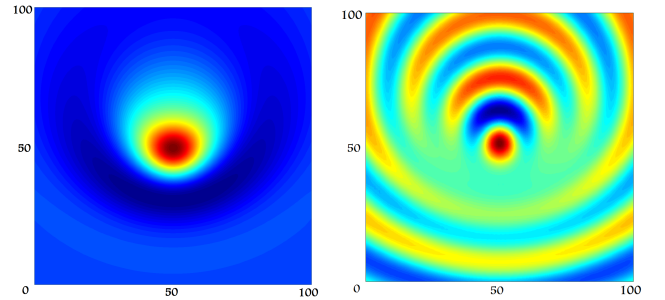


FIGURE 3: 1^{er} mode POD L^2 et 10^{ème} mode POD L^2

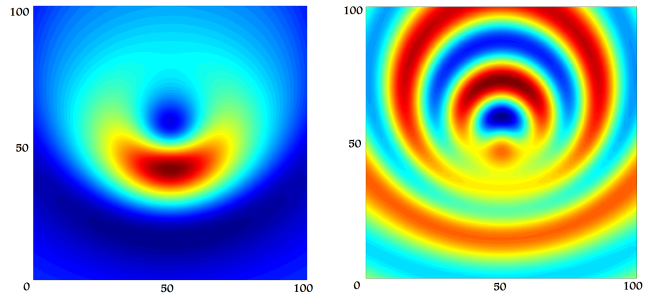


FIGURE 4: 1^{er} mode POD $\mathcal{G}_o$ et 10^{ème} mode POD $\mathcal{G}_o$

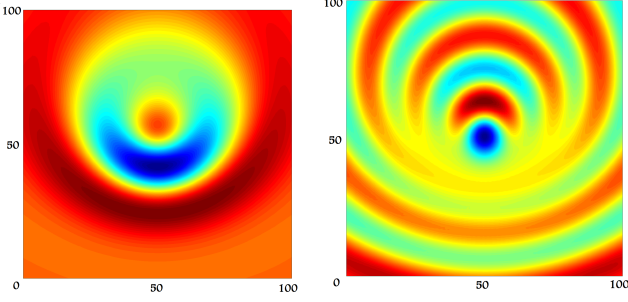


FIGURE 5: 1^{er} mode POD H et 10^{ème} mode POD H

6 Conclusion

Cette étude a été l'occasion d'introduire les principales problématiques numériques liées au processus de réduction d'un modèle haute-fidélité. La performance de la méthode POD en fonction du produit scalaire employé a été testée sur des configurations acoustiques simples. Il a été observé en particulier que l'application :

- d'un produit scalaire L^2 induit un modèle réduit marginalement stable que le modèle haute-fidélité soit asymptotiquement ou neutralement stable ;
- d'un produit scalaire $\mathcal{G}_o$ préserve la stabilité asymptotique mais pas la stabilité neutre ;
- d'un produit scalaire H préserve toutes les formes de stabilité ;
- d'un produit scalaire $\mathcal{G}_o$ ou H améliorent largement la qualité d'approximation ;
- de n'importe quel produit scalaire pose des problèmes de consistance dès que la configuration de calcul est très légèrement modifiée.

Les perspectives de ce travail concernent la prise en compte d'écoulements de base non uniformes sur des configurations géométriques plus complexes. L'analyse de la stabilité aéroacoustique, de la réceptivité des écoulements ou encore du calcul du bruit aérodynamique rayonné sont des applications envisagées.

A Stabilité au sens de Lyapunov

Les résultats théoriques suivants sont tirés du livre d'Antoulas [1].

A.1 Théorème de Lyapunov

Un système d'équations ordinaires linéaires autonome

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t), \quad (20)$$

avec $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, est dit asymptotiquement stable si $\mathcal{Re}(\lambda_i(A)) < 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, autrement dit si toutes les parties réelles des valeurs propres λ_i de la matrice A sont strictement négatives. Le théorème de Lyapunov énonce que l'équation (20) est asymptotiquement stable si et seulement si :

$\forall Q \in \mathbb{R}^{N \times N}$ symétrique définie positive (SDP),
 $\exists P \in \mathbb{R}^{N \times N}$ (SDP) telle que

$$A^\dagger P + PA + Q = 0 \quad (21)$$

L'équation matricielle (21) est nommée équation de Lyapunov.

A.2 Lien avec les grammiens

Si A est asymptotiquement stable, il est montré que $P = \int_0^\infty e^{A^\dagger t} Q e^{At} dt$ est solution de l'équation de Lyapunov (21). Par exemple si le système (7) est observable, l'utilisation du grammien d'observabilité infini est un moyen de construire la matrice P .

Références

- [1] A. Antoulas. *Approximation of large-scale dynamical systems*. Advances in Design and Control, 2005.
- [2] M. F. Barone, I. Kalashnikova, D. J. Segalman, and H. K. Thornquist. Stable Galerkin reduced order models for linearized compressible flow. *Journal of Computational Physics*, 228 :1932–1946, 2009.
- [3] P. Lax and R. Richtmyer. Survey on the stability of linear difference equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 9 :267–293, 1956.
- [4] Z. Ma, C. Rowley, and G. Tadmor. Snapshot-based balanced truncation for linear time-periodic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(2) :469–473, 2010.
- [5] B. Moore. Principal component analysis in linear systems : controllability, observability, and model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(1) :17–32, 1981.
- [6] C. Rowley. Model reduction for fluids, using balanced proper orthogonal decomposition. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15(3) :997–1013, 2005.
- [7] L. Sirovich. Turbulence and the dynamics of coherent structures, parts i-iii. *Quarterly of Applied Mathematics*, XLV(3) :561–590, 1987.
- [8] C. Tam and Z. Dong. Radiation and outflow boundary conditions for direct computation of acoustic and flow disturbances in a nonuniform mean flow. *Journal of Computational Acoustics*, 4(2) :175–201, 1996.
- [9] K. Willcox and J. Pereire. Balanced model reduction via the proper orthogonal decomposition. *AIAA Journal*, 40(11) :2323–2330, 2002.