École Centrale de Lyon
École Doctorale
Mécanique, Énergétique, Génie civil et Acoustique

N ° ordre : 2009-19

Année 2009

Thèse présentée par

Frédéric Sicot

en vue de l'obtention du grade de docteur de l'École Centrale de Lyon

Simulation efficace des écoulements instationnaires périodiques en turbomachines

Spécialité : Mécanique

Thèse soutenue le 12 octobre 2009 devant le jury composé de :

P. Cinnella	Professeur, ENSAM, Paris	rapporteur
C. Hirsch	Professeur (emeritus) Vrije Universiteit, Bruxelles	rapporteur
S. Moreau	Professeur, Université de Sherbrooke	président
F. Leboeuf	Professeur, École Centrale de Lyon	directeur
M. Roger	Professeur, École Centrale de Lyon	directeur
J.-F. Boussuge	Ingénieur de recherche, CERFACS, Toulouse	examinateur
A. Dugeai	Ingénieur de recherche, ONERA, Châtillon	examinateur

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique – UMR 5509
36 avenue Guy de Collongue 69134 Ecully

Centre Européen de Recherche et de Formation Avancée en Calcul Scientifique
42 avenue Coriolis 31057 Toulouse Cedex

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu les membres du jury, en particulier les rapporteurs Paola Cinnella et Charles Hirsch pour avoir accepté d'accorder de leur temps à la lecture de mon travail. Leurs remarques constructives ont contribué à l'amélioration du manuscrit final.

Je remercie également les industriels et institutions qui, de près ou de loin, ont participé à cette thèse ou simplement montré leur intérêt : Michel Dumas, Virendra Sharma et Antoine Mazeau de Snecma Moteur ; Gilles Leroy et Sylvain Coste de Turboméca ; Julien Delbove et Pascal Larrieu d'Airbus France ; Alain Dugeai, Michel Gazaix, Bertrand Michel et Sylvie Plot de l'Onera.

Je remercie Thierry Poinsot, et sa super secrétaire Marie, pour m'avoir accueilli au sein de l'équipe CFD du Cerfacs. J'en profite pour remercier tout le personnel administratif et technique (CSG) qui nous chouchoute et nous offrent des conditions de travail excellentes.

J'exprime mes plus sincères remerciements à Jeff pour sa confiance et tout ce qu'il m'a apporté, tant sur le plan scientifique que sur le plan humain. Merci de développer une atmosphère si chaleureuse dans l'équipe d'aérodynamique appliquée, j'y ai passé de belles années que je ne suis pas près d'oublier. Je remercie tout particulièrement la HBT team, en premier lieu le Professeur Dufour, sans qui je n'aurais pas pu faire tout ça, le vieux Gui pour sa gentillesse et Nico pour sa disponibilité (et ses blagues encore plus pourries que les miennes). Un grand Merci à Marcounet, le gourou elsA, pour sa patience et son aide. Je fais une bise à l'AGL (Marion, Hughes, Lulu, Mathieu, Thomas et les autres), vous allez me manquer. Je remercie également les anciens qui nous ont laissé une bonne ambiance en partant : Tonio, Yann, JP, Björn, Tibo… Enfin, Djul et Florian avec qui j'ai partagé le bureau pendant tout ce temps.

Châtillon, le 27 octobre 2009.

Table des matières

Table des figures

Nomenclature

Lettres latines

A	domaine de calcul
B, B_r, B_s	nombre d'aubes d'une roue de turbomachine, dans un rotor, dans un stator
c	corde d'une aile
c_0	vitesse du son
C_p	coefficient de pression
	chaleur spécifique à pression constante
$D_t()$	opérateur spectral de dérivée temporelle
E	énergie
f	fréquence
F_c	flux convectif
F_v	flux visqueux ou diffusifs
H	enthalpie totale ($H = (\rho E + p)/\rho$ pour un gaz idéal)
h	hauteur d'aube
K	fréquence réduite : $K = \omega c/U$ pour un profil
k	numéro de mode : $-N \leq k \leq N$
	en RANS, énergie cinétique turbulente
M	cordonnées des points d'un maillage
Ma	nombre de Mach
N	nombre de modes
P	variable de Laplace
p	pression
Pr	nombre de Prandtl
q	flux de chaleur
Q	débit
r	rayon
$R(\theta)$	rotation d'angle θ
$R(W)$	opérateur des résidus
Re	nombre de Reynolds
s	vitesse de grille $s = s^D + s^E$
s^D	vitesse de déformation de grille $s^D = \partial M/\partial t$

s^E	vitesse d'entraînement de grille dans un repère mobile
S	terme source
t	temps
t^*	pseudo-temps
t_n	instant n d'une période : $t_n = nT/(2N+1)$
T	période temporelle $T = 1/f$
	température
u, v, w	composantes de la vitesse selon les axes x, y, z respectivement
U	norme de la vitesse : $U = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$
V	volume d'une cellule de maillage
W	vecteur des variables conservatives : $W = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E, \ldots)^\top$
(x, y, z)	coordonnées cartésiennes

Lettres calligraphiques

$\mathcal{A}$	matrice de coefficients
$\mathcal{D}$	matrice diagonale
$\mathcal{E}$	matrice de transformée de Fourier discrète
$\mathcal{F}$	matrice de transformée de Fourier discrète rectangulaire
$\mathcal{I}$	matrice identité
$\mathcal{J}$	matrice jacobienne des résidus : $\mathcal{J} = \partial R/\partial W$
$\mathcal{L}$	matrice triangulaire inférieure
$\mathcal{M}$	matrice de modulation
$\mathcal{O}$	mesure de complexité
$\mathcal{R}_A$	référentiel absolu
$\mathcal{R}_e$	référentiel entraîné
$\mathcal{U}$	matrice triangulaire supérieure

Lettres grecques

α	incidence
β	angle de déphasage inter-aubes
δA	frontière du domaine A
δ_{ij}	symbole de Kronecker $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, 0 sinon
ε	taux de dissipation de la turbulence
η	paramètre de vanne
γ	rapport des chaleurs spécifiques
Γ	ratio du nombre d'aubes entre deux roues d'une turbomachine
κ	conductivité thermique
λ	rayon spectral d'une matrice
μ	viscosité
ρ	densité
τ	taux de déformation et tenseur de Reynolds modélisé
θ	azimut
θ_G	pas d'une rangée d'aube $\theta_G = 2\pi/B$

θ_S	étendue azimutale d'un secteur de turbomachine
ω	pulsation $\omega = 2\pi f$
	dans modèle $k-\omega$, $\omega \propto k/\varepsilon$
Ω	vitesse de rotation

Exposants et indices

t_n	instant n de la période : $t_n = nT/(2N+1)$
f_n	valeur de la variable f à l'instant t_n : $f_n \equiv f(t_n)$
f^*	vecteur contenant tous les instants de la fonction échantillonnée f
$\hat{f}_k$	coefficient de Fourier de la fonction f correspondant au mode k
$\overline{a}$	dans une turbomachine, propriété de la roue opposée
	en RANS, moyenne de reynolds
$\overline{\overline{a}}$	variable a stationnaire
$\widetilde{a}$	perturbation de a
$a^{(q)}$	variable a à l'itération q
t^*	pseudo-temps
W^*	concaténation des instants $W^* = (W_0, W_1, \ldots, W_{2N})$
$\mathcal{A}^\top$	transposée de la matrice $\mathcal{A}$
$\mathcal{A}^+$	pseudo-inverse Moore-Penrose de la matrice rectangulaire $\mathcal{A}$

Ensembles

$\mathbb{R}$	corps des réels
$\mathbb{Z}$	corps des entiers relatifs

Symboles

$\Re e(a)$	partie réelle du nombre complexe a
$\Im m(a)$	partie imaginaire du nombre complexe a
$\|a\|$	norme de a
Δa	incrément de a

Acronymes

ACARE	Advisory Council for Aeronautics Research in Europe *groupe consultatif pour la recherche aéronautique en Europe*
AGARD	Advisory Group for Aeronautical Research and Development *groupe consultatif pour la recherche et développement en aéronautique*
AIAA	American Institute of Aeronautics and Astronautics *Association aéronautique et astronautique américaine*
ALE	Arbitrary Lagrangien-Eulerian *formulation Lagrangienne/Eulérienne arbitraire*

BJ	Block Jacobi *méthode Jacobi par bloc*
BPF	Blade Passing Frequency *Fréquence de passage des aubes*
CERFACS	Centre Européen de Recherche et de Formation Avancée en Calcul Scientifique
CFD	Computational Fluid Dynamics *mécanique des fluides numérique*
CFL	nombre de Courant-Friedriech-Levy
CME2	compresseur mono-étage 2
DF	méthode des différences finies
DNS	Direct Numerical Simulation *simulation numérique directe*
DTS	Dual Time Stepping *méthode à pas de temps dual*
elsA	ensemble logiciel pour la simulation en aérodynamique
GAF	Generalized Aerodynamic Forces *forces aérodynamiques généralisées*
GBVTP	Gradient Based Variable Time Period *période temporelle variable par méthode de gradient*
GFDL	GNU Free Documentation License *licence de documentation libre GNU*
HB	Harmonic Balance *équilibrage harmonique*
JST	schéma de Jameson-Schmidt-Turkel
LANN	aile Lockheed, Air Force, NASA, NLR
LES	Large Eddy Simulation *simulation aux grandes échelles*
LU	Lower-Upper *supérieure-inférieure (matrice)*
LUR	Linearized U-RANS *U-RANS linéarisé*
NACA	National Advisory Committee for Aeronautics *comité consultatif national pour l'aéronautique*
NLFD	Non Linear Frequency Domain method *méthode non-linéaire dans le domaine fréquentiel*
NLH	Non Linear Harmonic method *méthode harmonique non-linéaire*
ONERA	Office National d'Études et Recherches Aérospatiales
PGCD	plus grand commun diviseur
PPCM	plus petit commun multiple
RK	schéma de Runge-Kutta
SGS	Symmetric Gauss-Seidel *méthode de Gauss-Seidel symétrique*
(S)SOR	(Successive) Symmetric Over-Relaxation *sur-Relaxations symétriques (successives)*

TFD(I)	transformée de Fourier discrète (inverse)
TMHB	Time-Mapped Harmonic Balance *méthode d'équilibrage harmonique à échantillonnage non-uniforme*
TSM	Time Spectral Method *méthode spectrale temporelle*
RANS	Reynolds-Averaged Navier-Stokes *équations de Navier-Stokes moyennées*
U-RANS	Unsteady RANS *RANS instationnaire*

Introduction

La mécanique des fluides numérique (CFD) vise à simuler sur ordinateur des écoulements de fluide en mouvement. Elle est à la croisée de la dynamique des fluides, des mathématiques et de l'informatique. De nombreux progrès ont été réalisés ces dernières décennies tant d'un point de vue algorithmique que de la puissance sans cesse croissante des ordinateurs. Ces progrès ont permis l'adoption de la CFD dans de nombreux domaines d'intérêt industriel, notamment en aéronautique (Johnson *et al.* [56]). Elle vient ainsi idéalement compléter les essais sur des prototypes ou des modèles réduits en soufflerie. Mais alors que la CFD est mature pour la simulation d'écoulement stationnaires, les industriels emploient assez rarement des méthodes instationnaires car elles ont un temps de restitution encore trop long pour être utilisées au quotidien. L'intégration en temps physique couvert par une simulation d'écoulement instationnaire est en effet plus importante que son pendant stationnaire et nécessite donc un investissement en calcul supérieur.

Enjeux industriels et scientifique

L'Europe, via l'ACARE (Advisory Council for Aeronautics Research in Europe), a fixé des objectifs ambitieux à l'aviation civile : réduire les émissions de dioxyde de carbone (CO_2) de moitié, les émissions d'oxyde d'azote (NO_x) de 80 % et le bruit émis de moitié d'ici à 2020 (Argüelles *et al.* [1]). L'aérodynamique de l'avion et les moteurs ont une grande part à jouer dans la poursuite de ces objectifs. Or la simulation numérique devient de plus en plus importante dans la conception de nouveaux aéronefs alors que, dans le même temps, le nombre de prototypes construits est en constante diminution. Les concepteurs doivent donc être capables de dessiner, d'optimiser et de connaître à l'avance les performances d'une machine. Afin d'atteindre les objectifs visés par l'ACARE, la compréhension et la maîtrise des phénomènes instationnaires deviennent nécessaires. Pour cela, les ingénieurs doivent disposer d'outils de simulation rapides et précis et ne peuvent plus se contenter de modélisations stationnaires.

Il y a donc un intérêt grandissant pour des simulations d'écoulements instationnaires plus efficaces. L'efficacité n'est toutefois pas une notion absolue : elle résulte d'un compromis entre le temps de calcul et la qualité de la physique restituée (à savoir son caractère prédictif). Les méthodes de simulations instationnaires classiques sont génériques et peuvent être utilisées pour virtuellement tout écoulement. Mais plus une modélisation s'inspire de la physique sous-jacente, plus elle est efficace. C'est pourquoi, nous proposons de nous limiter aux écoulement périodiques en temps. Il y a en effet une grande variété d'applications périodiques en temps comme les écoulements résultant d'un mouvement forcé périodique. Si la turbulence, chaotique par nature, empêche tout écoulement d'être strictement périodique, les grandes structures déterministes auxquelles s'intéressent les industriels peuvent être considérées comme périodiques. Il en va ainsi des écoulements autour des hélicoptères ou d'une éolienne, internes aux turbomachines (interactions rotor/stator) ou encore résultant du battements d'une aile (cf. Fig. 1).

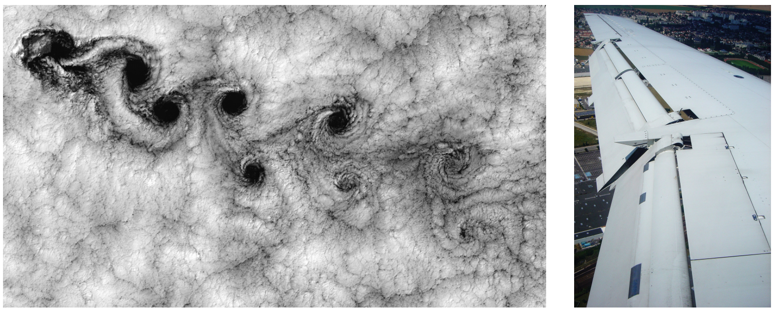
(a) Hélicoptère Bell 407

(b) Vol d'insecte

(c) Soufflante de turboréacteur, Ilyushin Il-96

Figure 1 – Exemples d'écoulements périodiques dus à un mouvement forcé (GFDL).

Il existe d'autre phénomènes périodiques dont la fréquence n'est pas connue *a priori* (Fig. 2). Les allées de von Kármán, par exemple, résultent de la séparation instable d'un écoulement autour de corps peu profilés. Ces allées se retrouvent à toutes les échelles : aussi bien en aval d'une cheminée d'usine qu'en aval d'un volcan comme le montre la figure 2(a). La prédiction des phénomènes de flottement ou de cycles limites d'une aile sont autant d'autres exemples.



(a) Allée de von Kármán de nuages en aval d'un volcan (Domaine public)

(b) Aile d'avion Embraer 145

Figure 2 – Phénomènes périodiques à fréquences naturelles.

Les méthodes classiques de simulations instationnaires sont capables de capturer un écoulement périodique en temps par variation périodique des conditions limites par exemple. Seulement cette périodicité n'est pas prise en compte par l'algorithme d'avance en temps lui-même.

Cette étude est donc dédiée à la simulation efficace d'écoulements périodiques en temps. Une méthode innovante, uniquement dédiée aux écoulements périodiques en temps, est présentée et mise en œuvre dans le solveur *elsA* de l'Onera. La « Time Spectral Method (TSM) », ou méthode d'équilibrage harmonique, est utilisée depuis longtemps dans des domaines comme la dynamique des structures (Kryloff et Boboliuboff [58]) ou l'électronique (Gilmore et Steer

[37]). Elle a été introduite récemment en CFD par les travaux de chercheurs des universités de Durham (Angleterre, He et Ning [50]), de Duke (USA, Hall *et al.* [45]) et de Stanford (USA, Gopinath et Jameson [38]). Des solveurs commerciaux comme celui de Numeca mettent également en œuvre une méthode harmonique (Vilmin *et al.* [101]).

La TSM présentée dans ce mémoire est un pas de plus pour mettre à la portée des industriels la simulation d'écoulements instationnaires périodiques en mouvement forcé. Des applications en aérodynamique externe seront étudiées en premier lieu afin de valider la méthodologie. Cependant l'objectif principal concerne la simulation des écoulements internes des turbomachines.

Organisation du mémoire

Ce mémoire est divisé en trois parties composées chacune de trois chapitres.

La première partie présente succinctement les écoulements en turbomachines et diverses méthodes de simulations numériques. Le premier chapitre est consacré à un inventaire non exhaustif des phénomènes instationnaires rencontrés dans les compresseurs et turbines des moteurs d'avions. Le deuxième chapitre présente les différentes modélisations nécessaires pour simplifier la physique en vue d'une simulation. Les modélisations spécifiques aux turbomachines sont décrites ainsi que celles, plus générales, couramment utilisées en CFD pour tout écoulement turbulent. Enfin, le troisième chapitre présente les outils numériques utilisés pour transformer les modèles physiques en programmes exécutables par un ordinateur. Il s'agit pour l'essentiel de méthodes de discrétisation spatiale et temporelle ainsi que la présentation du solveur utilisé.

La deuxième partie détaille la méthode dédiée à la simulation des écoulements périodiques en temps. Le chapitre 4 retrace l'évolution de la TSM et ses variantes. Le chapitre suivant développe une solution originale pour la résolution à l'aide d'un schéma temporel implicite. Le chapitre 6 donne des éléments de mise en œuvre de la méthode dans le solveur *elsA* et présente les résultats obtenus sur des premières applications d'aérodynamique externe en deux et trois dimensions. La TSM est également étendue à une formulation lagrangienne/eulérienne arbitraire afin de permettre les applications en aéroélasticité. Une première mesure quantitative des gains en performance est également donnée.

La troisième partie est dédiée aux écoulements en turbomachines. Proche du point de fonctionnement nominal, l'écoulement présente une double périodicité, à la fois temporelle et spatiale en azimut. Il est avantageux de prendre également en compte la périodicité spatiale afin de réduire le domaine de calcul. Le chapitre 7 présente l'adaptation de la TSM à la périodicité spatiale simple. Des simulations sont conduites sur une configuration rotor/stator et rotor/traitement de carter. La périodicité spatiale simple étant trop limitée dans ses applications, une périodicité plus complexe, dite spatio-temporelle, est dérivée au chapitre 8. Elle est validée sur une application de rotor isolé, dont les aubes vibrent selon le même mode de déformation mais avec différents déphasages d'une aube à l'autre. Dans une application rotor/stator, cette périodicité permet de ne simuler qu'un canal dans chaque roue. Le dernier chapitre est consacré à l'interface entre roues mobiles et à l'application rotor/stator.

Première partie

Écoulements en turbomachines : données générales

Chapitre 1

Mécanismes instationnaires

Jusqu'à présent, la plupart des conceptions de turbomachines sont basées sur l'hypothèse d'écoulements stationnaires en temps. Cette hypothèse est principalement guidée par la facilité de mise en œuvre et la rapidité des simulations stationnaires, qualités essentielles en contexte industriel. Cependant, l'écoulement dans une turbomachine est fortement instationnaire comme le montre le recensement Fig. 1.1 présenté par Callot [12]. Nombres d'instationnarités sont périodiques en temps. Cette périodicité peut être indépendante de la vitesse de rotation Ω de la machine comme les allées de Kármán en bord de fuite des aubages. Les phénomènes corrélés à la vitesse de rotation peuvent être stables, comme les nombreuses interactions entre rotor et stator, ou instables, comme le décollement tournant. Il existe également des phénomènes non-

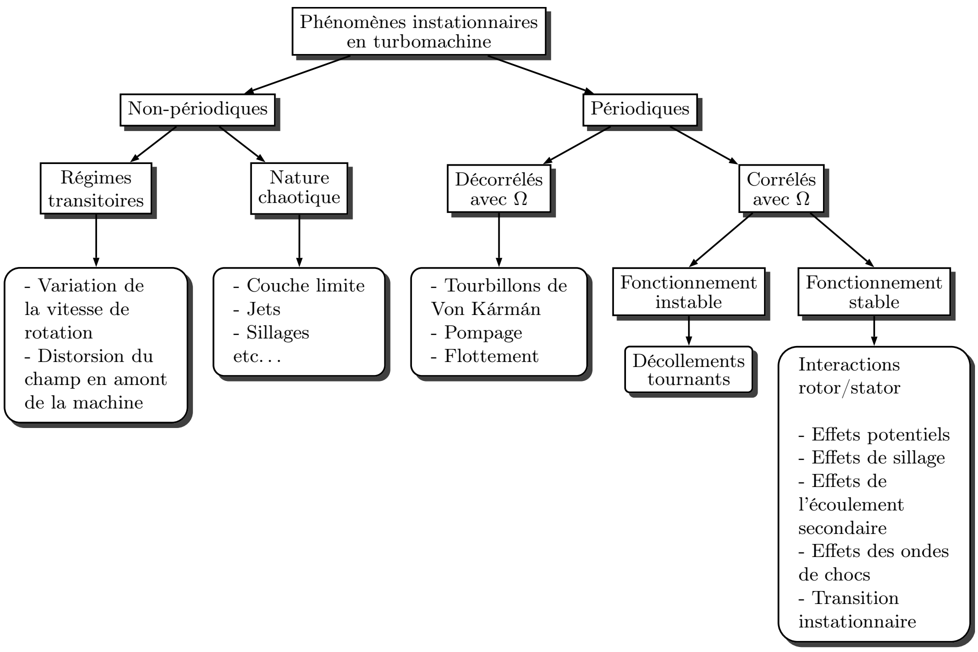


Figure 1.1 – Origine des principaux phénomènes instationnaires présents dans les écoulements de turbomachines. D'après Callot [12].

périodiques liés au transitoire de fonctionnement de la machine ou à la nature chaotique de la turbulence. En réalité, cette dernière empêche tout écoulement d'être rigoureusement périodique en temps. Mais il est supposé que les grandes structures déterministes de l'écoulement, celles que l'on cherche à capturer, sont périodiques.

Malgré la puissance croissante des moyens de calculs disponibles, les mécanismes instationnaires ne sont pas suffisamment compris et maîtrisés pour être intégrés dans une procédure de dessin. Des progrès de modélisation et d'algorithmique sont également nécessaires pour parvenir à cet objectif. C'est l'un des buts principaux de cette étude. Afin de mieux en situer le cadre, une vue générale des mécanismes recensés Fig. 1.1 est brièvement présentée.

1.1 Les interactions rotor/stator

1.1.1 Effets potentiels

Ces effets se situent parmi les principaux phénomènes instationnaires périodiques corrélés avec la vitesse de rotation. Les effets potentiels d'une roue sont générés par le mouvement des aubes qui sont assimilées à des forces de pression. Ils peuvent se propager en amont et en aval de l'écoulement. L'intensité de ces effets peut être estimée selon la relation (Leboeuf [60])

$$\left.\frac{\partial p}{\rho V^2}\right|_{\max} = \frac{\sqrt{1-\mathrm{Ma}^2}}{1-\mathrm{Ma}_x^2}\exp\left[-2\pi\frac{\sqrt{1-\mathrm{Ma}^2}}{1-\mathrm{Ma}_x^2}\frac{x}{\theta_G}\right], \tag{1.1}$$

où x est la distance axiale à la source potentielle. Si cette distance est suffisamment grande, $x/\theta_G > 30$ %, cet effet est rapidement amorti dans un écoulement subsonique sans être négligeable pour autant : Sentker et Riess [80] observent expérimentalement un déficit de vitesse de l'ordre de 10 % dû aux effets potentiels d'une roue adjacente dans un compresseur basse vitesse. Cependant, pour un écoulement transsonique, $\mathrm{Ma} \approx 1$, les effets potentiels sont transmis sans amortissement et peuvent donc être ressentis très loin de la source.

Compte tenu des distances entre deux grilles d'aubes généralement employées dans les machines, il est observé que les effets potentiels sont d'un ordre de grandeur plus faible que ceux impliquant les interactions de sillages.

1.1.2 Interactions de sillages

Comme les effets potentiels, les interactions de sillages sont corrélées à la vitesse de rotation de la machine. Mais contrairement à eux, les sillages issus du bord de fuite d'une aube n'influencent que les roues situées à l'aval. La figure 1.2 illustre les effets de découpage et de transport des sillages par les roues en aval. Les segments de sillage sont allongés dans la direction axiale et transportés vers l'intrados des aubes du stator en compresseur (l'extrados en turbine). Il se produit alors dans ces segments de sillage un transport de masse de l'extrados vers l'intrados convectant le long des aubages des points d'impact et des points d'aspiration. Il en résulte une accumulation des particules à faible quantité de mouvement sur l'intrados des aubages. L'allée tronçonnée de sillages du premier rotor se déplace à la même vitesse que le second rotor et ne subira donc pas de découpage supplémentaire par ce dernier.

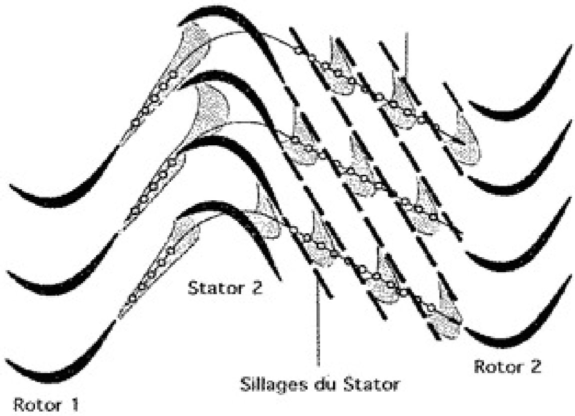


Figure 1.2 – Découpage des sillages d'un rotor reproduit de Leboeuf [60].

1.1.2.1 Interaction avec les ondes de choc

Dans une turbomachine transsonique, des ondes de choc apparaissent notamment aux bords d'attaque des aubages en compresseur et aux bords de fuite en turbine. Lorsqu'elles sont excitées par des perturbations telles qu'un passage périodique de sillage, elles entrent alors en oscillation, produisant plus de chaleur et d'entropie. Les travaux expérimentaux d'Ottavy [73] sur une configuration de compresseur ont montré que la présence d'une onde de choc creusait le déficit de vitesse dans le sillage.

1.2 Écoulement de jeu

En général, il existe une zone de jeu très mince entre l'extrémité d'une aube de roue mobile et le carter de la machine. L'écoulement y est fortement instationnaire et dépend de nombreux paramètres dont la forme de l'aube et la répartition de charge. Un tourbillon est généré par un débit de fuite au carter et se propage le long de l'aube comme illustré Fig. 1.3. Ce tourbillon induit des pertes sur l'extrados de l'aube et des transfert de chaleur spécifiques en turbine. Le travail de la machine se trouve donc réduit proportionnellement au ratio de la taille du jeu par rapport à l'envergure des aubages.

1.3 Mécanismes instables

1.3.1 Flottement

Le flottement est un mécanisme instationnaire résultant d'un couplage entre une excitation aérodynamique et un mode propre de vibration en flexion et/ou torsion des aubes : la vibration de l'aube augmente la charge aérodynamique qui augmente l'amplitude de la vibration. Les différents flottements recensés dans la littérature par Fransson et Sieverding [33] sont :

– le flottement classique : il résulte d'un couplage des modes de torsion et de flexion des aubages. Il est très peu fréquent en turbomachines, les aubes étant conçues de telle façon que leurs modes de flexion et de torsion soient éloignés ;

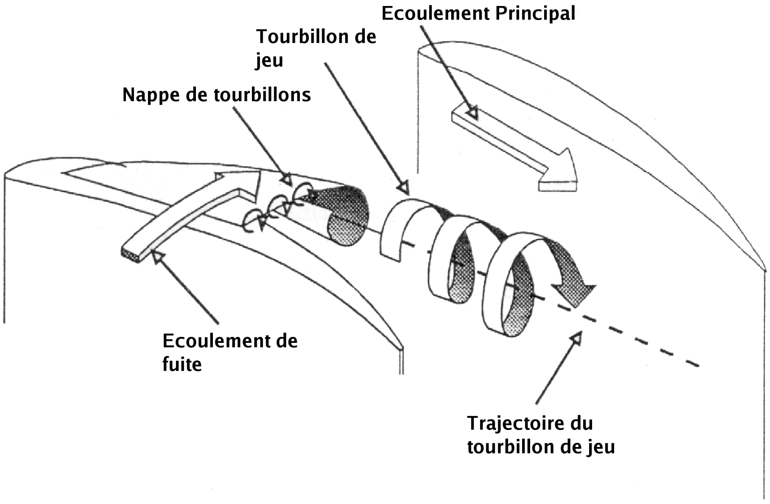


Figure 1.3 – Illustration de l'écoulement de jeu. Repris de Leboeuf [60].

- le flottement de décrochage : il est souvent lié au décollement instationnaire des couches limites au bord d'attaque. Se déclenchant sur un mode de flexion ou de torsion d'un aubage, il peut entraîner un couplage inter-aubes si le disque n'est pas assez rigide. Il apparaît plus fréquemment sur les flexions dans le cas supersonique, de par les instabilités liées aux onde de choc ;
- le flottement supersonique : il a lieu en sur-vitesse dans les roues mobiles de compresseur. Quand une onde de choc est faiblement détachée du bord d'attaque, les aubes vibrent en torsion pour une faible charge (faible taux de compression). Dans le cas d'une forte charge, une onde de choc fort vient impacter sur l'intrados à hauteur de la demi-corde favorisant la vibration des aubages en flexion. Dans les deux cas, la présence d'ondes de choc génère un couplage inter-aube ;
- le flottement de blocage : il apparaît principalement dans les stators de compresseurs, pour des forts débits. L'origine de ce flottement est généralement attribué au mouvement d'une onde de choc traversant le canal inter-aubes, entraînant des vibrations couplées.

Le flottement résulte souvent d'un couplage inter-aube et le traitement de ce problème passe par la détermination du déphasage vibratoire inter-aube. L'organisation circonférentielle de ce phénomène est fonction du nombre d'aubes constituant la grille. En effet, il peut exister de nombreux modes vibratoires, et on admet en général qu'il suffit d'un déphasage inter-aube instable pour qu'il y ait déclenchement du flottement.

Le flottement entraîne une fatigue extrême des aubes et est potentiellement destructeur. Des solutions mécaniques existent pour rigidifier les aubes et réduire les effets du flottement. Elles entraînent cependant une augmentation de poids et une diminution du rendement.

1.3.2 Décollement tournant

Lors de certaines plages de fonctionnement, le débit de la machine peut être fortement réduit entraînant une mise en grande incidence des aubes. Un canal peut être obstrué par l'épaississement des couches limites ce qui tend à dévier l'écoulement sur les deux canaux adjacents comme indiqué Fig. 1.4. Cette déviation augmente l'incidence sur l'aube adjacente situé côté intrados de l'aube et diminue l'incidence sur l'aube situé côté extrados. Cette obstruction se propage donc de proche en proche dans le sens inverse de la rotation de la machine et peut apparaître sur toute ou une partie de la hauteur de veine. Le décollement tournant est donc une instabi-

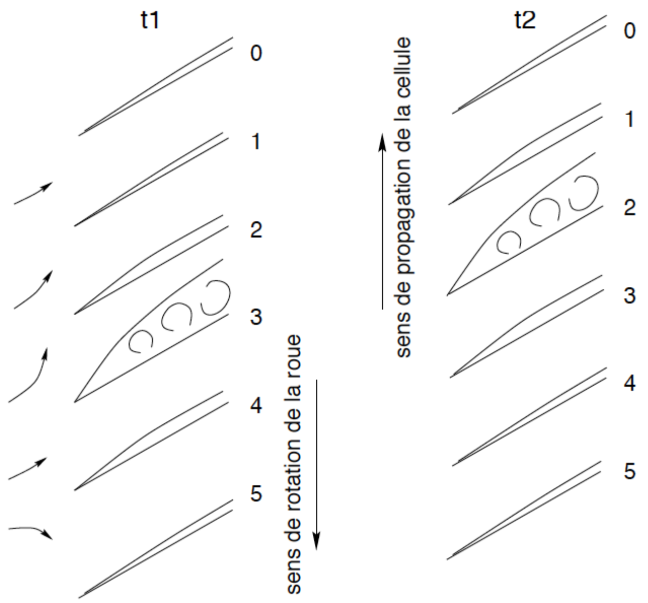


Figure 1.4 – Illustration de la propagation d'une cellule de décollement tournant (d'après Callot [12]).

lité tridimensionnelle caractérisée par la présence d'une ou plusieurs cellules de fluide décollées tournant généralement à une vitesse inférieure à celle des roues mobiles [20] (typiquement de 0,2 à 0,8 fois la vitesse de rotation de la machine).

Le décollement tournant pénalise fortement le fonctionnement de la machine. C'est un phénomène à forte hystérésis une fois établi. Il s'établit des modes circonférentiels particuliers qui sont amplifiés en fonction du point de fonctionnement. Il est souvent précurseur du pompage dans les machines fortement chargées.

1.3.3 Pompage

Le pompage en compresseur est une oscillation axiale du débit à faible fréquence (inférieure à 10 Hz) affectant l'ensemble du compresseur. Pour un régime donné, il apparaît lorsque le débit est trop faible. Il peut apparaître très brutalement et causer des dégâts irréversibles sur l'intégrité structurelle de la machine. Ce phénomène est donc à éviter à tout prix et le fonctionnement de la machine doit rester en deçà d'une marge au pompage spécifiée par le constructeur. Présentant une hystérésis importante, il est possible d'arrêter ce phénomène en dévannant très rapidement à l'aval.

1.4 Phénomènes étudiés dans cette thèse

Après avoir décrit et validé la méthode TSM lors de partie II, les écoulements en turbomachines sont étudiés dans la partie III. En particulier, l'écoulement de jeu est étudié au chapitre 7 sur la première roue du compresseur subsonique CME2 [68] où un traitement de carter axial tel que le préconise Wilke et Kau [105] est appliqué. Des simulations d'aubes en vibrations forcées sont conduites sur un rotor transsonique isolé dessiné par Turboméca au chapitre 8. Ce type de simulation en mouvement forcé est très utilisé pour déterminer la frontière de flottement d'une machine. Enfin, les interactions rotor/stator sont étudiées aux chapitres 7 et 9 sur les deux roues du compresseur CME2.

Chapitre 2

Modélisation

Pour réaliser des simulations numériques, les phénomènes précédemment décrits doivent être modélisés. En premier lieu, les modélisations courantes utilisées en mécanique des fluides numérique (CFD) sont passées en revue. Il s'agit principalement de la modélisation de la turbulence, très importante dans les écoulements que l'on souhaite simuler. Sa modélisation requiert donc une attention particulière et différentes méthodes sont passées en revue. Ensuite, plusieurs approches tenant compte, à des degrés divers, des caractéristiques des turbomachines comme les périodicités géométriques ou spatio-temporelle, sont présentées.

Chaque modélisation se voit simulée par différentes techniques numériques décrites au prochain chapitre.

2.1 Modélisation et simulation de la turbulence

Les techniques de modélisation et de simulation s'appliquant d'une manière générale aux écoulements de fluides turbulents sont maintenant présentées. La turbulence est en effet importante dans les écoulements en turbomachines. D'une modélisation totale (équations moyennées) à une simulation totale (simulation directe), quantité de méthodes de capture des échelles turbulentes coexistent. Quelques unes sont maintenant brièvement décrites.

2.1.1 Équations moyennées

La moyenne statistique, dite de Reynolds, de plusieurs réalisations possibles d'un écoulement engendre les équations de Navier-Stokes moyennées (RANS). La moyenne statistique enlève tout caractère aléatoire à l'écoulement, dont la turbulence qui se trouve modélisée par ses moments d'ordre plus ou moins élevés. En revanche, si l'écoulement est instationnaire et à la condition de réaliser une moyenne de phase synchronisée avec la période de l'harmonique principal du phénomène instationnaire, cette moyenne statistique ne supprime pas les instationnarités et le modèle RANS instationnaire (U-RANS) est obtenu.

Hypothèse est faite que les champs sont ergodiques, c'est-à-dire que les moyennes statistique et temporelle sont équivalentes. Si l'écoulement est moyenné sur la durée totale du signal, des équations stationnaires sont obtenues, il s'agit du modèle RANS. Si la moyenne temporelle est réalisée sur un instant assez grand pour moyenner les petites fluctuations mais assez court pour conserver l'aspect instationnaire des grandes fluctuations de l'écoulement, il s'agit du modèle

U-RANS. Les modélisations stationnaires (cf. § 2.2.1) simulées par la technique RANS sont les plus employées dans l'industrie car elles sont peu coûteuses. Les modélisations instationnaires (cf. § 2.2.2) simulées par la technique U-RANS commencent à être couramment utilisées dans l'industrie en aérodynamique externe. En turbomachine, des progrès sont encore à réaliser pour une utilisation courante des méthodes instationnaires dans un bureau d'études.

Il existe dans la littérature de très nombreux modèles de turbulence au premier et second ordre, dont Wilcox [104] donne une bonne introduction. Au premier ordre, la turbulence est modélisée par l'ajout d'une viscosité turbulente μ_t. Les modèles du premier ordre utilise l'hypothèse de Boussinesq (pour un écoulement incompressible) :

$$-\rho\overline{u_i'u_j'} = \mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_x} \right) + \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij}, \tag{2.1}$$

où k est l'énergie cinétique turbulente

$$k = \frac{\overline{u_i'u_i'}}{2}. \tag{2.2}$$

Pour un écoulement compressible, la moyenne de Reynolds est remplacée par la moyenne de Favre. Il existe des modèles algébriques comme celui de Baldwin et Lomax [7] et des modèles avec transports de une ou plusieurs quantités turbulentes. Parmi ces derniers, les modèles $k-\varepsilon$ et $k-\omega$ [104] (ϵ étant le taux de dissipation de la turbulence et $\omega \propto \varepsilon/k$) sont très utilisés.

Des modèles du second ordre, comme le « Reynolds Stress Model » (Launder *et al.* [59]), transportent les six termes du tenseur des contraintes et une autre quantité, en général le taux de dissipation de la turbulence, soient sept équations de transport. En plus d'une difficulté de mise en œuvre, ces modèles consomment trop de mémoire et de temps de calcul pour être utilisés dans l'industrie.

Des modèles de turbulence spécifiques à certaines applications (aérodynamique externe ou interne, présence ou absence de décollement, effet de courbure. . .) ont été également développés comme le modèle de Spalart et Allmaras [88] (une équation de transport), souvent utilisé en aérodynamique externe.

2.1.2 Simulations aux grandes échelles et directes

La simulation aux grandes échelles (LES) permet de simuler une partie du spectre de la turbulence. Un filtre est appliqué au-dessous duquel, un modèle, dit de sous-mailles, modélise la turbulence. Le modèle de Smagorinsky [84] est l'un des plus répandus. La LES permet de capturer beaucoup plus de structures de l'écoulement que la modélisation RANS, mais afin de capturer les échelles spatiales, le maillage doit être beaucoup plus raffiné. De même, l'échantillonnage temporel doit être plus fin. Cela rend la LES encore très coûteuse et limitée à des activités de recherche.

La simulation directe (DNS) entend simuler le spectre complet : aucune modélisation n'est effectuée comme le montre la figure 2.1 reproduite de Gravemeier [42]. Cela nécessite un raffinement encore plus important.

Le tableau 2.1 indique les ordres de grandeur pour les méthodes précédentes appliquées à une application réaliste rencontrée en aéronautique (nombre de Reynolds de l'ordre de quelques millions). Son auteur, Spalart [87], indique également une estimation de la disponibilité de ces méthodes dans l'industrie. Ces chiffres ont maintenant dix ans et de nombreux progrès ont été réalisés, notamment dans les architectures massivement parallèles. Ils indiquent cependant bien qu'actuellement, seule la méthode (U-)RANS est accessible au bureau d'étude d'un industriel.

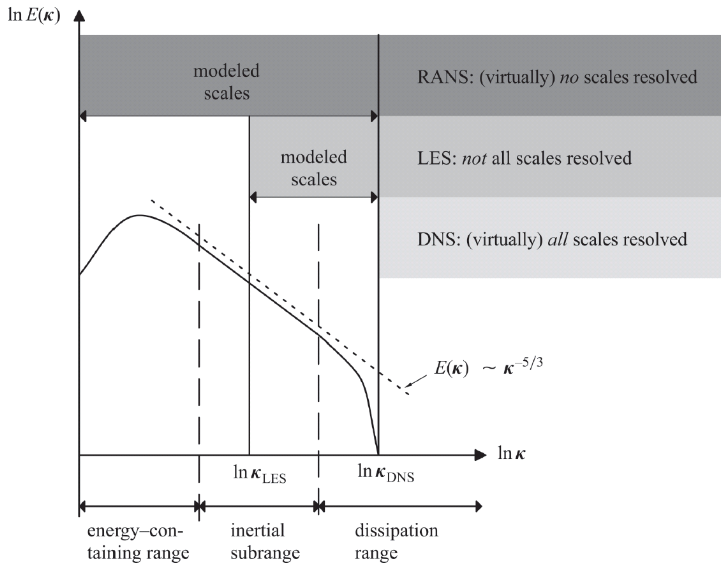


Figure 2.1 – Méthodes RANS, LES et DNS situées dans le spectre d'énergie de Kolmogorov. Reproduit de Gravemeier [42].

Méthode	Maillage	Pas de temps	Disponible en
U-RANS (2D)	10^5	$10^{3,5}$	1980
U-RANS (3D)	10^7	$10^{3,5}$	1995
LES	$10^{11,5}$	$10^{6,7}$	2045
DNS	10^{16}	$10^{7,7}$	2080

Table 2.1 – Évaluation des stratégies de calcul et de leur disponibilité pour des applications industrielles coûteuses (type aérodynamique automobile ou aéronautique). D'après Spalart [87].

2.2 Modélisations des écoulements en turbomachines

2.2.1 Modèles stationnaires

Les modèles stationnaires sont couramment utilisés dans l'industrie. Ils permettent des simulations rapides et ont longtemps offert un niveau de précision suffisant à l'ingénieur.

2.2.1.1 Plan de mélange

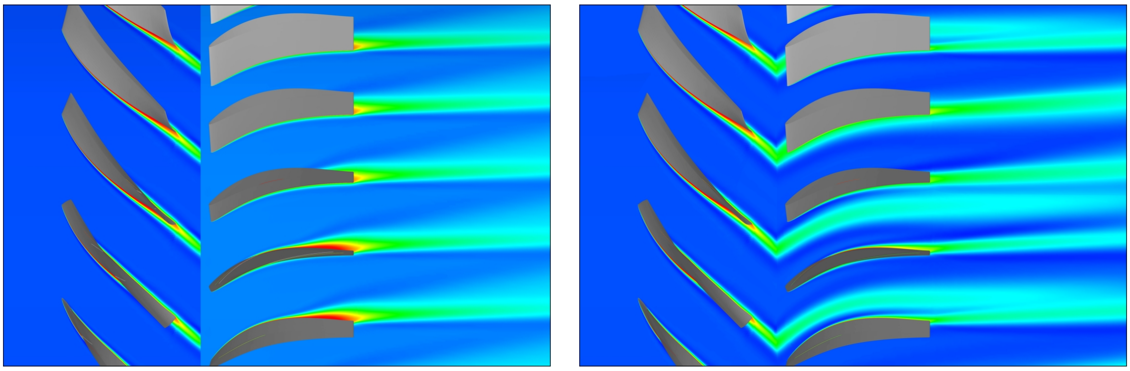
Le plan de mélange proposé par Denton et Singh [22] est un modèle très largement répandu. Cette technique permet de ne simuler qu'un canal inter-aube dans chaque roue ce qui représente le plus petit domaine de calcul possible. Un calcul stationnaire est ainsi réalisé dans chacune des roues considérées dans leur référentiel relatif. À l'interface entre deux roues (environ à mi-distance du bord de fuite de l'aube amont et du bord d'attaque de l'aube aval), l'écoulement est moyenné dans la direction azimutale pour fournir une condition limite à l'autre roue. On constate ainsi, par exemple Fig. 2.2(a), que les sillages ne traversent pas cette frontière : en réalité, ils sont moyennés sur l'étendue azimutale d'un canal. Les interactions instationnaires entre roues mobiles ne peuvent bien sûr pas être capturées, mais le plan de mélange est devenu un standard dans l'industrie.

2.2.1.2 Modèle « Frozen rotor »

Le modèle dit de « frozen rotor » (Brost *et al.* [10]) consiste à conserver le rotor et le stator à une position fixe. Cependant, les variables de l'écoulement ne sont pas moyennées en azimut mais directement transmises d'une roue à l'autre. Pour cela, l'étendue azimutale simulée dans chaque roue doit être la même. Si les nombres d'aubes diffèrent, il est nécessaire de simuler plusieurs canaux dans chaque roue formant un secteur de turbomachine, égale au plus petit commun entre les nombres d'aubes de chaque roue.

Cette technique permet d'étudier différentes positions relatives entre les deux roues et l'influence des sillages de la roue amont sur la roue aval. Ce processus est illustré Fig. 2.2(b) sur la machine CME2 qui comporte 30 aubes au rotor et 40 au stator. La simulation est effectuée sur un dixième de la machine, soit 3 aubes rotor face à 4 aubes stator. Comme pour le plan de mélange, le calcul est stationnaire dans le référentiel relatif à chaque roue. C'est pourquoi à partir de l'interface rotor/stator, les sillages en provenance du rotor – maintenu à une position fixe – sont simplement convectés dans le référentiel lié au stator et impactent ses aubes ou sont dissipés dans les canaux inter-aubes par les effets visqueux.

Dans ce cas, il est difficile de garantir la coïncidence des maillages de chaque roue. Des techniques de maillages non-coïncidents comme le proposent Rai [76] et Lerat et Wu [62] sont donc utilisées. Ces techniques permettent un traitement conservatif de l'interface pour toute position relative des aubages et assurent le changement de référentiel.



(a) Plan de mélange : les sillages ne traversent pas le raccord rotor/stator.

(b) « frozen rotor » : le rotor et le stator sont maintenus à une position fixe.

Figure 2.2 – Modélisations stationnaires en turbomachine (CME2, entropie à mi-hauteur de veine).

Très souvent, la simulation avec plan de mélange donne de meilleurs résultats que la technique « frozen rotor ». En effet, si la distance entre les deux roues est suffisamment grande, les hypothèses du modèle plan de mélange sont certainement plus réalistes que le sillage n'impactant la roue aval qu'en un seul point.

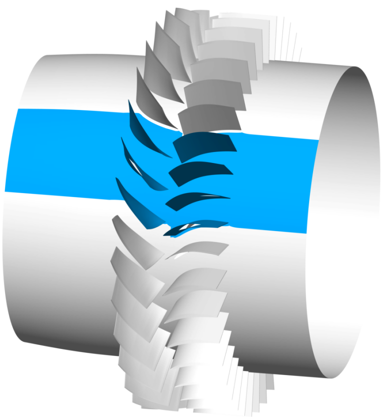
2.2.2 Modèles instationnaires

Les modélisations précédentes ne permettent pas de prendre en compte les phénomènes instationnaires décrits au premier chapitre. Si elles ont longtemps suffit au concepteur de turbomachines, les niveaux de performances exigés des nouvelles machines requièrent de prendre en compte ces instationnarités. Des approches plus sophistiquées, dans lesquelles les roues voient défiler les aubes des roues voisines, sont nécessaires (une revue des calculs d'écoulements instationnaires en turbomachine est présentée par He [48]).

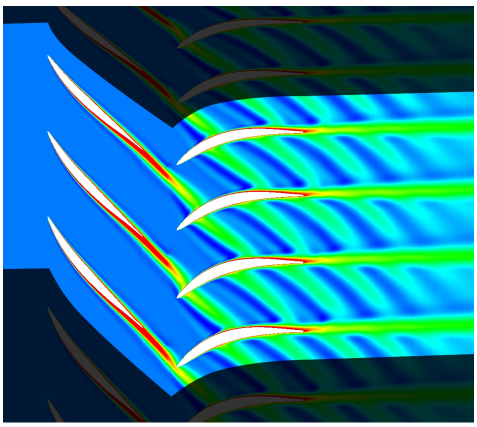
La rotation des roues mobiles impose aux simulations instationnaires d'être conduites sur la totalité d'une machine. Le domaine de calcul est alors très grand et généralement hors de portée des moyens de calculs actuels, surtout dans un contexte industriel. Il a été constaté qu'en l'absence d'instabilités aérodynamiques telles que les lâchers tourbillonnaires au bord de fuite des aubes, l'écoulement en turbomachine présente une double périodicité, à la fois temporelle et spatiale. Les modélisations suivantes prennent cette propriété en compte pour réduire le domaine de calcul à un secteur azimutal de la machine. Pour des points de fonctionnement instables, comme l'étude du décollement tournant, il est cependant nécessaire de simuler les roues complètes car le phénomène se propage sur toute la circonférence (voir Gourdain [41]).

2.2.2.1 Périodicité spatiale

Comme pour la technique « frozen rotor », la périodicité spatiale en azimut de l'écoulement est due à la périodicité du nombre d'aubes dans les roues. Un secteur de la machine, égale au plus petit commun multiple des nombres d'aubes, est considéré comme suffisant. L'écoulement aux frontières haute et basse des secteurs nouvellement créés est ainsi identique à une rotation près (cf. Fig. 2.3).



(a) Périodicité 1/10$^{\text{ème}}$



(b) Périodicité de l'écoulement aux frontières haute et basse

Figure 2.3 – Illustration de la périodicité spatiale en azimut du compresseur CME2.

2.2.2.2 Modification de la géométrie

La périodicité géométrique peut être très grande voire ne pas exister. En effet, les roues de turbomachines disposent souvent de nombres d'aubes premiers entre eux afin d'éviter des phénomènes de résonance. La géométrie d'une roue peut donc être modifiée afin de se ramener à un ratio d'aubes plus petit et une périodicité géométrique accessible au calcul (Arnone et Pacciani [3]).

Néanmoins, comme la géométrie réelle n'est pas simulée, les fréquences et amplitudes des fluctuations instationnaires entre le cas réel et le cas simulé peuvent différer. Pour minimiser cet impact, la corde des profils peut être modifiée de façon à conserver la solidité (rapport de la corde sur le pas angulaire). Li et He [63] montrent, par exemple, que les longueurs d'ondes des modes spatiaux d'interactions sont modifiés, avec une grande influence sur le « clocking » (position relative de roues ayant la même vitesse angulaire). Le point de blocage est également altéré. L'étude des mécanismes instationnaires reste cependant qualitativement intéressante.

2.2.2.3 Modèle spatio-temporel

Le modèle spatio-temporel développé par Erdos *et al.* [28] permet de réaliser des simulations instationnaires en ne considérant qu'un canal dans chaque roue quelle que soit la géométrie (*i.e.* le nombre d'aubes dans chaque roue). Grossièrement, la périodicité spatio-temporelle affirme que l'écoulement dans un canal est le même que celui du canal voisin mais à un autre instant. La périodicité spatiale existe toujours mais est déphasée en temps et non pas instantanée. Ottavy [73] vérifie expérimentalement cette propriété de l'écoulement.

Les frontières azimutales haute et basse d'un canal ont donc besoin d'être déphasées en temps, le déphasage dépendant du nombre d'aubes dans chaque roue. Gerolymos et Chapin [34] dérivent une expression analytique de ce déphasage permettant une mise en œuvre aisée de cette méthode dans un solveur CFD.

2.3 Modélisations retenues dans cette étude

Nous ne nous intéresserons pas aux phénomènes instables, comme le décollement tournant ou le pompage, et pouvons donc supposer une certaine périodicité spatiale de l'écoulement permettant de ne simuler qu'un secteur de la machine. La périodicité spatiale simple sera utilisée en premier lieu au chapitre 7 car elle est la plus aisée à mettre en œuvre. Cette périodicité spatiale sera obtenue suite à une modification de la géométrie de la machine CME2. La périodicité spatio-temporelle, offrant une utilisation plus générale, sera étudiée en détails aux chapitres 8 et 9. Dans ce dernier, la vraie géométrie du CME2 sera considérée.

Comme le démontre clairement le tableau 2.1, la seule alternative possible au monde industriel est la méthode (U-)RANS. La méthode U-RANS reste relativement coûteuse mais pourrait cependant être utilisée dans cette étude pour les calculs d'écoulements en turbomachine. Avant d'atteindre l'état périodique, un transitoire doit être dépassé comme l'illustre la figure 2.4 indiquant le débit dans une turbomachine en fonction du nombre de périodes de calcul. La durée de ce transitoire est inconnue à l'avance et dépend des cas, mais est équivalente à plusieurs périodes de calculs, typiquement quatre ou plus pour des applications d'aérodynamiques externe. Dans le domaine des turbomachines, ce nombre peut fortement augmenter (au moins 30 passages d'aubes Fig. 2.4). L'initialisation par un calcul stationnaire convergé permet de réduire ce transitoire mais il demande un effort supplémentaire pour sa mise en place.

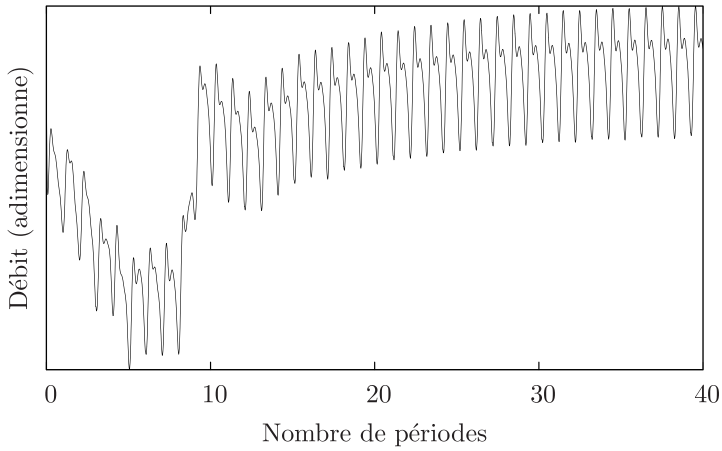


Figure 2.4 – Débit d'une turbomachine : transitoire instationnaire.

En fait, aucune information sur la nature périodique de l'écoulement n'est utilisée. La majorité de l'effort de calcul ne sert uniquement qu'à atteindre l'état périodique et ne sert pas à l'analyse physique ce qui conduit à un gâchis de temps de calcul. Cela est dû à la nature parabolique en temps des équations U-RANS qui implique que l'information se propage le long de lignes caractéristiques réelles. De plus, le temps est séquentiel : l'instant présent n'influence que les instants futurs. Or dans un écoulement périodique, l'instant présent influence également le passé puisque, par périodicité, le futur va reproduire le passé. Au final, le modèle U-RANS ne paraît pas très bien adapté à la simulation d'écoulements périodiques.

Une nouvelle classe de méthodes se propose de ne simuler que les écoulements périodiques, mais de manière beaucoup plus efficace que le modèle U-RANS. Si les variables conservatives sont périodiques en temps, elles peuvent être développées en séries de Fourier. Comme nous le verrons dans la suite, l'analyse de Fourier permet de transformer un calcul instationnaire en plusieurs calculs stationnaires couplés. Ces calculs stationnaires peuvent être facilement simulés à l'aide du modèle RANS. De plus, comme la périodicité est intrinsèque, le transitoire de convergence des calculs stationnaires est beaucoup mieux maîtrisé que le transitoire nécessaire aux méthodes évolutives en temps pour atteindre l'état périodique. Ces méthodes, dites harmoniques, jettent un pont entre les calculs stationnaires et les calculs instationnaires avec une avance en temps classique. Ces méthodes harmoniques sont développées en détails dans la deuxième partie de cette étude.

Chapitre 3

Simulation numérique

Maintenant que les phénomènes à étudier ont été définis et leurs modélisations décrites, il convient de se doter d'outils mathématiques afin de réaliser un programme informatique exécutant la simulation proprement dite. Cela consiste principalement à discrétiser les équations aux dérivées partielles du (U-)RANS en espace et en temps. Le solveur utilisé dans cette étude, *elsA*, est également présenté.

3.1 Discrétisation spatiale

Il existe trois principales méthodes de discrétisation spatiale utilisant un maillage volumique :

1. les différences finies : les variables de l'écoulement sont connues ponctuellement sur les points de maillage. Des schémas, basés sur des développements de Taylor, sont employés pour évaluer les dérivées en ces points [69].
2. Les volumes finis moyennent les variables de l'écoulement sur un volume de contrôle. L'application du théorème de Green sur la forme intégrale des équations de Navier-Stokes permet d'obtenir des intégrales de surfaces sur les faces d'une cellule de maillage. Les flux à travers ces surfaces sont calculés pour transmettre l'information d'une cellule à l'autre ce qui fait que cette méthode est intrinsèquement conservative (voir Versteeg et Malalasekra [100]). Elle est très utilisée en CFD.
3. Les éléments finis consistent à rechercher une solution approchée de la solution exacte sous la forme d'un champ défini par morceaux sur des sous domaines choisis parmi une famille arbitraire de champs (généralement polynômiaux). La méthode la plus courante est la méthode de Galerkine [1] (voir Eriksson *et al.* [29]).

Le solveur *elsA* utilise la méthode des volumes finis, la plus répandue en mécanique des fluides numérique pour des applications d'écoulements compressibles. Dans ce cas, les équations de Navier-Stokes, dites semi-discrètes car la discrétisation spatiale est effectuée mais le temps reste continu, sont

$$V\frac{\partial W}{\partial t} + R(W) = 0, \tag{3.1}$$

1. L'orthographe Galerkine est ici préférée à l'orthographe anglo-saxonne (Galerkin) car la francisation de nom russe rajoute habituellement un e final (Raspoutine, Soljenitsyne, Elstine). D'après Ern [30].

où V est le volume constant d'une cellule. L'opérateur des résidus R résulte de la discrétisation spatiale des termes convectifs et diffusifs :

$$R(W) = \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(W), \tag{3.2}$$

avec $F_i = F_{c_i} - F_{v_i}$ et

$$F_{c_i} = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i u_1 + p\delta_{i1} \\ \rho u_i u_2 + p\delta_{i2} \\ \rho u_i u_3 + p\delta_{i3} \\ \rho u_i E + p u_i \end{pmatrix}, \quad F_{v_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{i1} \\ \tau_{i2} \\ \tau_{i3} \\ u \cdot \tau_i - q_i \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

3.1.1 Technique de maillages

La méthode des volumes finis peut être appliquée sur trois types de maillages : structuré, non-structuré et hybride.

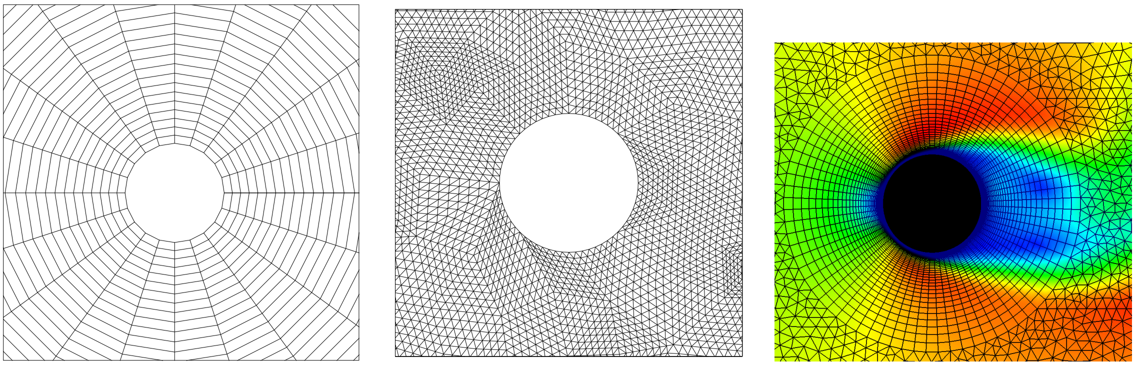
Un maillage structuré est caractérisé par une connectivité régulière des cellules de maillages. Il est composé de quadrangles en deux dimensions et d'hexaèdres en trois dimensions. Il peut ainsi être stocké dans un tableau à deux ou trois dimensions avec adressage direct. La régularité des connectivités entraîne une direction privilégiée, très utilisée pour la capture de couche limite. En pratique, il est impossible de discrétiser un domaine de calcul avec un seul et unique bloc car les domaines de calcul sont souvent associés à des géométries complexes pour lesquelles le recouvrement avec un seul bloc est impossible. Il est alors nécessaire d'utiliser plusieurs blocs structurés. Autre contrainte, le raffinement du maillage est délicat car les lignes de maillages se propagent dans la direction raffinée et ne permettent pas toujours de raffinement local. Cela entraîne un grand nombre de points du fait de zones qui n'ont pas à être raffinées. Enfin, la génération d'un maillage structuré n'est pas chose aisée et peut s'avérer relativement longue (jusqu'à être non-négligeable par rapport au temps de calcul d'une simulation). Des algorithmes complexes permettant la transmission d'information entre blocs non-coïncidents déjà mentionnés § 2.2.1.2 autorisent un processus de maillage moins contraignant.

Un maillage non-structuré dispose d'une connectivité irrégulière. Il peut être composé de n'importe quel élément, généralement des triangles en 2D. La taille mémoire d'un maillage non-structuré est toujours plus grande qu'un maillage structuré car, n'ayant pas d'adressage direct, il est nécessaire de stocker les connectivités entre cellules. En revanche, il est aisé de générer des maillages non-structurés autour de géométries complexes et de raffiner localement. Il est intéressant de noter qu'un solveur non-structuré peut également être appliqué sur un maillage structuré, qui sera néanmoins adressé indirectement.

Pour tirer partie des avantages des deux types de maillages, des maillages hybrides ont également été développés. Ils sont généralement structurés proche d'une paroi pour capturer la couche limite et non-structurés dans le reste du domaine ou dans les zones de géométrie complexe.

Ces trois types de maillages sont illustrés Fig. 3.1.

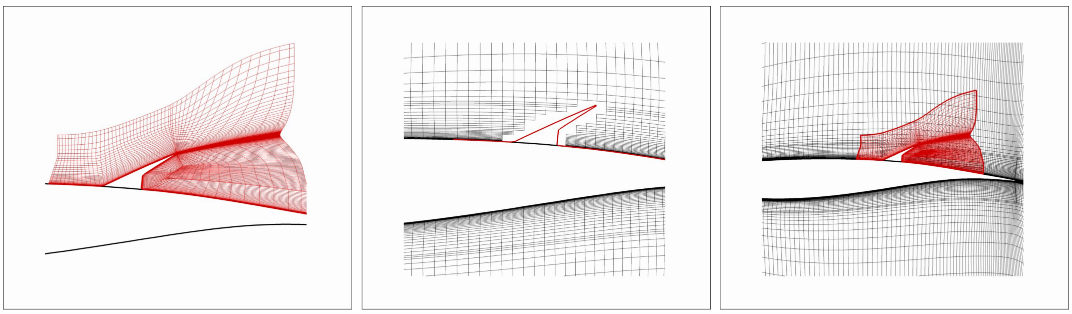
Enfin, il existe une méthode de maillages recouvrants simplifiant considérablement le processus de maillage. La technique « Chimère [8] » permet à chaque élément d'être maillé séparément et l'assemblage est réalisé automatiquement pendant la simulation. Il est ainsi aisé de réaliser des applications de calage variable des aubes d'un compresseur par exemple. L'aube est maillée



(a) Maillage structuré (b) Maillage non-structuré (c) Maillage hybride (université de Pau)

Figure 3.1 – Maillages structuré et non-structuré en deux dimensions.

séparément du domaine interne et introduite au calage souhaité. La technique est illustrée Fig. 3.2 sur une application d'aérodynamique externe. Deux maillages sont disponibles : celui d'un aéro-frein (a) et d'un profil d'aile (b). Certaines cellules de ce dernier sont « masquées » par l'aéro-frein. Le maillage de l'aéro-frein est alors rajouté par dessus le maillage de fond (c). Des interpolations permettent au deux maillages recouvrants de communiquer.



(a) maillage aéro-frein (b) maillage profil masqué (c) maillages assemblés

Figure 3.2 – Illustration de la technique Chimère.

3.2 Discrétisation temporelle

Une fois la discrétisation spatiale effectuée, il convient maintenant de discrétiser l'équation semi-discrète Eq. (3.1) en temps. Cette équation est une simple équation différentielle ordinaire du premier ordre et peut-être discrétisée par n'importe quel schéma classique comme les méthodes d'Euler progressif et rétrograde ou encore des méthodes à plusieurs pas comme Runge-Kutta (voir Press *et al.* [74]). Cependant, des spécificités liées au caractère stationnaire ou instationnaire de l'écoulement permettent certaines optimisations.

3.2.1 Avance en pseudo-temps d'un calcul d'écoulement stationnaire

Si l'écoulement est stationnaire, la dérivée temporelle de l'équation (3.1) s'annule. Afin de converger le calcul d'une solution initiale vers la solution d'écoulement stationnaire, les itérations s'effectuent sur un pseudo-temps t^* :

$$V\frac{\partial W}{\partial t^*} + R(W) = 0, \tag{3.4}$$

La convergence est considérée atteinte quand la dérivée sur le pseudo-temps a atteint une valeur suffisamment proche de zéro.

3.2.1.1 Pas de temps local

Seul l'état convergé d'un calcul d'écoulement stationnaire (à savoir l'annulation de la dérivée sur le pseudo-temps) est intéressant. Le transitoire permettant d'atteindre cet état n'est en général pas physique. Aussi, il n'est pas nécessaire d'avoir une cohérence temporelle entre toutes les cellules. Chacune peut disposer de son propre pas de pseudo-temps, enlevant la contrainte du plus petit pas de temps nécessaire dans un calcul d'écoulement instationnaire. L'information se propage ainsi beaucoup plus vite dans le domaine de calcul et la convergence est plus rapide. Le pas de temps local à chaque cellule est alors calculé par

$$\Delta t^* = \mathrm{CFL}\frac{d}{U + c_0}, \tag{3.5}$$

où d désigne une dimension caractéristiques de la cellule. Le nombre de Courant-Friedriech-Levy (CFL) est renseigné par l'utilisateur. La borne maximale de stabilité dépend du schéma de discrétisation temporelle employé. La fraction d'une dimension sur la plus grande vitesse caractéristique empêche l'information de « sauter » une cellule.

3.2.1.2 Méthode multi-grille

La convergence de calculs stationnaires peut également grandement bénéficier de la technique de multi-grilles développée par Brandt [9] pour les problèmes paraboliques et par Jameson [53] pour les problèmes hyperboliques. En effet, la convergence d'un calcul stationnaire a tendance à stagner après un certain nombre d'itérations. Ce problème est d'avantage présent pour les maillages raffinés que pour les maillages grossiers. Une analyse fine montre que le taux de convergence est une fonction de la fréquence de l'erreur du champ, *i.e.* le gradient de l'erreur d'une cellule à l'autre. Si l'erreur est distribuée selon une haute fréquence, la convergence est rapide. De plus, la vitesse de convergence est proportionnelle au nombre de cellules dans une direction car le pas de temps calculé Eq. (3.5) fait que l'information ne se déplace pas plus d'une cellule par itération. Pour obtenir une convergence propre, il est nécessaire que l'information parcourt plusieurs fois le domaine de calcul. Afin de tirer parti de ces faits, la méthode multi-grilles est basée sur des grilles dé-raffinées ou grossières pour lesquelles une erreur à basse fréquence sur la grille fine sera vue comme une erreur à haute fréquence sur la grille grossière. De plus, le nombre de cellules dans une direction sera réduit. Cette méthode accélère ainsi fortement la convergence.

La première étape, l'agglomération, consiste à créer les maillages grossiers, typiquement en ne prenant qu'un point sur deux dans chaque direction du maillage initial (pour un maillage structuré). Plusieurs niveaux de grilles peuvent être utilisés. La restriction est l'interpolation des variables de l'écoulement sur un maillage plus grossier et l'interpolation inverse se nomme la prolongation.

Un cycle multi-grilles typique, dit en « V », est illustré Fig. 3.3. Il commence à la grille la plus fine. Le champ est ensuite restreint sur la première grille grossière. L'algorithme d'avance en pseudo-temps choisi est mis en œuvre avant restriction sur un deuxième niveau de grille grossière. Une fois la solution obtenue sur la grille la plus grossière, celle-ci est prolongée au niveau de grille supérieur jusqu'à la grille fine. Les variations dans le nombre de grilles grossières, le nombre d'itérations sur chaque grille et les différentes phases de restriction et de prolongation entraînent de nombreuses possibilités.

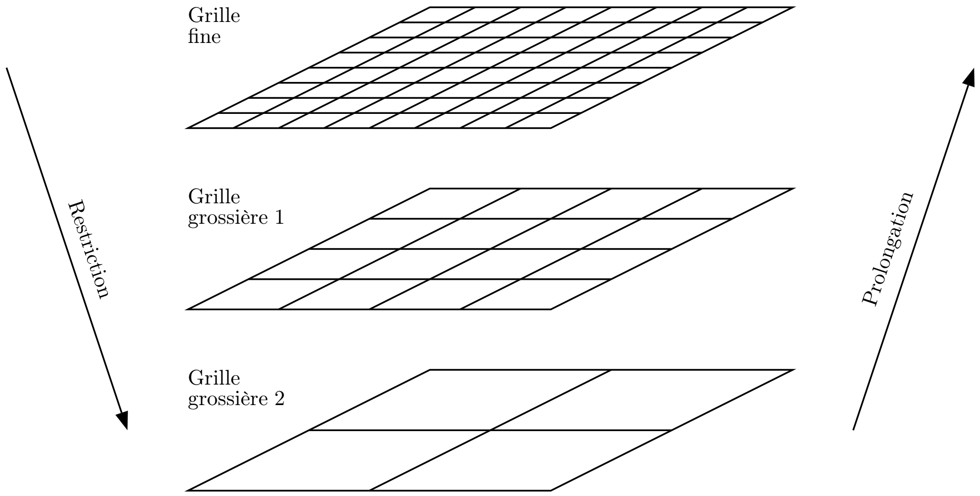


Figure 3.3 – Illustration d'un cycle multi-grilles en V à deux niveaux de grilles grossières sur une grille fine 8×8 en deux dimensions.

3.2.2 Avance en temps d'un calcul d'écoulement instationnaire

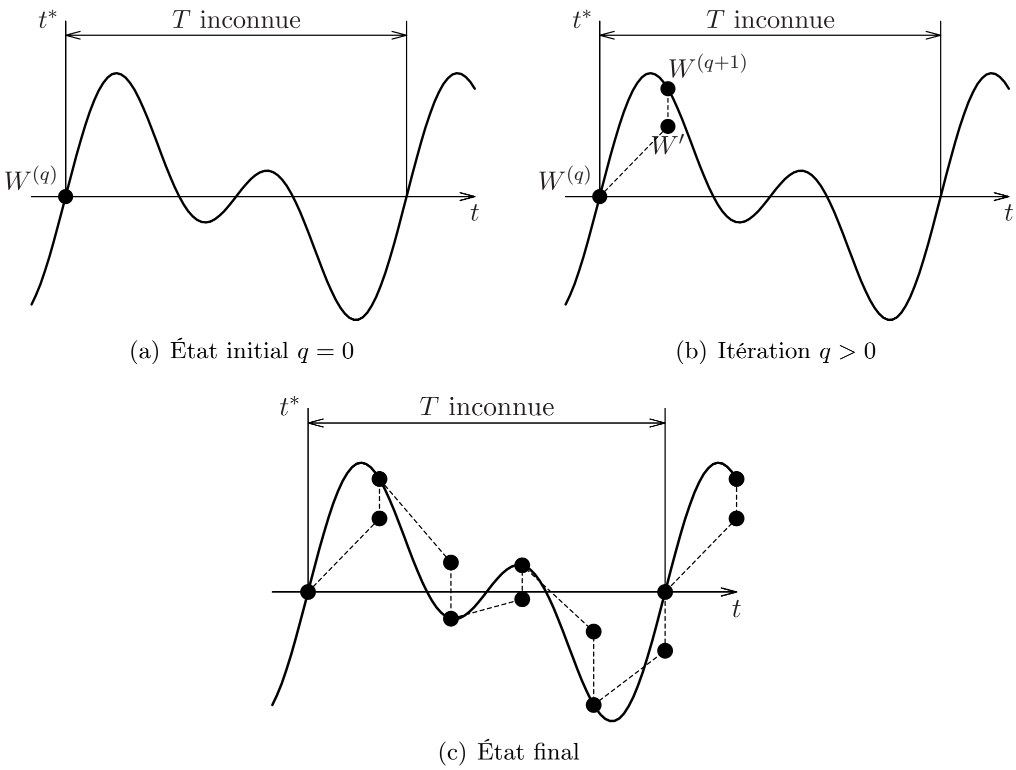
Au contraire d'un calcul stationnaire, une simulation instationnaire doit avoir une cohérence temporelle dans tout le domaine de calcul et utilise donc le même pas de temps physique dans toutes les cellules, *i.e.* le plus petit pas de temps donné par Eq. (3.5). Ce pas de temps est proportionnel au volume de la cellule. Dans une turbomachine, les nombreuses parois imposent des maillages très raffinés proche de ces parois pour capturer les couches limites ce qui entraîne un pas de temps global très petit.

L'utilisation d'une méthode temporelle implicite permet de relâcher un peu cette contrainte. L'absence de linéarisation en temps oblige à résoudre un système d'équations non-linéaires à chaque pas de temps physique. Cette résolution peut se faire par une méthode directe (par exemple méthode de Newton) ou alors en résolvant un « faux transitoire » par rapport à une variable de temps fictive (méthode à pas de temps dual, DTS). Introduite par Jameson [54], cette dernière comporte donc deux dérivées temporelles, une sur le temps physique et une sur un pseudo-temps :

$$V\frac{\partial W}{\partial t^*} + V\frac{\partial W}{\partial t} + R(W) = 0, \tag{3.6}$$

À chaque instant physique t, une boucle imbriquée avance sur le pseudo-temps t^*. Ainsi, le premier terme de Eq. (3.6) s'annule et l'équation instationnaire Eq. (3.1) est retrouvée. La résolution d'un système stationnaire à chaque instant permet l'utilisation de pas de temps physique Δt beaucoup plus grands que ceux autorisés par les méthodes classiques à simple pas de temps. De plus, la boucle interne bénéficie des deux techniques d'accélération de convergence introduite à la section précédente. Si le pas de temps local est utilisé, il faut s'assurer que la boucle interne a bien convergé sinon le champ risquerait d'être incohérent dans le domaine de calcul. Un compromis doit donc être trouvé entre le pas de temps physique et le nombre de sous-itérations.

Cette technique est illustrée Fig. 3.4 sur une variable d'écoulement périodique en temps. En (a), l'écoulement est à une itération q quelconque du calcul (*i.e.* un instant quelconque). En (b), le schéma d'avance en temps physique est exécuté qui mène $W^{(q)}$ à W'. Comme le pas de temps est volontairement trop grand, W' ne coïncide pas avec la solution. Pour cela, un calcul stationnaire sur le temps fictif est mené à convergence pour atteindre $W^{(q+1)}$. Ce schéma est répété à chaque instant physique et au final, en (c), l'algorithme DTS a parcouru toute la période. Le DTS peut-être appliqué à une grande gamme de calculs instationnaires, mais dans le cas d'un écoulement périodique en temps, la périodicité n'est pas intrinsèquement prise en compte.



(a) État initial $q = 0$

(b) Itération $q > 0$

(c) État final

Figure 3.4 – Schéma de fonctionnement du DTS.

3.3 Le solveur *elsA*

Le solveur *elsA* [2] (ensemble logiciel pour la simulation en aérodynamique) est un projet initié par l'ONERA en 1997, qui a décidé de capitaliser son expérience en code CFD acquise avec le code CANARI, dédié aux écoulements subsonique et transsonique en turbomachine et configuration avion, et le code FLU3M, dédié aux écoulements supersoniques rencontrés dans les applications de fusées et missiles. Le solveur *elsA* est co-développé par le CERFACS depuis 2001.

Il permet de traiter des applications multidisciplinaires comportant de l'aérodynamique comme l'aéro-élasticité ou l'aéro-acoustique. Les applications sont variées et principalement orientées vers l'aéronautique (avions, hélicoptères, turbomachines, missiles, fusées, entrées d'air, tuyères. . .). Ce solveur fédère la recherche académique et les applications industrielles. Un statut récent du solveur est donné par Cambier et Veuillot [13].

Le solveur *elsA* utilise la formulation des volumes finis basée sur des maillages structurés. De nombreux types de simulations sont disponibles (Euler, (U-)RANS, LES. . .). D'un point de vue conception logicielle, *elsA* bénéficie d'une conception orientée objet et est écrit en C++ avec des routines de calcul de bas niveaux écrites en Fortran pour obtenir les meilleures performances. L'interface avec l'utilisateur est assurée par une sur-couche Python.

Synthèse

Différentes techniques de discrétisation spatiales et temporelles couramment utilisées en CFD ont été présentées. Elles seront mises en œuvre dans la suite de cette étude par l'intermédiaire du solveur *elsA*.

Les méthodes d'équilibrage harmoniques sont maintenant présentées en détails. La « Time Spectral Method (TSM) », satisfaisant à la fois les besoins de simulations et les contraintes induites par *elsA*, est validée sur des applications d'aérodynamique externe puis en turbomachines.

2. http://elsa.onera.fr/

Deuxième partie

Méthode d'équilibrage harmonique

Chapitre 4

Présentation des méthodes harmoniques

La littérature comporte de multiples approches des méthodes harmoniques. Celles-ci sont depuis longtemps utilisées dans des domaines comme le calcul des structures (Kryloff et Boboliuboff [58]) ou l'électronique (Gilmore et Steer [37]). Ces méthodes ont été introduites en CFD par des turbomachinistes cherchant à réduire le temps de calcul nécessaire aux simulations d'écoulements internes à une machine tournante. Les premiers cas traités sont des écoulements non-visqueux autour de profils en deux dimensions. Au final, des machines multi-étages en trois dimensions et résolvant les équations de Navier-Stokes sont simulées. Ces méthodes trouvent aussi leur intérêt en aérodynamique externe. Les principales approches sont décrites dans les sections suivantes.

4.1 Méthode harmonique linéaire

L'une des premières méthodes à utiliser l'analyse harmonique est la méthode dite d'Euler linéarisé [43, 99]. La forme intégrale des équations d'Euler instationnaires en deux dimensions sur une aire mobile A de vitesse s et de frontière δA est considérée :

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint_A W \,\mathrm{d}A + \oint_{\delta A} [F_{c_x}\,\mathrm{d}y + F_{c_y}\,\mathrm{d}x] = 0, \tag{4.1}$$

où le vecteur des variables conservatives et les termes convectifs sont

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}, \qquad F_{c_x} = \begin{pmatrix} \rho(u-s_x) \\ \rho(u-s_x)u+p \\ \rho(u-s_x)v \\ \rho(u-s_x)H \end{pmatrix}, \qquad F_{c_y} = \begin{pmatrix} \rho(v-s_y) \\ \rho u(v-s_y) \\ \rho v(v-s_y)+p \\ \rho(v-s_y)H \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Afin de fermer le problème, une équation d'état sur les gaz est utilisée pour définir la pression p.

La méthode d'Euler linéarisée suppose que les changements temporels ou spatiaux d'une variable de l'écoulement sont très petits par rapport à un état de base. Dans le cadre des méthodes de linéarisation, l'état de base choisi est un écoulement stationnaire et donc Eq. (4.1) peut être linéarisée autour de cet écoulement stationnaire. Les variables conservatives sont ainsi divisées en deux parties : une partie stationnaire $\overline{\overline{W}}$ à laquelle se rajoutent des petites perturbations $\widetilde{W}$ sous forme harmonique :

$$W = \overline{\overline{W}} + \widetilde{W}, \qquad \widetilde{W} = \widehat{W}e^{i\omega t}, \tag{4.3}$$

où $\widehat{W}$ est le vecteur des amplitudes complexes de la perturbation des variables conservatives.

L'équation (4.3) est substituée dans Eq. (4.1) et le résultat, tronqué à l'ordre 1, peut également être divisée en deux parties : une base stationnaire

$$\oint_{\delta A} [\overline{\overline{F}}_{c_x}\,\mathrm{d}y + \overline{\overline{F}}_{c_y}\,\mathrm{d}x] = 0, \tag{4.4}$$

et l'équation d'Euler linéarisée :

$$\oint_{\delta A} [\widehat{F}_{c_x}\,\mathrm{d}y + \widehat{F}_{c_y}\mathrm{d}x] = -i\omega \iint_A \widehat{W}\mathrm{d}A. \tag{4.5}$$

avec les flux

$$\widehat{F}_{c_x} = \begin{pmatrix} \widehat{\rho u} \\ \widehat{u}(\overline{\rho u}) + \overline{u}(\widehat{\rho u}) + \widehat{p} \\ \widehat{u}(\overline{\rho v}) + \overline{u}(\widehat{\rho v}) \\ \widehat{H}\overline{\rho u} + \overline{H}\widehat{\rho u} \end{pmatrix}, \qquad \widehat{F}_{c_y} = \begin{pmatrix} \widehat{\rho v} \\ \widehat{u}(\overline{\rho v}) + \overline{u}(\widehat{\rho v}) \\ \widehat{v}(\overline{\rho v}) + \overline{v}(\widehat{\rho v}) + \widehat{p} \\ \widehat{H}\overline{\rho v} + \overline{H}\widehat{\rho v} \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Les termes de l'équation des amplitudes complexes Eq. (4.5) sont calculés à partir de l'équation stationnaire (4.4) qui doit donc être résolue d'abord. Ces deux équations sont indépendantes du temps. Pour en obtenir une solution, la technique du pseudo-temps t^* est utilisée : les variables conservatives W et de perturbation $\widehat{W}$ sont supposées dépendre du temps et de l'espace de sorte que Eq. (4.5), par exemple, devienne :

$$\frac{\partial}{\partial t^*} \iint_A \widehat{W}\,\mathrm{d}A + \oint_{\delta A} [\widehat{F}_{c_x}\,\mathrm{d}y + \widehat{F}_{c_y}\mathrm{d}x] = -i\omega \iint_A \widehat{W}\mathrm{d}A. \tag{4.7}$$

L'équation obtenue est maintenant hyperbolique en temps. Au fur et à mesure que le pseudo-temps avance, $\widehat{W}$ atteint un état stationnaire annulant le premier terme de Eq. (4.7) et Eq. (4.5) est retrouvée. Les méthodes de pas de temps local et de multi-grilles peuvent être utilisées pour accélérer le calcul.

Pour résumer, la méthode d'Euler linéarisée revient à simuler un écoulement instationnaire en résolvant deux calculs stationnaires Eq. (4.4) et Eq. (4.5). Cette dernière équation, calculant l'amplitude instationnaire des perturbations, est résolue dans le domaine fréquentiel. La plupart des langages de programmation actuels ne gérant que les nombres réels, l'équation Eq. (4.7) est généralement répartie en deux équations, l'une pour la partie réelle, l'autre pour la partie imaginaire, de sorte qu'au final, il y a trois équations vectorielles de transport stationnaires à résoudre.

4.2 Méthode harmonique non-linéaire

La méthode précédente est très performante en terme de temps de calcul, mais l'hypothèse de linéarité limite la précision des simulations. Les écoulements rencontrés en turbomachines sont généralement fortement turbulents et non-linéaires et nécessitent une meilleure méthode. Ning et He [71] proposent de prendre en compte les non-linéarités avec la méthode Non Linear Harmonic (NLH).

4.2.1 Écoulements non-visqueux

La différence, simple mais significative, est de prendre comme base pour les perturbations harmoniques, non pas une variable stationnaire de l'écoulement, mais plutôt une moyenne en temps. De par la non-linéarité des équations de l'écoulement, le fait de moyenner génère des termes supplémentaires qui peuvent être considérés comme les effets non-linéaires dans l'écoulement moyenné. Une variable de l'écoulement est divisée en deux parties : une valeur moyennée en temps $\overline{W}$ et une petite perturbation harmonique :

$$W = \overline{W} + \widetilde{W}, \qquad \widetilde{W} = \widehat{W} e^{i\omega t}, \tag{4.8}$$

$\overline{W}$ est le vecteur des variables conservatives moyennées en temps. L'équation (4.8) est substituée dans l'équation originale Eq. (4.1), et moyennée en temps :

$$\oint_{\delta A} [\overline{F}_{c_x} \mathrm{d}y + \overline{F}_{c_y} \mathrm{d}x] = 0, \tag{4.9}$$

avec les flux moyennés en temps

$$\overline{F}_{c_x} = \begin{pmatrix} \overline{\rho u} \\ \overline{u}(\overline{\rho u}) + \overline{p} + \overline{(\widetilde{\rho u})\widetilde{u}} \\ \overline{v}(\overline{\rho u}) + \overline{(\widetilde{\rho u})\widetilde{v}} \\ \overline{H}(\overline{\rho u}) + \overline{\widetilde{H}(\widetilde{\rho u})} \end{pmatrix}, \qquad \overline{F}_{c_y} = \begin{pmatrix} \overline{\rho v} \\ \overline{u}(\overline{\rho v}) + \overline{(\widetilde{\rho v})\widetilde{u}} \\ \overline{v}(\overline{\rho v}) + \overline{p} + \overline{(\widetilde{\rho v})\widetilde{v}} \\ \overline{H}(\overline{\rho v}) + \overline{\widetilde{H}(\widetilde{\rho v})} \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

En comparant avec les flux Eq. (4.2), on constate

1. que l'équation de continuité reste la même : la valeur moyenne du débit entrant et sortant doit être conservée ;
2. qu'à cause des non-linéarités des équations de conservation des quantités de mouvement et de l'énergie, des termes supplémentaires sont apparus. Ils sont similaires aux termes turbulents du tenseur de Reynolds.

Dans l'équation moyennée en temps, les termes de tension instationnaires requièrent des relations supplémentaires pour que le problème soit bien posé. Pour un écoulement périodique, ils peuvent être évalués grâce à la phase et l'amplitude des perturbations. Par exemple, $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ sont deux quantités variant en forme harmonique, donc la moyenne temporelle $\overline{\tilde{u}\tilde{v}}$ sur une période d'oscillation est :

$$\overline{\tilde{u}\tilde{v}} = \frac{1}{2} |\hat{u}| \, |\hat{v}| \cos(\phi_{uv}), \tag{4.11}$$

où ϕ_{uv} est l'angle de phase relative entre $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$.

Les perturbations instationnaires peuvent être obtenues en résolvant l'équation de perturbation du premier ordre. Cette équation est la même que celle d'Euler linéarisé :

$$\oint_{\delta A} [\widehat{F}_{c_x} \, \mathrm{d}y + \widehat{F}_{c_y} \mathrm{d}x] = -i\omega \iint_A \widehat{W} \mathrm{d}A, \tag{4.12}$$

Les termes supplémentaires dans Eq. (4.9) sont évalués grâce à la solution de l'équation de perturbation du premier ordre Eq. (4.12), tandis que les coefficients de l'équation de perturbation sont évalués grâce à la solution de l'équation moyenne Eq. (4.9). Il y a un couplage très fort entre les deux équations. La procédure de couplage peut avoir d'importantes répercutions

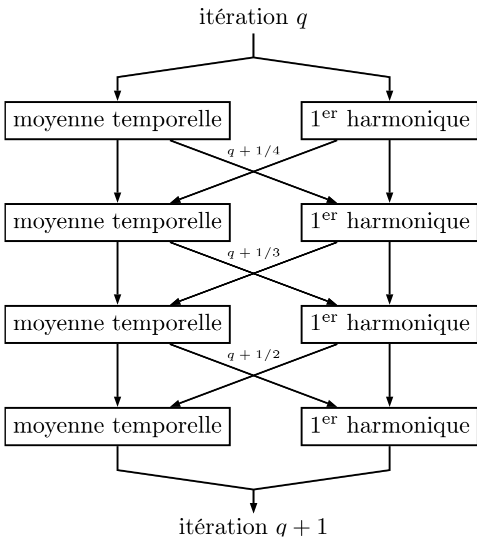


Figure 4.1 – Intégration temporelle de la méthode harmonique non-linéaire. D'après Ning et He [71].

sur la convergence et la précision, surtout si les non-linéarités sont importantes. Ning et He [71] illustrent ce couplage dans le cas d'un schéma Runge-Kutta à quatre pas (RK4) reproduit figure 4.1.

La méthode NLH est appliquée avec succès sur un cas de tube à choc et un cas de flottement de cascade d'aubes de compresseur en régime supersonique avec un nombre de Mach d'entrée de 1,05. La vibration entraîne un déphasage aux frontières haute et basse d'un canal. Une analyse de Fourier est conduite sur le champ de pression instationnaire dans le canal. Les auteurs montrent clairement la différence entre l'écoulement stationnaire obtenu par la méthode de linéarisation et l'écoulement moyenné en temps obtenu par la NLH. Celle-ci donne des résultats satisfaisants comparés à un calcul instationnaire de référence utilisant une marche en temps classique.

4.2.2 Écoulements visqueux

Les même auteurs étendent la méthode aux écoulements visqueux [50]. Ils considèrent les équations de Navier-Stokes en deux dimensions sous forme intégrale :

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint_A W\,\mathrm{d}A + \oint_{\delta A}[F_{c_x}\,\mathrm{d}y + F_{c_y}\,\mathrm{d}x] = \oint_{\delta A}[F_{v_x}\mathrm{d}y + F_{v_y}\mathrm{d}x]. \tag{4.13}$$

Les flux convectifs sont les mêmes qu'à Eq. (4.2) et les flux visqueux sont

$$F_{v_x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ -q_x + u\tau_{xx} + v\tau_{xy} \end{pmatrix}, \qquad F_{v_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ -q_y + u\tau_{xy} + v\tau_{yy} \end{pmatrix}, \tag{4.14}$$

avec les taux de déformation et contraintes du tenseur de Reynolds modélisé par l'hypothèse de Boussinesq

$$\tau_{xx} = \frac{2}{3}\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad \tau_{yy} = \frac{2}{3}\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad \tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right). \tag{4.15}$$

Le flux de chaleur q suit la loi de Fourier

$$q_i = -\kappa\frac{\partial T}{\partial i}, \quad i = (x, y). \tag{4.16}$$

La viscosité μ est la somme de la viscosité laminaire μ_{lam} et de la viscosité turbulente μ_{turb}. La première provient de l'application de la loi de Sutherland tandis que la seconde est calculée grâce à un modèle de turbulence (dans l'article [50], il s'agit du modèle algébrique de Balwin-Lomax [7]).

En insérant Eq. (4.8) dans Eq. (4.13) et en moyennant en temps, on obtient l'équation moyennée suivante :

$$\oint_{\delta A}[\overline{F}_{c_x}\mathrm{d}y + \overline{F}_{c_y}\mathrm{d}x] = \oint_{\delta A}[\overline{F}_{v_x}\mathrm{d}y + \overline{F}_{v_y}\mathrm{d}x]. \tag{4.17}$$

avec les termes convectifs moyennés identiques à Eq. (4.10). Les termes diffusifs moyennés sont :

$$\overline{F}_{v_x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\tau}_{xx} \\ \overline{\tau}_{xy} \\ -\overline{q}_x + \overline{u}\,\overline{\tau}_{xx} + \overline{v}\,\overline{\tau}_{xy} + \overline{\widetilde{u}\widetilde{\tau}_{xx}} + \overline{\widetilde{v}\widetilde{\tau}_{xy}} \end{pmatrix}, \tag{4.18}$$

$$\overline{F}_{v_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\tau}_{xy} \\ \overline{\tau}_{yy} \\ -\overline{q}_y + \overline{u}\,\overline{\tau}_{xy} + \overline{v}\,\overline{\tau}_{yy} + \overline{\widetilde{u}\widetilde{\tau}_{xy}} + \overline{\widetilde{v}\widetilde{\tau}_{yy}} \end{pmatrix}. \tag{4.19}$$

Si on compare Eq. (4.17) à Eq. (4.13), on constate que des termes supplémentaires sont apparus dans les équations de conservation des quantités de mouvement et de l'énergie dûs aux non-linéarités.

Ces nouveaux termes font appel à des variables non-conservatives moyennées pour lesquelles il faut prendre des précautions. Ainsi la moyenne temporelle de la vitesse axiale est calculée par

$$\overline{u} = \frac{\overline{\rho u} - \overline{\widetilde{\rho}\widetilde{u}}}{\overline{\rho}}. \tag{4.20}$$

Afin de fermer le problème, des relations du type Eq. (4.11) sont utilisées.

L'équation des perturbations complexes est

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint_A \widetilde{W}\mathrm{d}A + \oint_{\delta A}\left[(\widetilde{F}_{c_x} - \widetilde{F}_{v_x})\mathrm{d}y + (\widetilde{F}_{c_y} - \widetilde{F}_{v_y})\mathrm{d}x\right] = 0, \tag{4.21}$$

avec les amplitudes complexes des flux

$$\widetilde{F}_{c_x} = \begin{pmatrix} \widetilde{\rho u} \\ \widetilde{u}(\overline{\rho u}) + \overline{u}(\widetilde{\rho u}) + \widetilde{p} \\ \widetilde{u}(\overline{\rho v}) + \overline{u}(\widetilde{\rho v}) \\ \widetilde{H}\overline{\rho u} + \overline{H}\widetilde{\rho u} \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{F}_{c_y} = \begin{pmatrix} \widetilde{\rho v} \\ \widetilde{u}(\overline{\rho v}) + \overline{u}(\widetilde{\rho v}) \\ \widetilde{v}(\overline{\rho v}) + \overline{v}(\widetilde{\rho v}) + \widetilde{p} \\ \widetilde{H}\overline{\rho v} + \overline{H}\widetilde{\rho v} \end{pmatrix}, \tag{4.22}$$

$$\widetilde{F}_{v_x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \widetilde{\tau}_{xx} \\ \widetilde{\tau}_{xy} \\ -\widetilde{q}_x + \overline{u}\,\widetilde{\tau}_{xx} + \overline{v}\widetilde{\tau}_{xy} + \widetilde{u}\overline{\tau_{xx}} + \widetilde{v}\overline{\tau_{xy}} \end{pmatrix}, \tag{4.23}$$

$$\widetilde{F}_{v_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ \widetilde{\tau}_{xy} \\ \widetilde{\tau}_{yy} \\ -\widetilde{q}_y + \overline{u}\,\widetilde{\tau}_{xy} + \overline{v}\,\widetilde{\tau}_{yy} + \widetilde{u}\overline{\tau_{xy}} + \widetilde{v}\overline{\tau_{yy}} \end{pmatrix}. \tag{4.24}$$

Encore, une fois, il faut faire attention aux variables non-conservatives :

$$\widetilde{u} = \frac{\widetilde{\rho u} - \overline{u}\widetilde{\rho}}{\overline{\rho}}. \tag{4.25}$$

En remplaçant par $\widetilde{W} = \widehat{W}e^{i\omega t}$, Eq. (4.21) devient

$$\oint_{\delta A} \left[(\widehat{F}_{c_x} - \widehat{F}_{v_x})\mathrm{d}y + (\widehat{F}_{c_y} - \widehat{F}_{v_y})\mathrm{d}x\right] = -i\omega \iint_A \widehat{W}\mathrm{d}A. \tag{4.26}$$

La même technique de pseudo-temps est utilisée pour résoudre les équations Eq. (4.17) et Eq. (4.26) ainsi que l'algorithme de couplage présenté Fig. 4.1.

La méthode NLH appliquée aux écoulements visqueux suit le même formalisme que le RANS (moyenne de Reynolds) avec, comme hypothèse supplémentaire, que la perturbation est périodique en temps.

4.3 Extensions de la méthode harmonique non-linéaire

4.3.1 Extension à plusieurs harmoniques

La méthode NLH de He et Ning revient à considérer un écoulement moyenné en temps en temps auquel se superpose la fréquence fondamentale d'une perturbation. Chen *et al.* [15] et McMullen *et al.* [66] présentent une généralisation à plusieurs harmoniques. Ces derniers présente la méthode « Non-Linear Frequency Domain (NLFD) » qui convertit les équations instationnaires dans le domaine temporel en plusieurs problèmes stationnaires dans le domaine fréquentiel. Reprenant l'équation (3.1), les équations du U-RANS, après discrétisation spatiale par la méthode des volumes finis, peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$V\frac{\partial W}{\partial t} + R(W) = 0, \tag{4.27}$$

où V est le volume constant d'une cellule. Le vecteur des variables conservatives peut-être complété par un nombre quelconque de variables turbulentes. L'opérateur des résidus R résulte de la discrétisation spatiale des flux convectifs et diffusifs ainsi que des termes sources de la turbulence. Sous l'hypothèse de périodicité temporelle de pulsation ω de W et $R(W)$, la série de Fourier de Eq. (4.27) est

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik\omega V\widehat{W}_k + \widehat{R}_k)e^{ik\omega t} = 0. \tag{4.28}$$

$\widehat{W}_k$ et $\widehat{R}_k$ représentent ainsi les coefficients de Fourier de W et R pour un mode k. L'orthogonalité de la famille des exponentielles complexes assure que les contributions individuelles de chaque mode sont nulles :

$$ik\omega V\widehat{W}_k + \widehat{R}_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{4.29}$$

Une équation stationnaire est ainsi obtenue pour chaque mode k. Pour des raisons pratiques évidentes, seul un sous-ensemble de modes, symétrique autour de 0 et jusqu'à l'harmonique de rang N, est considéré : $-N \leq k \leq N$. De même que précédemment, une pseudo-dérivée temporelle est ajoutée pour intégrer numériquement le résultat :

$$V\frac{\partial \widehat{W}_k}{\partial t_k^*} + \widehat{R}_k + V\underbrace{ik\omega\widehat{W}_k}_{S} = 0, \quad k \in [-N, N]. \tag{4.30}$$

Le terme $ik\omega\widehat{W}_k$ apparaît alors comme un terme source supplémentaire aux équations de transports. La méthode consiste donc en la résolution simultanée du système de $2N+1$ équations stationnaires Eq. (4.30) dans le domaine fréquentiel.

Ces équations semblent indépendantes mais en réalité, à cause de la non-linéarité de l'opérateur $R(W)$, $\widehat{R}_k$ ne peut pas être calculé directement à partir de $\widehat{W}_k$. $\widehat{R}_k$ ne peut être évalué qu'à partir des résidus dans l'espace temporel $R(W)$ à différents pas de temps dans la période. McMullen *et al.* décrivent leur stratégie de calcul dans un diagramme reproduit Fig. 4.2. Connaissant les coefficients de Fourier des variables conservatives $\widehat{W}_k$ à l'itération q, les variables conservatives $W(t)$ sont calculées par transformée de Fourier discrète inverse (TFDI). C'est cette opération qui assure le couplage de tous les calculs stationnaires. Ensuite, les résidus peuvent être calculés avant de revenir en fréquentiel par TFD pour finalement effectuer l'itération de convergence. Des aller-retours incessants entre l'espace fréquentiel et l'espace temporel sont nécessaires.

$$\begin{tikzcd} \boxed{\widehat{W}_k^{(q)}} \arrow[r, "TFDI"] \arrow[rrrr, bend right] & \boxed{W(t)} \arrow[r] & \boxed{R(t)} \arrow[r, "TFD"] & \boxed{\widehat{R}_k^{(q)}} \arrow[r] & \oplus \arrow[r] & \boxed{\widehat{W}_k^{(q+1)}} \end{tikzcd}$$

Figure 4.2 – Diagramme de calcul de la NLFD. D'après McMullen *et al.* [66].

La méthode est testée sur un cas d'écoulement 1D d'un canal où la solution est analytique et sur un écoulement autour d'un cylindre avec un nombre de Strouhal spécifié *a priori*. Au final, malgré l'utilisation intensive de FFT, la NLFD semble permettre une réduction significative du temps de calcul sans toutefois en avoir de mesure chiffrée.

4.3.2 Extension à une fréquence inconnue

Il existe des applications où la fréquence de l'écoulement n'est pas imposée mais naturelle, comme précédemment les lâchers tourbillonnaires en aval d'un cylindre donnant naissance à une allée de Von Kárḿan. Or pour développer en série de Fourier Eq. (4.28), la fréquence doit être connue *a priori*. McMullen *et al.* [67] dérivent une méthode d'optimisation basée sur des gradients : « Gradient Based Variable Time Period (GBVTP) ». Comme le nombre d'onde $k\omega$ est

$$k\omega = n\frac{2\pi}{T}, \tag{4.31}$$

l'équation Eq. (4.30) peut se réécrire comme une fonction de la période de l'écoulement

$$-V\frac{\partial \widehat{W}_k}{\partial t_k^*} = \underbrace{\widehat{R}_k + Vin\frac{2\pi}{T}\widehat{W}_k}_{\hat{R}_{NLFD}}, \quad k \in [-N, N]. \tag{4.32}$$

La méthode GBVTP est similaire à une méthode d'optimisation. Elle consiste à trouver la période T de l'écoulement qui minimise les résidus $\hat{R}_{NLFD}$ par méthode de gradients $\partial\hat{R}_{NLFD}/\partial T$.

Comme les fréquences principales d'un écoulement de turbomachines résultent du mouvement forcé de rangées d'aubes, celles-ci sont bien déterminées. Nous ne nous étendrons donc pas d'avantage.

4.3.3 Extension à plusieurs fréquences fondamentales

He et Ning [50] avaient déjà jeté les bases de calculs multi-fréquentiels en considérant plusieurs perturbations de fréquences fondamentales différentes

$$W = \overline{W} + \sum_{k=1}^{N} \widetilde{W}_k, \tag{4.33}$$

en se limitant à la fréquence fondamentale de chaque perturbation. C'est réellement He *et al.* [49] puis Vilmin *et al.* [101] qui réalisent la synthèse des travaux présentés précédemment en considérant plusieurs perturbations de fréquences fondamentales différentes, et pour ces perturbations, un nombre arbitraire N d'harmoniques :

$$W = \overline{W} + \sum_{m} \widetilde{W}_m, \tag{4.34}$$

avec

$$\widetilde{W}_m = \sum_{k=1}^{N} \left(\widehat{W}_k e^{ik\omega_m t} + \widehat{W}_{-k} e^{-ik\omega_m t}\right), \tag{4.35}$$

où chaque perturbation m dispose d'une pulsation propre ω_m. Le nombre de perturbations et le nombre d'harmoniques nécessaires sont choisis par l'utilisateur. Le cas à une perturbation revient à la méthode NLFD de la section précédente.

Les auteurs effectuent une analyse de stabilité sur le terme source semblable à celui rencontré Eq. (4.30). Ses parties réelle et imaginaire peuvent être négatives et réduire les limites de stabilité de la marche en pseudo-temps. Pour se prémunir contre cela, le pas de temps local est réduit en fonction du rayon spectral de la matrice jacobienne du terme source $\partial S/\partial W$ sans indiquer précisément comment.

De nombreux cas tests sont utilisés pour valider cette méthode. Le plus important consiste en la simulation de quatre étages d'un compresseur (cinq stators et quatre rotors). Le premier et dernier stator traitent une seule fréquence, celle du passage des aubes du rotor adjacent. Les roues intérieures résolvent deux fréquences, celles de passage des aubes des roues amont et aval. Un calcul à un harmonique pour chaque fréquence sur un maillage grossier sert à initialiser un calcul à deux harmoniques sur maillage fin. Celui-ci suffit à bien retrouver les caractéristiques qualitatives de l'écoulement sans qu'il y ait de comparaison avec des expériences ou un calcul instationnaire classique de référence.

4.4 Résolution dans le domaine temporel

Les méthodes présentées jusque ici fonctionnent et sont performantes mais elles résolvent les équations dans le domaine fréquentiel ce qui n'est pas adapté à un code temporel comme *elsA*.

4.4.1 Une seule fréquence fondamentale

Hall *et al.* [45] proposent une alternative : la méthode « Harmonic Balance Technique (HBT) », ou méthode d'équilibrage harmonique. En appliquant une transformée de Fourier discrète inverse sur les $2N+1$ équations (4.29), un même nombre d'équations dans le domaine temporel est obtenu. Ces équations correspondent à des instants équi-répartis dans la période : le temps est maintenant discrétisé. Les coefficients de Fourier de R et W peuvent donc être approchés par TFD :

$$\widehat{W}^* \approx \mathcal{E}W^* \quad \text{et} \quad \widehat{R}^* \approx \mathcal{E}R^*, \tag{4.36}$$

où * dénote l'opérateur de concaténation des instants et des harmoniques

$$W^* = (W_0, W_1, \ldots, W_{2N})^\top, \quad \widehat{W}^* = (\widehat{W}_{-K}, \widehat{W}_{1-K}, \ldots, \widehat{W}_K)^\top. \tag{4.37}$$

Cette concaténation est en réalité appliquée à une seule variable de l'écoulement à la fois mais comme le traitement est identique pour toutes les variables de W quelque soit sa taille (variables turbulentes incluses), la notation W^* est conservée. La matrice $\mathcal{E}$ est la matrice de l'opérateur de transformée de Fourier discrète

$$\mathcal{E}_{n,k} = \frac{1}{2N+1}\exp\left(-2i\pi k\frac{n}{2N+1}\right), \quad \mathcal{E}^{-1}_{k,n} = \exp\left(2i\pi k\frac{n}{2N+1}\right). \tag{4.38}$$

En insérant l'approximation des amplitudes complexes de W^* et R^* Eq. (4.36) dans les $2N+1$ équations (4.29) et en revenant dans le domaine temporel par une TFDI, $\widehat{R}$ redevient l'exact opérateur R par bijection de la TFD [1] et le premier terme $ik\omega\widehat{W}_k$ devient un terme source couplant tous les instants :

$$R^*(W) + VS^* = 0, \tag{4.39}$$

1. Ceci n'est plus vrai pour un point de discontinuité à cause de l'effet de Gibbs [35]. Néanmoins, le fluide est un milieu continu et même si l'écoulement est discrétisé en espace et présente de forts gradients, il n'y a pas de discontinuité du fluide comme le confirme Hembera *et al.* [51]

avec

$$S^* = i\omega\mathcal{E}^{-1}\mathcal{D}\mathcal{E}W^*, \tag{4.40}$$

où $\mathcal{D}$ est une matrice diagonale avec les $2N+1$ termes correspondants aux harmoniques : $\mathcal{D} = \mathrm{diag}(-N, \ldots, N)$. En identifiant avec Eq. (4.27), $i\omega\mathcal{E}^{-1}\mathcal{D}\mathcal{E}$ est simplement l'opérateur « spectral » qui approche l'opérateur de dérivée temporelle $\partial/\partial t$:

$$i\omega\mathcal{E}^{-1}\mathcal{D}\mathcal{E}W^* \approx \frac{\partial W^*}{\partial t}. \tag{4.41}$$

Gopinath et Jameson [38] explicitent le terme source Eq. (4.40) en déroulant la formulation matricielle de Hall *et al.* Eq. (4.41) pour chaque instant. Nommant cette méthode la « Time Spectral Method (TSM) », ils proposent de résoudre

$$V\frac{\partial W_n}{\partial t_n^*} + R(W_n) + V\underbrace{D_t(W_n)}_{S} = 0, \quad 0 \leq n < 2N+1, \tag{4.42}$$

où t_n^* est le pseudo-temps rajouté pour la convergence numérique du $n^{\text{ème}}$ instant, W_n les variables conservatives au $n^{\text{ème}}$ instant de la période et D_t l'opérateur spectral de dérivée temporelle :

$$D_t(W_n) = \frac{2\pi}{T}\sum_{m=-N}^{N} a_m W_{n+m}, \tag{4.43}$$

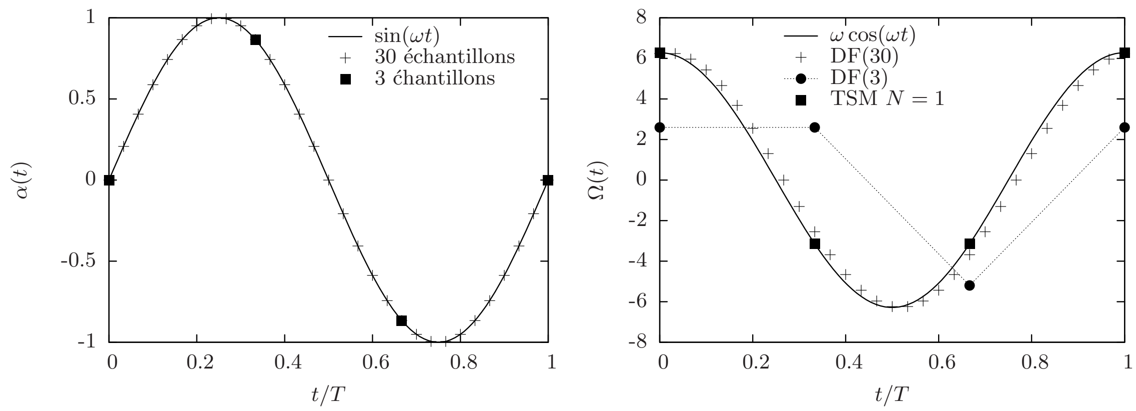
avec

$$a_m = \begin{cases} \frac{1}{2}(-1)^{m+1}\csc\left(\frac{\pi m}{2N+1}\right), & m \neq 0, \\ 0, & m = 0. \end{cases} \tag{4.44}$$

L'opérateur D_t Eq. (4.43) est un schéma de discrétisation temporel, centré (autour de l'instant n) et d'ordre élevé. Son usage est simplement illustré par une fonction sinus qui est échantillonnée par 3 et 30 points Fig. 4.3(a). Un schéma de différences finies classique à l'ordre 2 est appliqué sur les 30 échantillons, ce qui produit une bonne approximation de la dérivée malgré un léger déphasage (Fig. 4.3(b)) qui s'amenuise quand l'échantillonnage est raffiné. En revanche, l'application du même schéma sur trois échantillons donne un résultat complètement faux. A contrario, sur ce même échantillonnage grossier, l'opérateur D_t de la TSM offre une approximation très juste avec une erreur sur la dérivée égale au zéro machine.

La TSM revient donc à résoudre $2N+1$ relations stationnaires dans le domaine temporel avec un terme source couplant tous les instants. D'après le critère d'échantillonnage de Nyquist-Shannon [81], $2N+1$ instants équi-répartis dans la période d'un signal permettent de capturer au mieux le $N^{\text{ème}}$ harmonique de la fréquence fondamentale (le premier harmonique étant la fréquence fondamentale). Dans la suite de cette étude, les calculs TSM seront qualifiés selon le nombre d'instants $(2N+1)$ ou, de manière équivalente, par le nombre d'harmoniques potentiellement capturés (N).

Il est intéressant de comparer le schéma de convergence avec le DTS présenté Fig. 3.4. Le point de départ du calcul est montré figure 4.4(a) : il y a $2N+1$ calculs stationnaires équi-répartis dans la période T connue. Le champ initial est identique et uniforme pour tous les



(a) fonction sinus (b) dérivée

Figure 4.3 – Illustration de l'opérateur de dérivée temporel D_t de la TSM.

instants et le calcul ne se fera que sur le pseudo-temps t^*, dans le sens des ordonnées. Après quelques itérations q sur le pseudo-temps en (b), les calculs ont commencé à converger vers l'état final pour finalement atteindre l'écoulement (c). Il s'agit d'« instantanés » de l'écoulement à ces instants.

La résolution temporelle de la TSM est généralement beaucoup plus faible que pour le DTS. Pour des applications typiques en turbomachine, une période peut être discrétisée par une centaine d'instants. Avec la TSM, ce nombre ne dépassera guère la dizaine. Même si la résolution temporelle de la TSM reste limitée, sa précision spectrale permet de pallier cette apparente faiblesse.

La qualité des simulations TSM est d'ailleurs démontrée sur des cas d'aérodynamique externe. Gopinath et Jameson [38] obtiennent des résultats satisfaisants par rapport à un calcul U-RANS de référence sur un cas de profil et une aile en mouvement rigide de tangage forcé donnent. Une configuration rotor/stator du compresseur NASA Stage 35 modifié pour obtenir un même nombre d'aubes dans chaque roue est également étudiée dans [97].

4.4.1.1 Critères de stabilité

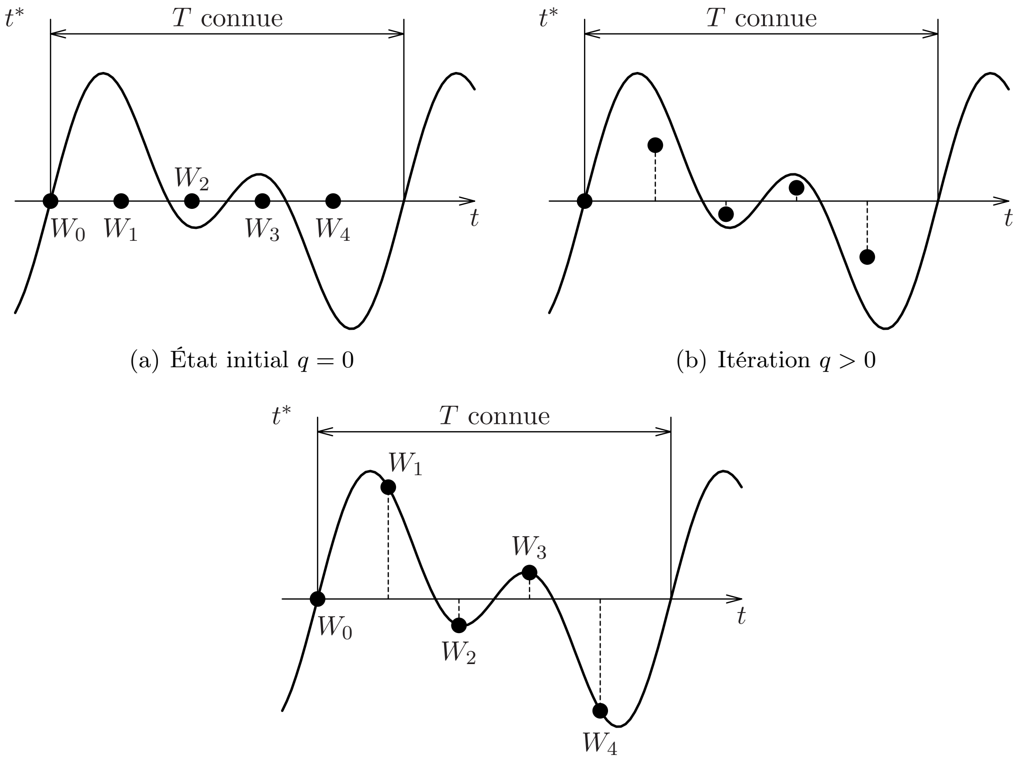
Nombre d'instants dans la période van der Weide *et al.* [97] démontrent la nécessité d'avoir un nombre d'instants impair. Considérons le terme source sous forme matricielle :

$$D_t(W) = \mathcal{A}W^*. \tag{4.45}$$

Dans le cas d'un nombre d'instants impair, la matrice $\mathcal{A}$ est donnée par :

$$\mathcal{A}^{impair} = \begin{pmatrix} 0 & a_1^{impair} & \cdots & a_N^{impair} & -a_N^{impair} & \cdots & -a_1^{impair} \\ -a_1^{impair} & 0 & a_1^{impair} & a_2^{impair} & \cdots & \cdots & -a_2^{impair} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{impair} & a_2^{impair} & \cdots & \cdots & -a_2^{impair} & -a_1^{impair} & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.46}$$

où a^{impair} est donné par la relation Eq. (4.44). Un nombre pair $2N$ d'instants pourrait être



(a) État initial $q = 0$

(b) Itération $q > 0$

(c) État final

Figure 4.4 – Schéma de fonctionnement de la TSM.

utilisé, auquel cas, d'après van der Weide *et al.* [97], les équations (4.43) et (4.44) deviennent :

$$D_t(W_n) = \frac{2\pi}{T} \sum_{m=-N}^{N-1} a_m^{pair} W_{n+m}, \quad 0 \leq n < 2N, \tag{4.47}$$

avec

$$a_m^{pair} = \begin{cases} \frac{1}{2}(-1)^{m+1} \cot\left(\frac{\pi m}{2N}\right), & m \neq 0, \\ 0, & m = 0. \end{cases} \tag{4.48}$$

Ainsi, la matrice $\mathcal{A}^{pair}$ est

$$\mathcal{A}^{pair} = \begin{pmatrix} 0 & a_1^{pair} & \cdots & a_{N-1}^{pair} & 0 & -a_N^{pair} & \cdots & -a_1^{pair} \\ -a_1^{pair} & 0 & a_1^{pair} & a_2^{pair} & \cdots & 0 & \cdots & -a_2^{pair} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{pair} & a_2^{pair} & \cdots & 0 & \cdots & -a_2^{pair} & -a_1^{pair} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.49}$$

Il est clair que chaque ligne de la matrice $\mathcal{A}^{pair}$ contient deux zéros alors que chaque ligne de $\mathcal{A}^{impair}$ n'en contient qu'un. Cela implique que la matrice $\mathcal{A}^{impair}$ n'a qu'une valeur propre nulle associée au vecteur $e_1 = (1, 1, \ldots, 1)^\top$. La valeur propre nulle correspond à une dérivée temporelle nulle. Le vecteur propre e_1 correspond au cas où tous les instants W_n sont identiques, donc à dérivée temporelle nulle, ce qui montre la consistance du schéma. La matrice $\mathcal{A}^{pair}$ a deux valeurs propres nulles avec les vecteurs propres associés e_1 et $e_2 = (1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0)^\top$. Le vecteur propre e_2 correspond à un découplage pair-impair, *i.e.* ce mode n'est pas atténué par $\mathcal{A}^{pair}$ et le schéma est instable.

Le problème ne se pose en fait que pour les fortes dérivées temporelles. Si la solution est assez douce, un nombre pair d'instants ne posera pas de problème. Comme l'application visée est la simulation d'écoulements en turbomachines, où les gradients peuvent être assez forts, seul un nombre impair d'instants a été considéré dans cette étude.

Pas de temps local van der Weide *et al.* [97] dérivent également une analyse de stabilité sur le pas de pseudo-temps. Le pas de temps convectif d'une cellule se calcule à partir d'un nombre de CFL renseigné par l'utilisateur :

$$\Delta t^* = \mathrm{CFL}\frac{d}{U + c_0}, \tag{4.50}$$

où d est une dimension caractéristique de la cellule et $U + c_0$ est la plus grande vitesse caractéristique.

L'ajout du terme source $VD_t(W_n)$ dans Eq. (4.42) doit être pris en compte dans la définition du pas de temps local Δt^* pour résoudre le calcul stationnaire. L'équation dans le domaine fréquentiel (4.30) est discrétisée en pseudo-temps par un schéma de différences finies :

$$V\frac{\Delta\widehat{W}_k}{\Delta\hat{t}_k^*} + \widehat{R}_k + Vi\omega k\widehat{W}_k = 0. \tag{4.51}$$

À partir d'une analyse de stabilité dans le domaine fréquentiel, le pseudo pas de temps $\Delta\hat{t}_k^*$ peut être estimé par :

$$\Delta\hat{t}_k^* = \mathrm{CFL}\frac{d}{U + c_0 + k\omega d}. \tag{4.52}$$

Par rapport à la définition standard Eq. (4.50), un terme supplémentaire basé sur le nombre d'onde $k\omega$ est rajouté au dénominateur. On note aussi que le pas de temps est associé à un mode k et est donc différent pour chaque mode. C'est sans doute cette analyse qui a été menée pour la méthode NLH dans Vilmin *et al.* [101] (cf. § 4.3.3).

Pour estimer le pas de temps local dans le domaine temporel, on considère la transformée de Fourier discrète inverse de Eq. (4.51) :

$$\mathcal{E}^{-1}\left(V\frac{\Delta\widehat{W}^*}{\Delta\hat{t}^*} + \widehat{R}^* + Vi\omega k\widehat{W}^*\right) = 0, \tag{4.53}$$

qui devient :

$$\mathcal{E}^{-1}\left(V\frac{\Delta\widehat{W}^*}{\Delta\hat{t}^*}\right) + R^*(W) + VD_t^*(W) = 0. \tag{4.54}$$

Dans le cadre de l'utilisation du pas de temps local et de la méthode multi-grilles, l'opération de TFDI sur les différents pas de temps $\Delta\hat{t}_k^*$ doit être réalisée pour chaque cellule et à chaque cycle de multi-grilles, ce qui la rend très coûteuse. Les auteurs proposent donc de considérer le pas de temps correspondant à la plus grande fréquence $N\omega$, le plus restrictif pour tous les modes :

$$\Delta\hat{t}_k^* = CFL\frac{d}{U + c_0 + N\omega d}, \quad \forall k. \tag{4.55}$$

En revenant dans le domaine temporel, le pas de temps de chaque calcul stationnaire est constant et garde la forme de $\Delta\hat{t}^*$ car il est indépendant du mode k. Ce choix de prendre le pas de temps associé à la plus petite longueur d'onde est plutôt restrictif, mais il est toujours plus avantageux que d'avoir à calculer sans cesse des produits matrice-vecteur.

4.4.1.2 Extension à une fréquence inconnue

Gopinath et Jameson [39] reprennent la méthode de gradient GBVTP développée par McMullen *et al.* [67] pour trouver itérativement la période de l'écoulement. La méthodologie est validée sur des allées de Von Kármán en aval d'un cylindre et d'un profil à grande incidence. Une étude numérique sur des ailes battantes est appliqué par Sriram *et al.* [90] au vol des insectes.

4.4.1.3 Extension à un échantillonnage non-uniforme

Toutes les méthodes présentées jusqu'à présent utilise un échantillonnage temporel uniforme. Nastov et White [70] présentent la méthode Time-Mapped Harmonic Balance (TMHB) qui, au lieu d'utiliser des instants uniformément répartis au sein d'une période, utilise une grille temporelle non-uniforme pour mieux capturer des transitions rapides. La méthode consiste à introduire un pseudo-temps $\hat{t}$ et utiliser une fonction λ qui le relie au temps physique réel : $t = \lambda(\hat{t})$ avec $\lambda(0) = 0$ et $\lambda(T) = T$. La construction d'une telle fonction est l'objet de l'article. Les résultats obtenus sont très satisfaisants puisque la précision de la solution est augmentée alors que le temps de calcul est diminué par rapport à la méthode standard (avec échantillonnage uniforme).

Cette méthode est employée dans des calculs de réseaux sans fils où les transitions peuvent être très « raides ». En bibliographie de l'article, des références, comme Gilmore et Steer [37] de 1991, montrent que ce type de méthodes est utilisé depuis longtemps dans ce domaine. Cette variante ne paraît cependant pas nécessaire en CFD où les variations ne seront jamais aussi raides que dans un circuit électronique.

4.4.1.4 Nombre d'harmoniques adaptatif

Avec la TSM, le nombre d'instants utilisés est le même en toute cellule de maillage. Les variations de l'écoulement peuvent être très différentes dans le domaine de calcul et certaines zones peuvent être moins « chahutées » que d'autres. Si le nombre d'harmoniques utilisé est adapté à ces zones de grandes variations, il est alors sans doute inutilement surestimé pour les zones de plus petites variations. De plus, le compromis nécessaire entre le temps de calcul et la finesse de la physique que l'on désire reproduire (*i.e.* le nombre d'harmoniques choisis) nécessite une validation différente selon l'écoulement simulé.

Pour palier ces défauts, Maple *et al.* [64] proposent une méthode adaptative, au sens où le nombre d'harmoniques sera différent en chaque point du maillage pour capturer efficacement l'écoulement local. L'utilisateur spécifie un nombre minimal d'harmoniques et le solveur va automatiquement augmenter ce nombre dans les cellules où cela est nécessaire. La décision d'augmenter le nombre d'harmoniques est prise quand l'énergie normalisée correspondant au plus grand harmonique N, définie par

$$E_N = \frac{|\hat{W}_N|^2}{\sum_{n=0}^{N} |\hat{W}_n|^2}, \tag{4.56}$$

dépasse un certains seuil modifiable par l'utilisateur. L'augmentation du nombre d'harmoniques peut-être supérieure à un pour plus de rapidité.

Cette stratégie est plus efficace quand le solveur est proche de la solution finale. En effet, si l'augmentation en fréquence est menée trop tôt, des structures d'écoulements transitoires (*i.e.* qui ne seront pas présentes dans la solution finale) peuvent créer des fréquences inutilement. Le calcul est donc d'abord réalisé avec le nombre minimum d'harmoniques spécifié par l'utilisateur et l'augmentation n'intervient qu'en fin de convergence. La solution finale contient ainsi pour chaque cellule le nombre minimal d'harmoniques qui modélisent efficacement l'écoulement local.

Cette méthode semble donc très prometteuse. Elle est néanmoins complexe car augmenter le nombre d'harmoniques d'une cellule revient à raffiner localement l'échantillonnage temporel. Celui-ci est donc différent d'une cellule à l'autre et toutes les cellules de calcul ne correspondent pas aux mêmes instants de la période de l'écoulement. Des interpolations temporelles sont donc nécessaires pour que l'échantillonnage soit cohérent dans tout le domaine de calcul.

Les auteurs obtiennent de bon résultats sur une tuyère divergente quasi-1D en fluide non-visqueux. L'écoulement est supersonique en entrée et subsonique en sortie. Le nombre d'harmoniques minimum est de deux. Celui-ci augmente considérablement dans la zone de battement du choc où il approche 40. Le gain de temps de calcul annoncé est supérieur à 80 % par rapport à un calcul avec un nombre fixe d'harmoniques égale au maximum généré par la méthode adaptative.

Si cette variante de la TSM donne de bon résultats, elle est néanmoins très complexe à mettre en œuvre et a d'ailleurs été implémentée par les auteurs dans un solveur dédié. La complexité prévisible d'adaptation à un solveur complexe comme *elsA* d'une part, et le manque de validation sur des simulations plus sophistiquées qu'une tuyère à une dimension d'autre part, font que cette TSM adaptative ne sera pas considérée dans cette étude.

4.4.2 Extension à plusieurs fréquences

La méthode d'équilibrage harmonique est également étendue au cas à plusieurs fréquences fondamentales différentes par Ekici et Hall [26, 27]. Ces mêmes auteurs réalisent la synthèse des applications multi-fréquentielles avec les auteurs de la TSM dans Gopinath *et al.* [40]. Dans le cas d'une seule fréquence fondamentale, l'opérateur de dérivée temporelle s'écrit de manière générale (cf. Eq. (4.40))

$$D_t = \frac{\partial \mathcal{E}^{-1}}{\partial t}\mathcal{E} = i\omega \mathcal{E}^{-1}\mathcal{D}\mathcal{E}. \tag{4.57}$$

Dans le cas multi-fréquentiels, l'opérateur D_t garde la même forme

$$D_t = \frac{\partial \mathcal{E}_m^{-1}}{\partial t}\mathcal{E}_m, \tag{4.58}$$

avec $\mathcal{E}_m$ semblable à une matrice de TFD mais considérant plusieurs fréquences :

$$\mathcal{E}_{m_{k,n}} = e^{-i\omega_k t_n}, \tag{4.59}$$

où les pulsations ω_k sont choisies arbitrairement. Les fréquences résolues sont

$$\omega^* = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_N, \omega_{-N}, \ldots, \omega_{-1})^\top . \tag{4.60}$$

L'écoulement sera alors périodique, de période T_m égale au premier multiple commun des périodes de chaque fréquences :

$$T_m = \mathrm{PPCM}_k \left(\frac{2\pi}{\omega_k}\right)_{1 \leq k \leq N} . \tag{4.61}$$

La simulation par méthode d'équilibrage harmonique devrait échantillonner complètement la période T_m. Malheureusement, dans des applications comme les turbomachines multi-étages où les nombres d'aubes des roues sont souvent choisis premier entre eux afin d'éviter des phénomènes de résonance, la période T_m peut être très grande. La solution retenue dans [40] est d'échantillonner la période la plus longue correspondant à la plus petite fréquence

$$T_m = \max_k \left(\frac{2\pi}{\omega_k}\right)_{1 \leq k \leq N} . \tag{4.62}$$

Ainsi, les autres fréquences, de période plus courte, auront au moins une période complète échantillonnée. Pour que la matrice Eq. (4.59) soit carrée, le nombre d'instants n_{inst} est égal à deux fois le nombre de fréquences retenues plus un $(2N + 1)$. Pour respecter le critère de Shannon [81], les n_{inst} équi-répartis dans T_m doivent échantillonner à au moins deux fois la plus grande fréquence et doivent donc satisfaire

$$n_{\text{inst}} \geq 2 \frac{\max_k(\omega_k)}{\min_k(\omega_k)} . \tag{4.63}$$

Le rapport entre la plus grande et la plus petite fréquence ne doit donc pas être trop grand.

4.5 Méthode retenue

La revue des méthodes harmoniques effectuée par Dimitriadis [23], dans le cadre de l'aéroélasticité, conclue à une meilleure précision des méthodes fréquentielles au détriment des méthodes temporelles. Cependant comme la méthode retenue est amenée à être implémentée dans le solveur *elsA*, qui est un code temporel, elle doit transporter les variables conservatives dans le domaine temporel. De plus, comme l'objectif de cette thèse est la simulation d'interactions entre un rotor et un stator, une seule fréquence est nécessaire et cette fréquence est imposée et connue à l'avance. La méthode décrite § 4.4.1 est donc choisie. La terminologie anglo-saxonne est un peu confuse puisque, selon les auteurs, la méthode se nomme HBT (Hall *et al.* [45]) ou TSM (Gopinath et Jameson [38], van der Weide *et al.* [97]). La dénomination HBT ayant été retenue pour les cas multi-fréquentiels par Gopinath *et al.* [40], le terme TSM est considéré comme la référence pour les cas mono-fréquentiels et sera utilisé dans la suite de ce manuscrit. En français, le terme générique est « méthode d'équilibrage harmonique ».

Pour résumer, la TSM transforme les équations du U-RANS d'un écoulement périodique en temps en plusieurs calculs RANS couplés par un terme source D_t (Eq. (4.43)) approchant la dérivée temporelle des variables conservatives. D'une manière plus abstraite, les méthodes d'équilibrage harmonique sont très utiles pour caractériser et prédire la réponse de systèmes dynamiques non-linéaires soumis à des oscillations périodiques, soit auto-induites, soit dues à une excitation harmonique. Le système dynamique en question peut aussi bien être une structure, un circuit électronique qu'un fluide en mouvement. Dans ce dernier cas, elles semblent bien mieux adaptées à la simulation d'écoulements périodiques en temps que ne l'est le U-RANS. Un gain conséquent sur le temps de calcul est donc attendu par rapport à ce dernier.

Qualitativement, la TSM est comparée Fig. 4.5 à celles développées en première partie. Elle est censée restituer une physique d'écoulement plus réaliste que les méthodes de linéarisation (LUR, cf. § 4.1) de manière plus rapide que le modèle RANS instationnaire (cf. § 2.1.1). Elle est maintenant comparée en détails à ces deux dernières.

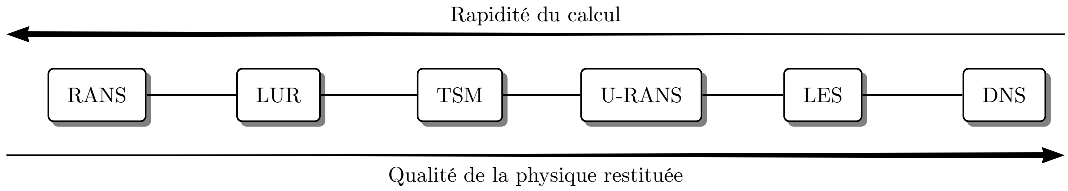


Figure 4.5 – Comparaison qualitative des différentes méthodes de simulation.

4.5.1 Comparaisons des modèles LUR et TSM

La méthode de linéarisation (décrite § 4.1 dans le cas non-visqueux) permet de capturer un écoulement stationnaire auquel est superposé une perturbation harmonique avec sa seule fréquence fondamentale. Pour cela, elle résout trois problème stationnaires (un pour la partie stationnaire proprement dite et deux pour les parties réelles et imaginaire de la perturbation). Un calcul TSM à trois instants résout également trois problèmes stationnaires et son échantillonnage temporel lui permet de potentiellement capturer la fréquence fondamentale de l'écoulement. Ces deux approches apparaissent donc comme équivalentes.

Il y a cependant plusieurs points fondamentaux qui diffèrent. L'état de base de la méthode de linéarisation est un écoulement stationnaire alors que celui de la TSM est un écoulement moyenné en temps. L'équation de transport de l'écoulement stationnaire du LUR retourne le même résultat que celui d'un calcul RANS seul. Ce résultat est différent d'un écoulement moyenné en temps, qui pourrait être obtenu par exemple par la moyenne des instantanés d'un calcul TSM. Dans le cas du LUR, l'écoulement est linéarisé autour d'une position fixe de la géométrie alors que la TSM préserve les non-linéarités de l'écoulement. Ainsi lors d'un calcul avec déformation de la géométrie (voir plus loin dans cette étude § 6.3 et Dufour *et al.* [25]), les trois équations de transports du LUR sont menées sur le même maillage et une vitesse harmonique de déformation de grille est prise en compte dans le calcul des flux. Avec la méthode TSM, chaque instant dispose de son propre maillage déformé et la vitesse de grille est évaluée en fonction de ces maillages déformés. En corollaire, les résidus spatiaux R sont identiques en RANS et en TSM. Il est donc plus aisé de mettre en œuvre la TSM en se basant sur un solveur RANS classique plutôt que d'écrire un solveur LUR dédié.

4.5.2 Comparaisons des modèles U-RANS et TSM

Le transitoire instationnaire d'un calcul U-RANS se trouve transformé en simples transitoires de calculs RANS qui peuvent profiter de techniques d'accélération de convergence comme le pas de temps local et le multi-grilles. Un transitoire de convergence stationnaire est bien mieux maîtrisé qu'un transitoire instationnaire pour lequel il faut vérifier la périodicité en cours de calcul. Les calculs RANS correspondent à un échantillonnage uniforme de la période de l'écoulement et sont intégrés simultanément (cf. Fig. 4.4). La TSM peut donc être considérée comme une méthode parallèle en temps [2]. Ces caractéristiques sont résumées dans le tableau 4.1.

U-RANS	**TSM**
périodicité temporelle non prise en compte	périodicité temporelle intrinsèque
temps séquentiel	couple tous les instants
parallèle en espace	parallèle en espace et en temps
transitoire instationnaire	transitoire de convergence
résolution temporelle « arbitraire »	une seule fréquence connue a priori

Table 4.1 – Comparatif U-RANS et TSM.

Il existe également une différence fondamentale entre le U-RANS et la TSM : le U-RANS est une modélisation de l'écoulement alors que la TSM n'est qu'une méthode numérique dérivée des équations semi-discrètes du U-RANS. La TSM ne peut donc pas restituer une meilleure précision physique qu'une simulation U-RANS suffisamment résolue, elle ne peut que tendre vers celui-ci :

$$\text{TSM} \xrightarrow{N\to\infty} \text{U-RANS}.$$

C'est pourquoi, dans la suite de cette étude, la TSM est systématiquement comparée à une simulation U-RANS suffisamment résolue plutôt qu'à des résultats expérimentaux. Ceux-ci sont néanmoins indiqués s'ils sont disponibles.

Il convient donc de comparer la TSM et le U-RANS sur deux points :

1. la précision physique
2. les temps de restitution.

La TSM ne sera intéressante que si elle s'avère capable de restituer une physique proche du modèle U-RANS à un coût en temps de calcul inférieur. Comme les méthodes sont mises en œuvre dans le même solveur elsA, les même méthodes numériques, conditions limites et initiales et les même maillages seront employés ce qui permettra la comparaison la plus juste. En effet, il existe des comparaisons dans la littérature comme Pyliouras *et al.* [75] qui comparent la méthode NLH de Vilmin *et al.* [101] (cf. § 4.3.3) au code U-RANS Hydra de Rolls-Royce sur des paramètres très différents. Par exemple, le nombre de points de maillage entre les

2. Le temps étant par nature séquentiel, il est étonnant qu'une méthode comme la TSM puisse être parallélisable dans ce domaine. Alors que la TSM utilise l'hypothèse de périodicité pour arriver à ce résultat, il existe une méthode parallèle en temps générique, *i.e.* s'appliquant à des phénomènes non périodiques. La méthode PITA (Parallel Implicit Time-integration Algorithm), notamment développée par Cortial et Farhat [16, 17], découpe le temps en tranches. Toutes les tranches sont résolues en parallèle et chaque tranche fournit un terme source à la tranche suivante. Cette méthode connaît un succès croissant en aéroélasticité [31].

deux méthodes varie d'un facteur 3. Il est également très facile de favoriser l'une ou l'autre simulation en faisant varier les temps d'intégration, la taille des domaines de calcul... Ainsi, il est possible de trouver dans la littérature des gains en temps de restitution variant de deux ordres de grandeur selon les auteurs. Cette étude vise à être impartiale et objective, et cherche à déterminer les avantages et limites de la TSM par rapport au modèle U-RANS pour différentes applications.

Les spécificités liées aux turbomachines n'ont pas été abordées en détails dans ce chapitre, elles le seront dans la partie III de ce manuscrit. Des algorithmes implicites sont maintenant développés afin d'améliorer l'efficacité de la TSM. Les premières applications en aérodynamique externe suivront au chapitre 6.

Chapitre 5

Implicitation de la méthode

Dans la littérature présentée au chapitre précédent, les auteurs utilisent tous des schémas explicites tel que Runge-Kutta pour l'avance en pseudo-temps. Ces schémas ont des critères de stabilité qui restreignent fortement le nombre de CFL utilisé dans le calcul du pas de temps local, et donc réduisent la vitesse de convergence vers l'état stationnaire. De plus, les auteurs rencontrent des difficultés de convergence quand le nombre d'instants considérés augmente.

L'utilisation d'un schéma implicite, comme Euler rétrograde, permet l'utilisation de nombres de CFL très élevés, au prix de la résolution d'un système linéaire. Néanmoins, si une itération de schéma implicite est plus coûteuse que celle d'un schéma explicite, cela est largement compensé par une vitesse de convergence fortement accrue. Le terme source de la TSM doit être pris en compte dans le processus d'implicitation des équations de Navier-Stokes afin d'obtenir les meilleures performances.

Ce chapitre est dédié au développement de plusieurs algorithmes implicites prenant en compte le terme source de la TSM. Il reprend l'article Sicot *et al.* [83] publié dans l'AIAA Journal et reproduit annexe A. Dans un premier temps, l'implicitation des équations de Navier-Stokes classiques (sans TSM) est présentée, puis la dérivation des algorithmes est discutée.

5.1 Implicitation des équations de Navier-Stokes discrétisées

5.1.1 Méthode d'Euler rétrograde

L'équation semi-discrète (4.27) est discrétisée en temps par un schéma de différences finies :

$$V\frac{\Delta W}{\Delta t} = -R(W), \tag{5.1}$$

où $\Delta W = W^{(q+1)} - W^{(q)}$ est l'incrément des variables conservatives entre l'itération q et l'itération $q+1$. Il faut maintenant choisir à quelle itération le vecteur W est considéré dans le terme des résidus. Si l'itération q est considérée, le schéma d'avance en temps est alors explicite : la solution à l'itération $q+1$ ne va dépendre que de données disponibles à l'itération q. Il s'agit du schéma d'Euler progressif :

$$W^{(q+1)} = W^{(q)} - \frac{\Delta t}{V} R\left(W^{(q)}\right). \tag{5.2}$$

Si l'itération $q+1$ est considérée, le schéma d'Euler rétrograde est obtenu. Celui-ci est inconditionnellement stable. Comme la solution dépend de données non disponibles, le schéma est implicite :

$$\frac{V}{\Delta t}\Delta W = -R\left(W^{(q+1)}\right). \tag{5.3}$$

Il faut alors linéariser l'opérateur des résidus autour de l'itération q :

$$R\left(W^{(q+1)}\right) \approx R\left(W^{(q)}\right) + \mathcal{J}\Delta W, \tag{5.4}$$

où $\mathcal{J} = \partial R/\partial W$ est la matrice jacobienne des résidus et Eq. (5.3) peut maintenant s'écrire sous forme d'un système linéaire dont l'inconnue est l'incrément ΔW :

$$\left(\frac{V}{\Delta t}\mathcal{I} + \mathcal{J}\right)\Delta W = -R\left(W^{(q)}\right). \tag{5.5}$$

Ce système doit être résolu en chaque cellule du maillage. Ces cellules sont généralement réparties dans plusieurs blocs de maillage qui peuvent être gérés par différents processeurs. Le système Eq. (5.5) est donc « éclaté » sur différentes unités de calculs et d'espace mémoire. Sa résolution exacte serait possible mais coûteuse par la taille des domaines et les communications inter-processeurs qu'elle implique. Aussi, une méthode itérative d'approximation de la solution est proposée : la méthode LU-SSOR.

5.1.2 Méthode LU-SSOR

La méthode LU-SSOR (Lower-Upper Symmetric Successive Over-Relaxation) a été développée par Yoon et Jameson [107] pour la convergence de calculs stationnaires.

Pour réaliser l'inversion d'un système écrit formellement

$$\mathcal{A}\Delta W = -R\left(W^{(q)}\right), \tag{5.6}$$

l'opérateur implicite $\mathcal{A}$ est décomposé en une somme de trois matrices :

$$\mathcal{A}\Delta W = (\mathcal{L} + \mathcal{D} + \mathcal{U})\Delta W = -R\left(W^{(q)}\right), \tag{5.7}$$

où $\mathcal{L}$ contient la partie triangulaire inférieure, $\mathcal{U}$ la partie triangulaire supérieure et $\mathcal{D}$ la partie diagonale de la matrice $\mathcal{A}$. La méthode itérative utilisée s'apparente à une méthode de relaxation SSOR (Symmetric Successive Over Relaxation, Saad [79]), où le maillage est balayé bloc par bloc. Weber [103] a constaté empiriquement que les meilleures performances sont obtenues avec un paramètre de relaxation égale à un. Ceci est équivalent à la méthode de Gauss-Seidel symétrique (SGS). Néanmoins, dans la suite du texte, la dénomination LU-SSOR, plus générale, est conservée mais pour alléger la notation, le paramètre de relaxation est omis.

Une itération LU-SSOR est composée de deux balayages, un de descente et un de remontée :

$$\begin{cases} (\mathcal{L} + \mathcal{D})\Delta W^{(s+1/2)} = -R\left(W^{(q)}\right) - \mathcal{U}\Delta W^{(s)}, \\ (\mathcal{U} + \mathcal{D})\Delta W^{(s+1)} = -R\left(W^{(q)}\right) - \mathcal{L}\Delta W^{(s+1/2)}. \end{cases} \tag{5.8}$$

avec $\Delta W^{(0)} = 0$. Ces deux balayages sont répétés s_{max} fois et $W^{(q+1)} = W^{(q)} + \Delta W^{(s_{max})}$. Les termes convectifs sont écrits avec la séparation des flux de Steger et Warming du premier ordre [91] pour obtenir un système diagonalement dominant qui assure la convergence. Les flux diffusifs sont aussi linéarisés pour préserver cette propriété.

5.2 Extension à la TSM

La TSM revient à résoudre simultanément $2N+1$ équations stationnaires liées par un terme source :

$$V\frac{\partial W_n}{\partial t_n^*} = -\underbrace{\left(R(W_n) + V\sum_{m=-N}^{N} a_m W_{n+m}\right)}_{R_{TSM}(W_n)}, \quad 0 \le n < 2N+1. \tag{5.9}$$

R_{TSM} est l'opérateur de bilan de flux au sein des cellules et tient compte du terme source de la TSM. Si seul l'opérateur des résidus R est linéarisé comme à la section précédente, le système augmenté suivant est obtenu :

$$\begin{pmatrix} \boxed{\frac{V}{\Delta t_0^*}\mathcal{I}+\mathcal{J}_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{\frac{V}{\Delta t_1^*}\mathcal{I}+\mathcal{J}_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{\frac{V}{\Delta t_{2N}^*}\mathcal{I}+\mathcal{J}_{2N}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta W_0 \\ \Delta W_1 \\ \vdots \\ \Delta W_{2N} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} R_{TSM}(W_0^{(q)}) \\ R_{TSM}(W_1^{(q)}) \\ \vdots \\ R_{TSM}(W_{2N}^{(q)}) \end{pmatrix}, \tag{5.10}$$

Ce système est diagonal par bloc et un algorithme LU-SSOR peut-être appliqué indépendamment à chaque instant n. Les instants ne sont couplés que par l'opérateur des résidus explicites R_{TSM}. C'est un avantage indéniable puisqu'il n'y a pas de modification de la phase implicite à réaliser dans *elsA*. Cependant, il sera constaté au prochain chapitre que la convergence est difficile avec cette méthode car, le membre de droite n'étant pas totalement linéarisé, une erreur est commise. La modification de la phase implicite est nécessaire.

5.3 Implicitation totale de la TSM

Les équations de la TSM avec l'opérateur spectral de dérivée temporelle considéré à l'itération $q+1$ sont

$$V\frac{\Delta W_n}{\Delta t_n^*} = -\left[R\left(W_n^{(q+1)}\right) + VD_t\left(W_n^{(q+1)}\right)\right], \quad 0 \le n < 2N+1. \tag{5.11}$$

Comme l'opérateur D_t est linéaire, l'appliquer à W_n à l'itération $q+1$ donne

$$D_t\left(W_n^{(q+1)}\right) = D_t\left(W_n^{(q)}\right) + D_t(\Delta W_n). \tag{5.12}$$

De la même manière que l'opérateur D_t couple les variables conservatives à tous les instants de la période, Eq. (5.12) implique un couplage de tous les incréments ΔW_n. L'équation (5.11) devient

$$\left(\frac{V}{\Delta t_n^*}\mathcal{I} + \mathcal{J}_n\right)\Delta W_n + VD_t(\Delta W_n) = -R_{TSM}\left(W_n^{(q)}\right), \quad 0 \le n < 2N+1. \tag{5.13}$$

Comme le coefficient a_0 (cf. Eq. (4.44)) est nul, il ne vient pas modifier le terme diagonal et la matrice du système devient donc :

$$\mathcal{A}^\star = \begin{pmatrix} \boxed{\frac{V}{\Delta t_0^*}\mathcal{I}+\mathcal{J}_0} & Va_1\mathcal{I} & \dots & Va_N\mathcal{I} & Va_{-N}\mathcal{I} & \dots & Va_{-1}\mathcal{I} \\ Va_{-1}\mathcal{I} & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & Va_1\mathcal{I} & \ddots & \ddots & \vdots \\ Va_{-N}\mathcal{I} & \dots & Va_{-1}\mathcal{I} & \boxed{\frac{V}{\Delta t_N^*}\mathcal{I}+\mathcal{J}_N} & Va_1\mathcal{I} & \dots & Va_N\mathcal{I} \\ \vdots & \ddots & \ddots & Va_{-1}\mathcal{I} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & Va_1\mathcal{I} \\ Va_1\mathcal{I} & \dots & Va_N\mathcal{I} & Va_{-N}\mathcal{I} & \dots & Va_{-1}\mathcal{I} & \boxed{\frac{V}{\Delta t_{2N}^*}\mathcal{I}+\mathcal{J}_{2N}} \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

La nouvelle matrice $\mathcal{A}^\star$ est pleine par bloc et couple tous les incréments ΔW_n. Elle pourrait être décomposé en trois matrices $\mathcal{A}^\star = \mathcal{L}^\star + \mathcal{D}^\star + \mathcal{U}^\star$. Ces matrices sont $2N+1$ fois la taille des matrices décrites Eq. (5.7). Ensuite, un algorithme LU-SSOR pourrait être appliqué sur ce système augmenté mais cela nécessiterait de parcourir tous les blocs à tous les instants et réduirait fortement l'efficacité du code et les performances. Pour éviter cela, deux algorithmes originaux sont maintenant dérivés.

5.4 Méthode Jacobi par bloc

Appliquée à la TSM, la méthode itérative Jacobi par bloc [79] permet de déplacer le terme de couplage implicite $VD_t(\Delta W_n)$ au membre de droite. On obtient ainsi $2N+1$ systèmes indépendants. L'équation (5.13) devient

$$\left(\frac{V}{\Delta t_n^*}\mathcal{I}+\mathcal{J}_n\right)\Delta W_n = -R_{TSM}\left(W_n^{(q)}\right) - VD_t\left(\Delta W_n\right), \quad 0 \le n < 2N+1. \quad (5.15)$$

Il faut ensuite itérer pour calculer le terme de couplage. Une étape l de la méthode Jacobi est

$$\left(\frac{V}{\Delta t_n^*}\mathcal{I}+\mathcal{J}_n\right)\Delta W_n^{(l+1)} = -R_{TSM}(W_n^{(q)}) - VD_t\left(\Delta W_n^{(l)}\right), \quad 0 \le n < 2N+1, \quad (5.16)$$

avec $l \ge 0$. À la première itération Jacobi, le terme de couplage implicite est nul car l'incrément est d'abord nul $\Delta W_n^{(0)} = 0$. Par la suite, celui-ci sera calculé avec la valeur des incréments à l'itération précédente et à la fin des l_{max} itération Jacobi, les variables conservatives sont mises à jour $W_n^{(q+1)} = W_n^{(q)} + \Delta W_n^{(l_{max})}$. À chaque itération Jacobi, un système linéaire doit être résolu. Ce système est de la taille d'un seul instant (cf. Eq. (5.7)) et peut être résolu par n'importe quelle méthode directe ou itérative. La méthode SSOR est privilégiée car elle permet une adaptation minimale de la méthode LU-SSOR déjà implémentée dans *elsA*. Deux variantes, offrant un degré de couplage différent, sont ainsi développées.

5.4.1 Algorithme BJ-SSOR

Pour chaque étape de la méthode Jacobi, le système peut être résolu par la méthode classique SSOR composée d'un balayage de descente

$$(\mathcal{L}_n + \mathcal{D}_n) X^{(s+1/2)} = -\left[R_{TSM}\left(W_n^{(q)}\right) + V D_t \left(\Delta W_n^{(l)}\right)\right] - \mathcal{U}_n X^{(s)}, \tag{5.17}$$

suivi d'une remontée

$$(\mathcal{D}_n + \mathcal{U}_n) X^{(s+1)} = -\left[R_{TSM}\left(W_n^{(q)}\right) + V D_t \left(\Delta W_n^{(l)}\right)\right] - \mathcal{L}_n X^{(s+1/2)}, \tag{5.18}$$

avec $s \geq 0$ et $X^{(0)} = \Delta W_n^{(l)}$. À la fin des s_{max} itérations SSOR, $X^{(s_{max})}$ est mis à jour dans les étapes Jacobi : $\Delta W_n^{(l+1)} = X^{(s_{max})}$. Les matrices $\mathcal{L}_n$, $\mathcal{D}_n$ et $\mathcal{U}_n$ sont équivalentes à Eq. (5.7) où la décomposition est effectuée pour un instant n. Le terme de couplage implicite $D_t(\Delta W_n^{(l)})$ est mis à jour à chaque étape Jacobi l. Il est calculé tous les $2s_{max}$ balayages et gelé les $2s_{max} - 1$ balayages suivants. Comme $\Delta W^{(0)} = 0$, au moins deux étapes Jacobi sont nécessaires pour assurer le couplage implicite ($l_{max} \geq 2$). Si $l_{max} = 1$, il n'y a pas de couplage implicite et Eq. (5.10) est retrouvée. La méthode nécessite donc deux boucles imbriquées comme décrit à l'algorithme 1.

Algorithme 1 Méthode Jacobi-SSOR par bloc pour la TSM

Requiert : $W_n^{(q)}$, $l_{max} \geq 2$, $s_{max} \geq 1$
  $\Delta W_n^{(0)} = 0$
  pour $l = 0$ à $l_{max} - 1$ **faire**
    calcul de $D_t(\Delta W_n^{(l)})$
    $X^{(0)} = \Delta W_n^{(l)}$
    pour $s = 0$ à $s_{max} - 1$ **faire**
      résoudre Eq. (5.17) {*Balayage de descente*}
      résoudre Eq. (5.18) {*Balayage de remontée*}
    fin pour
    $\Delta W_n^{(l+1)} = X^{(s_{max})}$
  fin pour
Assure : $W_n^{(q+1)} = W_n^{(q)} + \Delta W_n^{(l_{max})}$

Pour renforcer le couplage, la méthode suivante est proposée.

5.4.2 Algorithme BJ-SOR

Le système Eq. (5.16) peut être résolu en alternant les étapes SOR. Seule une boucle sur les étapes Jacobi est maintenant nécessaire, avec comme contrainte d'avoir un nombre pair d'étapes l_{max} pour équilibrer les balayages de descente et de remontée. Quand l est pair, le système est résolu par un seul balayage de descente Eq. (5.17) et quand l est impair, par un seul balayage de remontée Eq. (5.18) (cf. algorithme 2). Le terme de couplage implicite $VD_t(\Delta W_n)$ est calculé à chaque balayage sauf au premier. Cette méthode assure donc un couplage plus fort que la méthode BJ-SSOR.

Algorithme 2 Méthode Jacobi-SOR par bloc pour la TSM

Requiert : $W_n^{(q)}$, l_{max} pair
  $\Delta W_n^{(0)} = 0$
  pour $l = 0$ à $l_{max} - 1$ **faire**
    calcul de $D_t(\Delta W_n^{(l)})$
    si l est pair **alors** {*balayage de descente*}
      $X^{(s)} = \Delta W_n^{(l)}$,   résoudre Eq. (5.17), $\Delta W_n^{(l+1)} = X^{(s+1/2)}$
    sinon {*l est impair, balayage de remontée*}
      $X^{(s+1/2)} = \Delta W_n^{(l)}$,   résoudre Eq. (5.18), $\Delta W_n^{(l+1)} = X^{(s+1)}$
    fin si
  fin pour
Assure : $W_n^{(q+1)} = W_n^{(q)} + \Delta W_n^{(l_{max})}$

Synthèse

Deux algorithmes implicites prenant en compte le terme source de la TSM ont été développés. Ils offrent deux niveaux de couplage différents et donc des performances différentes en temps de calcul et en robustesse. Ils sont maintenant validés sur des écoulements d'aérodynamique externe.

Il est à noter que quelques mois après l'article de Sicot *et al.* [83], les travaux de Woodgate et Badcock [106] sont parvenus à la même matrice jacobienne Eq. (5.14). La résolution du système Eq. (5.13) est dans ce cas réalisée par une méthode de Krylov (Saad [79]). Custer *et al.* [19] et Thomas *et al.* [92] présentent également une stratégie très similaire : la résolution complète du système implicite tel que Eq. (5.14) demanderait trop de modifications de leur solveur et ils développent un traitement explicite par bloc semblable à ce qu'autorise la présente méthode Jacobi par bloc.

Chapitre 6

Mise en œuvre et évaluation en aérodynamique externe

La TSM est mise en œuvre dans le solveur *elsA* et validée sur des applications d'aérodynamique externe. Une étude numérique détaillée permet d'évaluer les algorithmes implicites développés au chapitre précédent. La précision et les performances en terme de temps de calcul et de consommation mémoire de la TSM sont également analysées. Enfin, de nouveaux développements nécessaires à une formulation lagrangienne/eulérienne arbitraire sont également décrits en détails et testés.

6.1 Mise en œuvre dans le solveur *elsA*

6.1.1 Duplication des blocs

La principale difficulté d'implantation de la TSM est de réaliser la convergence simultanée et couplée de plusieurs calculs stationnaires. En effet, un solveur n'est conçu que pour traiter un seul calcul à la fois. Plusieurs solutions ont été envisagées comme le couplage de plusieurs processus *elsA* via des technologies comme Corba [1] ou encore le coupleur du Cerfacs PALM [11]. Une autre possibilité consiste à augmenter la taille du vecteur d'état afin de stocker toutes les variables à tous les instants. Ces deux solutions nécessitent d'adapter le solveur et sont assez lourdes à mettre en place. La solution choisie est de dupliquer les blocs du domaine de calcul par autant d'instants demandés par l'utilisateur. En effet, l'unité sur laquelle travaille *elsA* est le bloc. À chaque itération de l'avance en (pseudo-)temps, le solveur boucle sur les blocs et réalise les opérations élémentaires suivantes :

1. calcul des termes de flux convectif et diffusif, les termes sources éventuels, la dissipation artificielle…
2. itération sur les frontières du bloc : s'il s'agit d'un raccord, il y a alors échange d'information avec le bloc adjacent et s'il s'agit d'une limite physique, des routines spécifiques à chaque type de limite s'appliquent.

1. Corba, acronyme de Common Object Request Broker Architecture, est une architecture logicielle, pour le développement de composants et d'Object Request Broker ou ORB. Ces composants, qui sont assemblés afin de construire des applications complètes, peuvent être écrits dans des langages de programmation distincts, être exécutés dans des processus séparés, voire être déployés sur des machines distinctes. Wikipedia.org

Il est donc tout à fait possible de dupliquer les blocs du calcul d'origine en prenant soin de dupliquer les conditions frontières (limites physiques et raccords) de manière cohérente. On obtient ainsi plusieurs groupes de blocs qui sont découplés, *i.e.* non liés par une condition de raccord. Chaque groupe va ainsi correspondre à un instant de la période.

Ce processus est illustré Fig. 6.1. En (a) se trouve le maillage typique d'un profil d'aile : composé de deux blocs, la peau du profil est en trait plein, le raccord entre les deux blocs est en tirets et la condition de champ lointain est en pointillé. En (b), les blocs ont été dupliqués trois fois pour les besoins d'un calcul TSM à trois instants du tangage forcé du profil. *elsA* « considère » maintenant six blocs. En réalité, il s'agit bien de trois groupes des deux blocs d'origine mais le solveur n'est pas impacté. Il va simplement itérer sur ces six blocs et appliquer les conditions aux frontières adéquates.

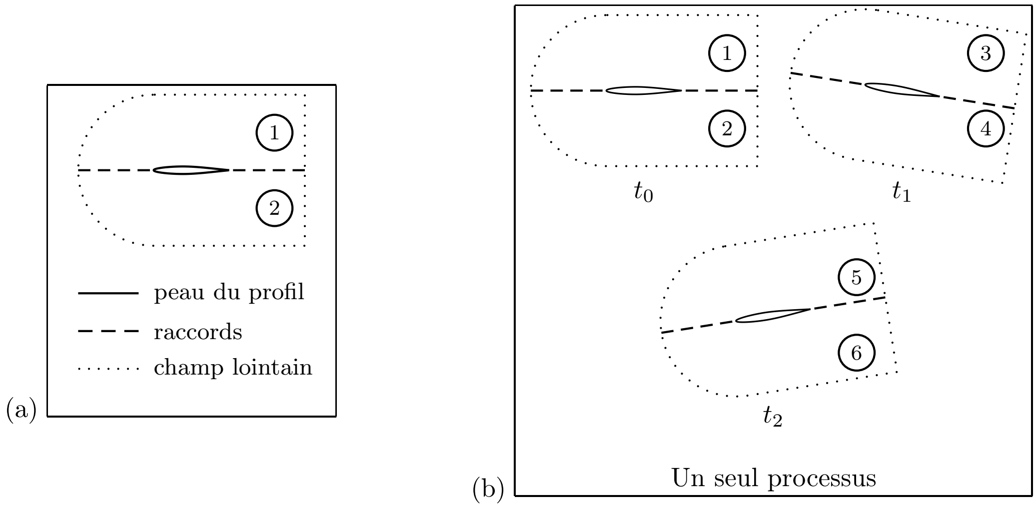


Figure 6.1 – Illustration de la duplication des blocs sur un cas de profil d'aile en tangage forcé.

Ainsi, l'avance en pseudo-temps de tous les instants de la TSM est réalisée en un seul processus *elsA*. La duplication des frontières et conditions limites peut facilement se faire en pré-traitement. La mise en œuvre de la TSM passe donc par le couplage de ces blocs dupliqués via le terme source Eq. (4.43) et son implicitation (cf. chapitre précédent).

6.1.2 Gestion du parallélisme

6.1.2.1 Répartition des blocs

La solution de la duplication des blocs ayant été retenue, ils doivent maintenant être répartis sur les processeurs. Deux notions sont introduites :

1. la notion d'*instant* réunit tous les blocs du même instant. Ainsi à la figure 6.1, les blocs 1 et 2 sont à l'instant 0, les blocs 3 et 4 sont à l'instant 1 et les blocs 5 et 6 sont à l'instant 2.
2. la notion de *fratrie* réunit tous les blocs dupliqués et couplés par le terme source : ainsi les blocs 1, 3 et 5 forment une fratrie, celle du bloc de l'extrados du profil et les blocs 2, 4 et 6 forment une autre fratrie, celle de l'intrados du profil.

Les blocs pourraient être répartis afin d'optimiser la répartition de charge entre les processeurs. Cette solution provoquerait l'éclatement d'une fratrie sur plusieurs processeurs entraînant de nombreuses communications parallèles supplémentaires pour le calcul du terme source. Ainsi, même si la répartition de charge est optimale du point de vue de la répartition des points de calculs, elle ne l'est pas forcément pour la TSM. Afin d'éviter ce phénomène, une fratrie est conservée sur un seul processeur, un processeur pouvant gérer plusieurs fratries.

6.1.2.2 Répartition de charge et mémoire

Pour les calculs en parallèle, il y a deux points importants à considérer : la répartition de charge et la mémoire.

En répartissant les fratries de la même manière que les blocs dans le calcul original, la répartition de charge du calcul TSM sera identique en proportion au calcul original. Mais dans l'absolu, le déséquilibre original sera de plus en plus pénalisant au fur et à mesure que l'on considérera plus d'instants, synonymes de plus de points de calcul. S'il est important d'avoir une bonne répartition de charge dans le calcul original, c'est encore plus vrai pour la TSM.

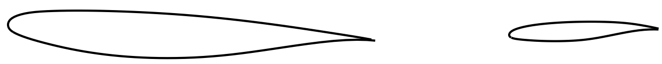
Plus de points de calcul entraînent une consommation accrue de mémoire. Comme un processeur gère l'ensemble des blocs d'une ou plusieurs fratries, il faut s'assurer que celui-ci soit capable de supporter la montée en ordre de la TSM du point de vue de la mémoire. Il existe en effet un seuil d'harmoniques au delà duquel le nombre de points de calcul sera trop important pour tenir en mémoire vive, obligeant le processeur à simuler de la mémoire vive sur disque (swap). Les temps d'accès aux disques étant beaucoup plus importants que ceux de la mémoire vive et leur débit plus faible, les performances s'écroulent.

Le domaine de calcul doit donc être divisé en plusieurs domaines, ceci afin de se donner des degrés de libertés lors de la montée en ordre de la TSM et pour optimiser la répartition de charge. Un outil dédié à cette tâche est déjà présent dans *elsA*.

L'implémentation de la TSM est maintenant validée sur un cas d'aile en mouvement de tangage forcé périodique.

6.2 Aile en mouvement de tangage harmonique forcé

Le cas test choisi est l'aile LANN [109], du nom de ses concepteurs Lockheed Georgia, Air Force Flight Dynamic Laboratory, NASA Langley et National Aerospace Laboratory (Pays-Bas). La variation d'incidence suit une loi sinusoïdale $\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_m \sin(2\pi f t)$ avec une incidence moyenne $\alpha_0 = 0{,}6\,^\circ$, une amplitude $\alpha_m = 0{,}25\,^\circ$ et une fréquence de 24 Hz. Le nombre de Reynolds est de 5,43 millions et le régime transsonique ($\mathrm{Ma}_\infty = 0{,}822$). L'aile est constituée de profils super-critiques (cf. Fig. 6.2) et supposée rigide.



(a) Profil emplanture (b) Profil proche saumon

Figure 6.2 – Différents profils super-critiques de l'aile LANN (à l'échelle).

Ses caractéristiques sont présentées Tab. 6.1 ainsi que l'emplacement des sondes de pression à 20.0 %, 32.5 %, 47.5 %, 65.0 %, 82.5 % et 95.0 % de l'envergure (Fig. 6.3).

allongement	7,92
flèche	25,0 °
flèche du bord d'attaque	27,493 °
flèche du bord de fuite	16,908 °
vrillage	−4,8 °
corde à d'emplanture	360,8 mm
envergure	1 000,0 mm
surface alaire	0,2526 m^2

Table 6.1 – Caractéristiques géométriques de l'aile LANN.

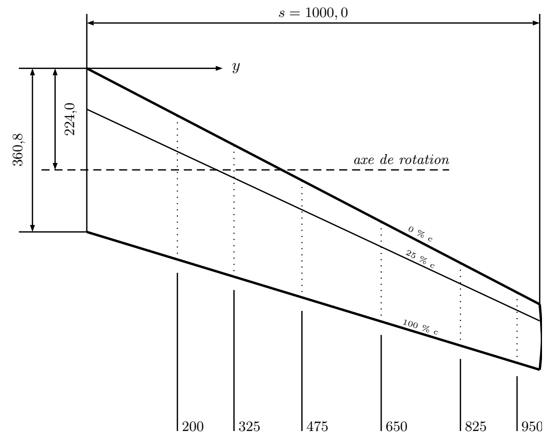


Figure 6.3 – Dimensions de l'aile LANN (vue de dessus, à l'échelle).

Les simulations numériques sont conduites sur un maillage composé de 1,1 million de cellules (cf. Fig. 6.4). L'étendue du maillage de part et d'autre de l'aile est schématisée Fig. 6.5.

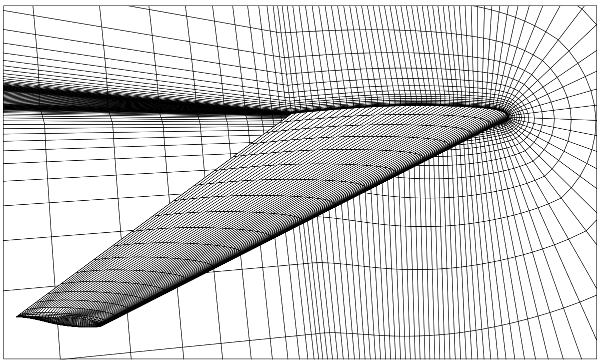


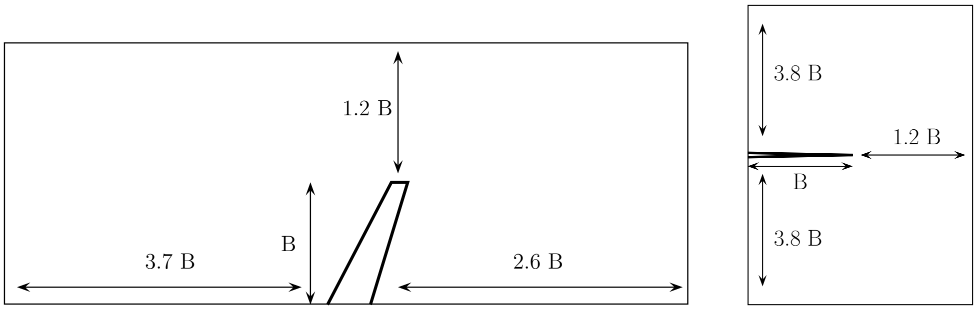
Figure 6.4 – Maillage de l'aile LANN (un point sur deux pour une meilleure lisibilité).

Le schéma centré du second ordre de Jameson-Schmidt-Turkel (JST) [55] est utilisé pour les termes convectifs et un schéma centré du second ordre est utilisé pour les termes diffusifs. Un cycle multi-grille en V avec deux niveaux de grilles grossières est employé en combinaison avec la technique du pas de temps local pour accélérer la convergence des calculs. La turbulence est modélisée par le modèle à une équation de transport de Spalart et Allmaras [88].

Dans un premier temps, une étude numérique est menée pour valider les algorithmes Jacobi par bloc développés au chapitre précédent. Dans un second temps, la précision et les performances de la TSM seront définies en comparant à des données expérimentales et un calcul U-RANS de référence.

6.2.1 Étude numérique des algorithmes BJ-SSOR et BJ-SOR

Les courbes de convergence de calculs utilisant la stratégie LU-SSOR (sans couplage implicite) décrite § 5.2 sont données Fig. 6.6(a) pour plusieurs harmoniques. Le résidu est défini



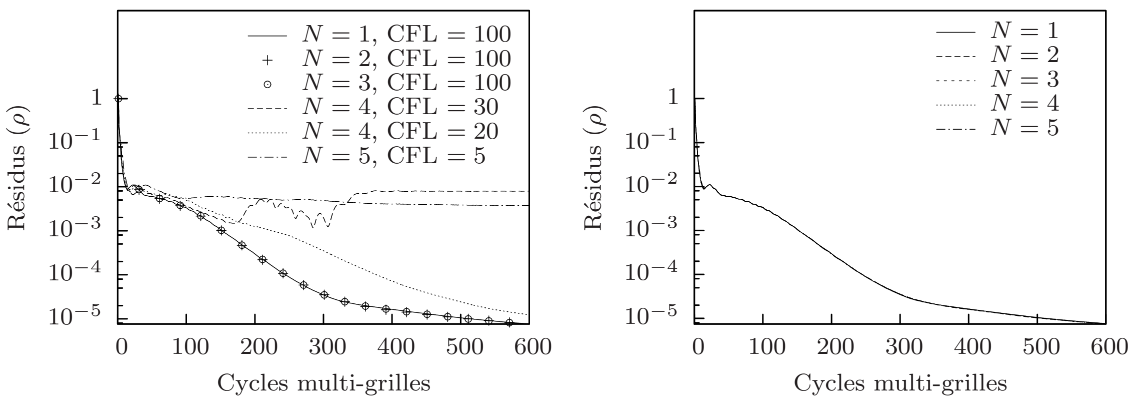
(a) Vue de dessus : frontières amont, aval et longitudinale

(b) Vue de face : frontières haute, basse et longitudinale

Figure 6.5 – Étendue du maillage de l'aile LANN (non à l'échelle).

comme la moyenne quadratique de l'opérateur des résidus $R(W)$ sur toutes les cellules du maillage, moyennée par le nombre d'instants. Les courbes indiquent le résidu de la densité ρ et sont normées par le résidu de la première itération pour faciliter les comparaisons. Le nombre de CFL autorisé par la méthode LU-SSOR peut-être très élevé, néanmoins il a été constaté empiriquement qu'au delà de 100, la vitesse de convergence ne se trouve pas modifiée.

À la figure 6.6(a), le CFL doit être réduit au fur et à mesure que le nombre d'harmoniques considérés s'accroît. Ainsi pour $N = 4$, le CFL est défini à 20 (ligne pointillée) car le calcul ne converge pas avec un CFL de 30 (tirets). Dans ce cas, il faut au moins 600 itérations pour obtenir une convergence acceptable. Pour cinq harmoniques, il faut quelques milliers d'itérations à un CFL de 5 pour atteindre l'état stationnaire. La première stratégie Jacobi utilisée est la BJ-SOR (cf. §. 5.4.2) car elle assure le couplage le plus fort. Les résultats avec $l_{max} = 4$ sont présentées Fig. 6.6(b). La prise en compte du terme source de la TSM dans la phase implicite améliore notablement la convergence puisque dorénavant tous les calculs sont menés avec un CFL de 100 et que presque aucune différence n'est visible dans les résidus quel que soit le nombre d'harmoniques.



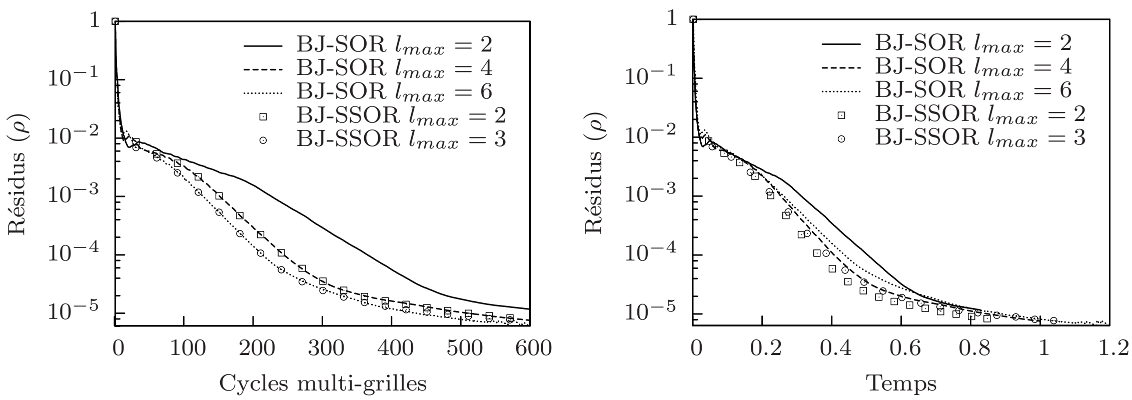
(a) LU-SSOR standard

(b) BJ-SOR (tous à CFL = 100)

Figure 6.6 – Convergence des calculs LANN.

Les deux stratégies Jacobi SSOR et SOR sont maintenant comparées Fig. 6.7. Le cas le plus défavorable à la convergence, *i.e.* $N = 5$ et CFL = 100, est choisi. Les paramètres des deux algorithmes ainsi que la mise à jour du terme de couplage implicite sont présentés Tab. 6.2. La stratégie BJ-SOR avec $l_{max} = 2$ (seul le balayage de remontée assure le couplage implicite) est suffisante pour assurer la convergence. Grâce aux trois balayages de couplage, la méthode BJ-SOR avec $l_{max} = 4$ accélère sensiblement la convergence en terme de cycles multi-grilles. Cela reste vrai pour le temps de calcul même si cette accélération est moins prononcée. La meilleure convergence en terme de cycles multi-grilles est obtenu avec $l_{max} = 6$, mais le temps de calcul pâtit d'un couplage trop fréquent.

Les résultats pour l'algorithme BJ-SSOR sont indiqués par des marques vides. Comme l'incrément ΔW_n est nul à la première étape Jacobi, il faut au moins deux étapes pour assurer le couplage implicite comme indiqué à la table 6.2. Or six balayages se sont avérés trop coûteux avec la méthode BJ-SOR. Pour assurer un couplage maximal en si peu de balayages, s_{max} est défini à un pour l'algorithme BJ-SSOR (*i.e.* seul un aller-retour par étape Jacobi). Même si le couplage est plus faible, la vitesse de convergence est quasiment la même en terme de cycles multi-grilles. Comme le terme de couplage implicite $D_t(\Delta W_n)$ est calculé moins souvent, le temps de calcul est en faveur de l'approche BJ-SSOR à nombre de balayages égal.



(a) Cycles multi-grilles

(b) Temps de calcul adimensionné

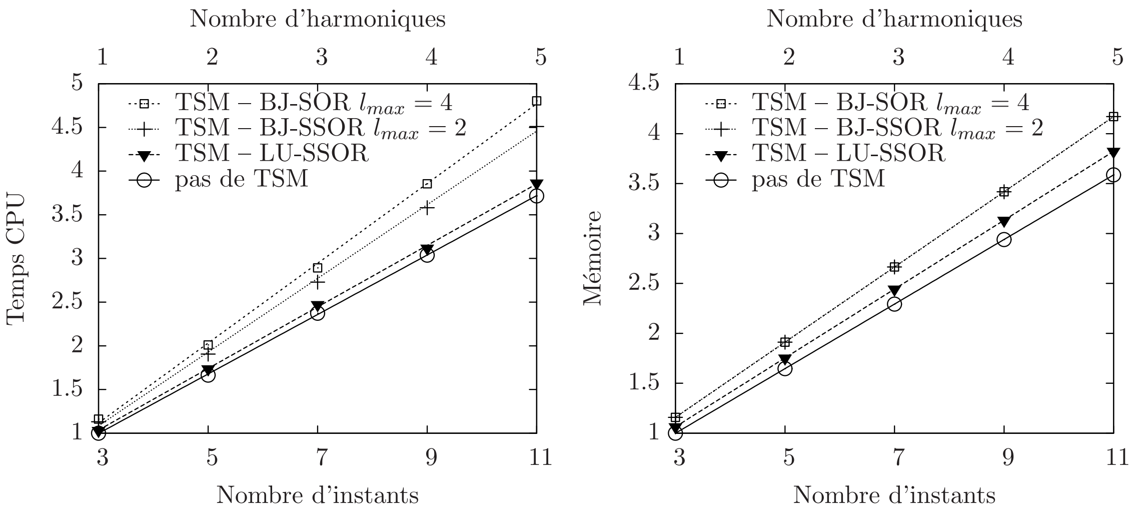
Figure 6.7 – Calculs TSM LANN $N = 5$: comparaison des stratégies BJ-SSOR et BJ-SOR (tous à CFL = 100).

Le temps de calcul et la consommation mémoire de ces algorithmes ne sont pas négligeables comme indiqué Fig. 6.8. Les lignes indiquent les tendances et ne passent pas forcément par les points de données. Les simulations sont toutes réalisées avec quatre balayages comme indiqué Tab. 6.2. Tous les résultats sont normés par le coût de trois calculs stationnaires découplés. Les cercles indiquent le temps de calcul et la consommation mémoire pour $2N + 1$ calculs stationnaires découplés. Les triangles inversés dénotent la TSM avec l'approche LU-SSOR standard (cf. Eq. (5.10)). La complexité du calcul du terme source de la TSM $D_t(W_n)$ est quadratique en le nombre d'instants (en $\mathcal{O}[(2N+1)^2]$), mais comme il n'est impliqué que dans une petite partie du calcul global, le temps de restitution reste linéaire en le nombre d'instants. Finalement, cette approche rajoute une pénalité de 3,5 % en temps de calcul et 6,5 % en mémoire.

Quand on considère l'approche BJ-SOR (carrés), D_t est appliqué plusieurs fois supplémentaires sur les incréments ΔW_n pendant les boucles SOR, impliquant un temps de calcul

Nombre de balayages	BJ-SSOR $s_{max} = 1$			BJ-SOR	
	l	s	actualisé	l	actualisé
1	0	0	non	0	non
2	0	0	non	1	oui
3	1	0	oui	2	oui
4	1	0	non	3	oui
5	2	0	oui	4	oui
6	2	0	non	5	oui

Table 6.2 – Mise à jour du terme de couplage implicite. Valeur des indices de boucles l et s avant chaque balayage, et si le terme de couplage est actualisé.



(a) Temps de calcul

(b) Consommation mémoire

Figure 6.8 – Coût des différents algorithmes d'implicitation.

supérieur de 30 % à la méthode LU-SSOR. La consommation mémoire est augmentée de 10 % dans le même temps afin de stocker le terme de couplage implicite. Avec la méthode BJ-SSOR (signes plus), le terme de couplage est calculé moins souvent (cf. Tab. 6.2) de sorte que le surcoût de calcul est de 20 %. La consommation mémoire reste identique car les même informations sont stockées même si elles ne sont pas calculées au même moment.

En conclusion, l'algorithme BJ-SSOR assure une convergence rapide à un coût supérieur de 20 % du temps de calcul et 10 % du besoin mémoire par rapport à l'algorithme LU-SSOR. Néanmoins les pas de pseudo-temps autorisés sont nettement plus élevés et la TSM se trouve moins sensible à des calculs avec un nombre d'harmoniques élevé. Ce surcoût est donc largement compensé par le gain en vitesse de convergence.

6.2.2 Validation et évaluation des performances

Les résultats obtenus par la TSM implicite sont maintenant présentés sur l'aile LANN et comparés à un calcul U-RANS de référence et à des données expérimentales. La méthode BJ-SSOR avec 300 cycles de multi-grilles et $l_{max} = 2$ est retenue car elle offre le meilleure compromis entre vitesse de convergence et temps de calcul. La variation d'incidence est obtenue par variation des conditions de champs lointains à chaque instant.

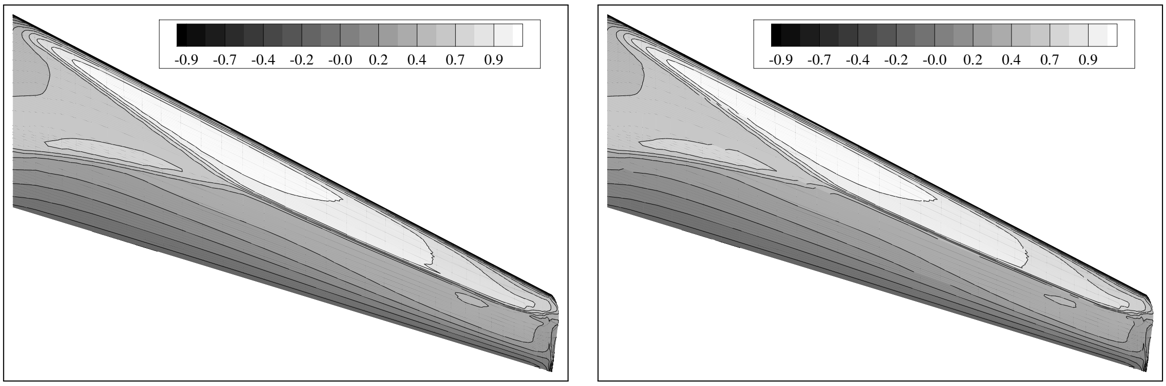
Des données expérimentales sont disponibles [109] pour la moyenne temporelle et le premier harmonique du coefficient de pression pour six sections de l'aile. Le coefficient de pression est défini comme la différence entre la pression statique locale et la pression statique à l'infini normée par la pression dynamique à l'infini :

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty |V|^2_\infty}. \tag{6.1}$$

L'objectif est de comparer avec une méthode instationnaire classique. Un calcul U-RANS de référence, effectué dans un contexte industriel, est fournis par Delbove [21]. Il est réalisé avec une méthode DTS comportant 50 sous-itérations sur le pseudo-temps résolus par la méthode d'Euler rétrograde et LU-SSOR. Il est initialisé par le résultat d'un calcul stationnaire à incidence moyenne et s'étend sur deux périodes pour atteindre l'état périodique. Chaque période est discrétisée par 30 instants.

Un instantané du coefficient de pression à incidence moyenne ($\alpha = 0.6°$) croissante est montré Fig. 6.9 pour le U-RANS et la TSM à cinq harmoniques. Un choc en lambda est clairement visible près de l'emplanture. Cette comparaison montre un bon accord qualitatif entre la TSM et le U-RANS.

Une analyse de Fourier est conduite sur les six sections de l'aile. La partie moyenne est présentée Fig. 6.10. Le C_p vaut à peu près 1 au bord d'attaque puis décroît rapidement aussi bien sur l'extrados que sur l'intrados pour retrouver une petite valeur positive près du bord de fuite. Comme la pente est très raide au bord d'attaque, l'échelle de l'axe des ordonnées a été volontairement tronqué à une valeur inférieure à un afin de mieux voir les différences entre les courbes. Les courbes de C_p sont habituellement tracées avec l'axe des ordonnées inversé. Un calcul TSM à un harmonique est suffisant pour bien correspondre au calcul U-RANS de référence sauf au niveau du choc où la solution varie un peu. Avec plus d'harmoniques ($N = 3$ et $N = 5$), la TSM est parfaitement superposée au U-RANS. Les deux types de simulations correspondent assez bien aux résultats expérimentaux même si la position du choc est prédite un peu plus en aval de l'écoulement.



(a) U-RANS (b) TSM $N = 5$

Figure 6.9 – Coefficient de pression sur l'extrados de l'aile LANN à $\alpha = 0.6°$ pour α croissant.

Les parties réelle et imaginaire du C_p sont présentées Fig. 6.11 et 6.12. Les différences sont plus prononcées et un calcul à un seul harmonique ne suffit plus à bien égaler le calcul U-RANS : celui-ci présente un léger déphasage et des sursauts au niveau du choc. Un calcul à trois harmoniques améliore beaucoup la qualité des résultats même si certains pics restent pointus. Il faut cinq harmoniques pour lisser ces irrégularités.

Cela souligne l'intérêt pour un algorithme implicite adapté à la montée en harmonique de la TSM quand d'autres auteurs utilisant des algorithmes explicites rencontrent des difficultés de convergence.

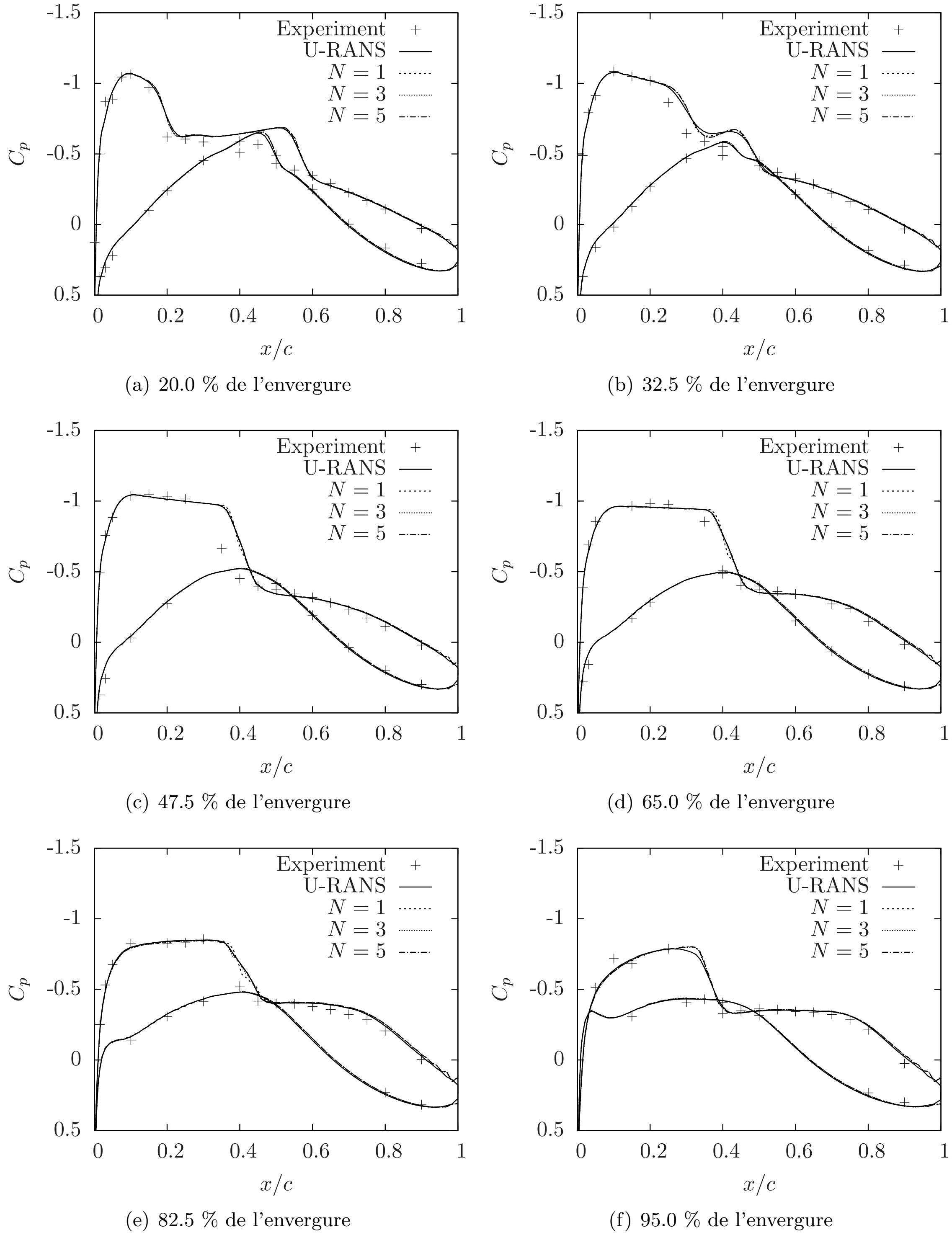
Au final, un calcul TSM à trois harmoniques suffit à obtenir des résultats satisfaisants pour une précision industrielle. Dans ce cas, le gain en temps de calcul est de l'ordre de 2,5 par rapport au U-RANS comme indiqué Fig. 6.13.

6.3 Description Eulérienne/Lagrangienne arbitraire

Il existe deux principales formulations utilisées pour la discrétisation des milieux continus :

1. la formulation eulérienne où le maillage de discrétisation spatiale reste fixe et le milieu continu est en mouvement dans celui-ci. Cette formulation autorise de grandes distorsions du mouvement du milieu mais l'interface entre deux milieux doit être finement discrétisée.
2. la formulation lagrangienne dans laquelle les points de maillage suivent les particules en mouvement. Cette formulation permet de tracer facilement l'interface entre deux milieux mais la déformation du milieu en mouvement requiert de fréquentes opérations de remaillage.

Ces deux cas sont illustrés Fig. 6.14(a). Il existe une troisième formulation, plus générale, la formulation Eulérienne/Lagrangienne arbitraire (ALE) [24] où la déformation du maillage est indépendante du mouvement du milieu continu (Fig. 6.14(a)). Comme ni le référentiel du maillage, ni le référentiel du milieu ne peuvent être pris comme référence, la formulation ALE utilise un troisième référentiel, absolu par nature (Fig. 6.14(b)). Il est possible de passer du référentiel absolu au référentiel du milieu et du maillage par des transformations appropriées (Ψ et Φ sur le schéma). La première fait intervenir la vitesse des particules dans le référentiel absolu et la deuxième la vitesse de maillage (ou vitesse de grille) par rapport au référentiel



(a) 20.0 % de l'envergure

(b) 32.5 % de l'envergure

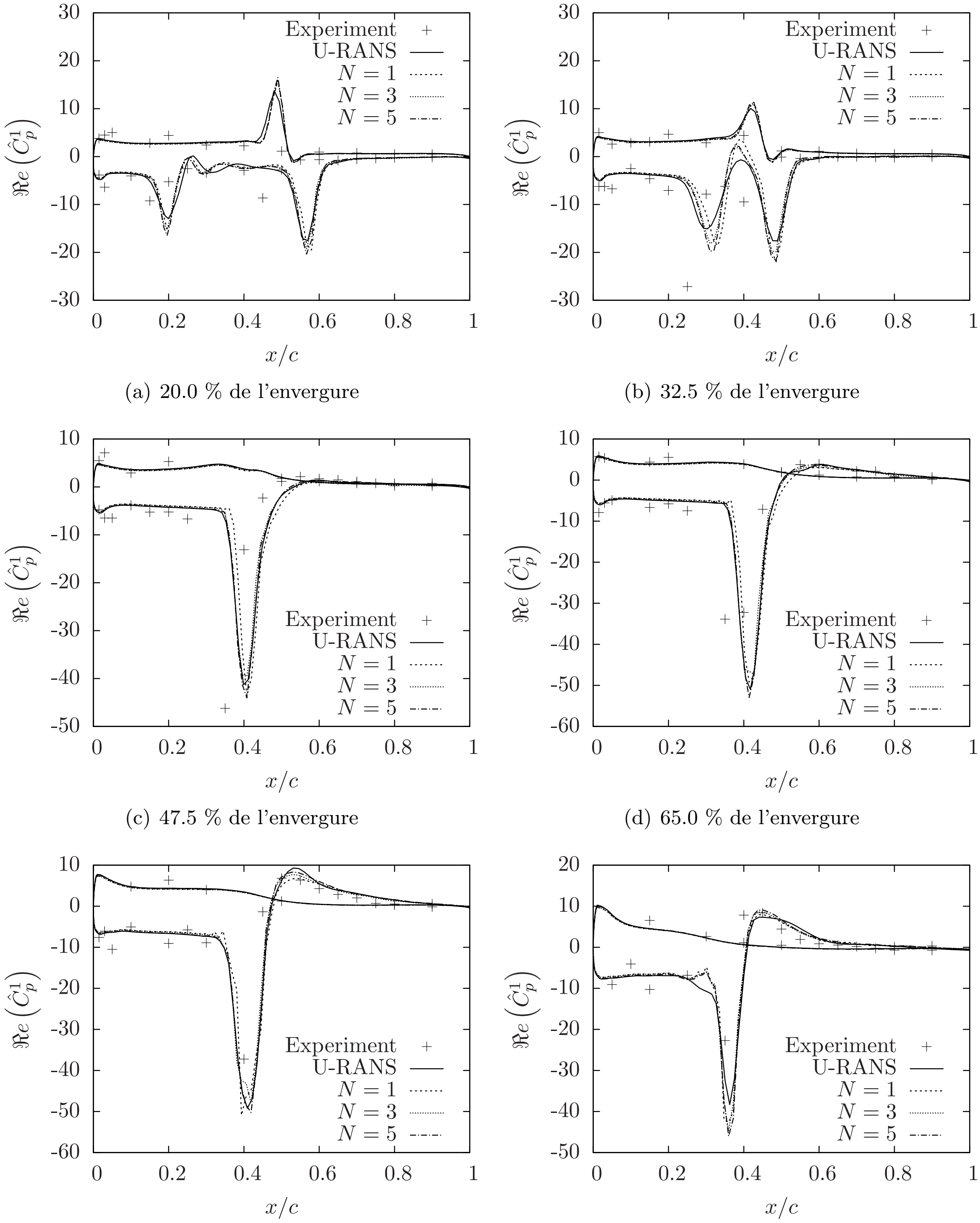
(c) 47.5 % de l'envergure

(d) 65.0 % de l'envergure

(e) 82.5 % de l'envergure

(f) 95.0 % de l'envergure

Figure 6.10 – Moyenne temporelle du C_p de l'aile LANN.



(a) 20.0 % de l'envergure

(b) 32.5 % de l'envergure

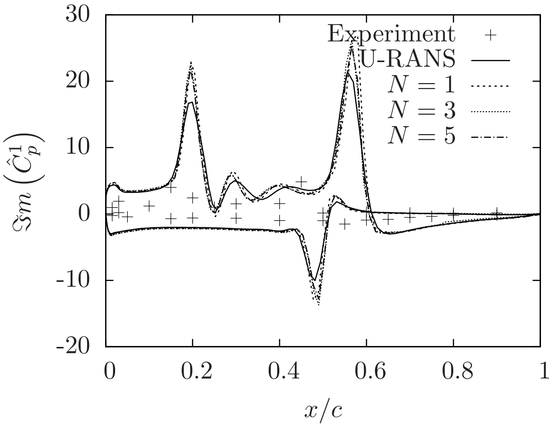
(c) 47.5 % de l'envergure

(d) 65.0 % de l'envergure

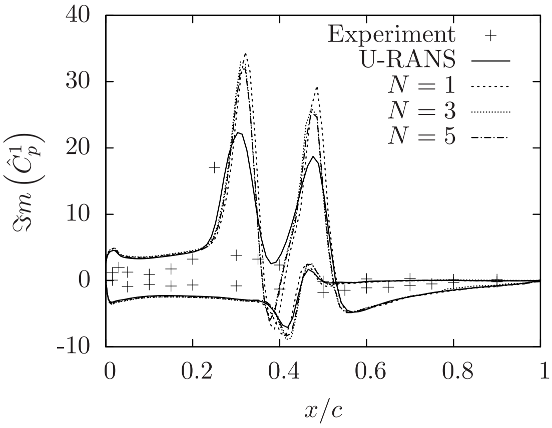
(e) 82.5 % de l'envergure

(f) 95.0 % de l'envergure

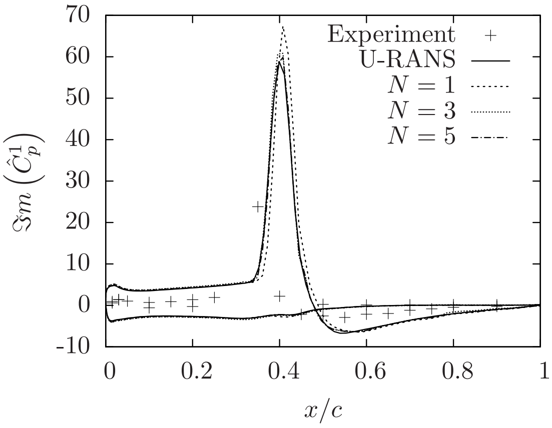
Figure 6.11 – Partie réelle du premier harmonique du C_p de l'aile LANN.



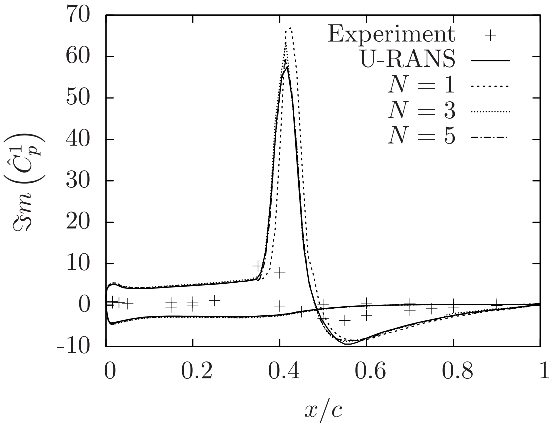
(a) 20.0 % de l'envergure



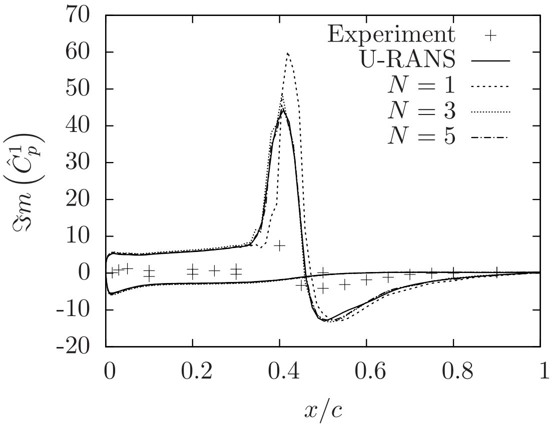
(b) 32.5 % de l'envergure



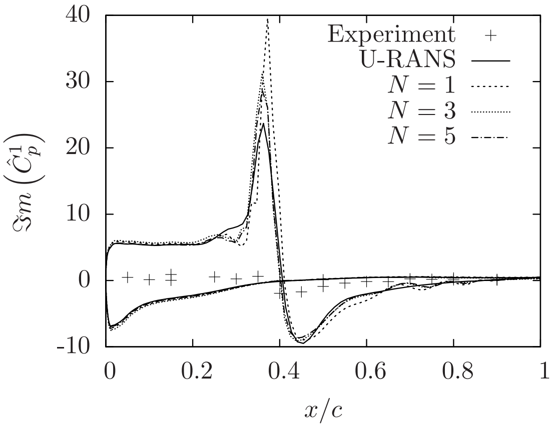
(c) 47.5 % de l'envergure



(d) 65.0 % de l'envergure



(e) 82.5 % de l'envergure



(f) 95.0 % de l'envergure

Figure 6.12 – Partie imaginaire du premier harmonique du C_p de l'aile LANN.

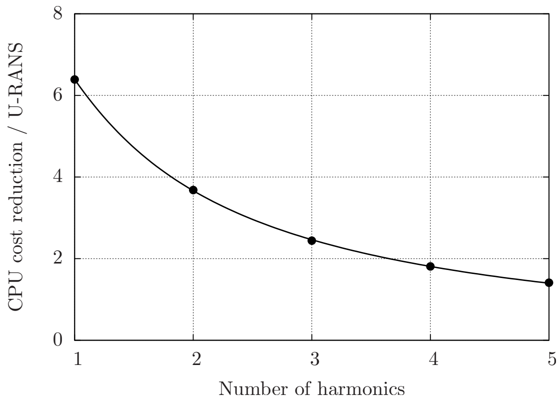


Figure 6.13 – Gain de temps de calcul de la TSM par rapport au U-RANS sur le cas LANN.

absolu, cette vitesse couvrant les mouvements rigides et les déformations. Il est alors aisé de dériver une transformation entre ces deux derniers référentiels par composition. Par exemple le mouvement des particules par rapport au maillage peut s'exprimer comme $\varphi = \Phi \circ \Psi^{-1}$. Cette transformation fait intervenir une vitesse dite convective, soit la vitesse relative des particules par rapport au maillage (*i.e.* la vitesse absolue des particules moins la vitesse de grille).

Cette approche est très utilisée en aéroélasticité où le fluide, résolu en eulérien, et la structure, résolue en lagrangien, sont couplés. De nombreux articles traitent de simulations aéroélastiques menées avec des méthodes harmoniques, principalement en aérodynamique externe par Thomas *et al.* [93, 94, 95, 96] mais également en turbomachine par Kielb *et al.* [57]. Néanmoins, ces papiers décrivent succinctement la méthode harmonique employée et ne montrent pas son adaptation à la formulation ALE. Cette section décrit le traitement développé et mis en œuvre dans *elsA* avant de le tester sur un cas d'aileron en mouvement d'oscillations forcées.

6.3.1 Adaptation de la TSM à la formulation ALE

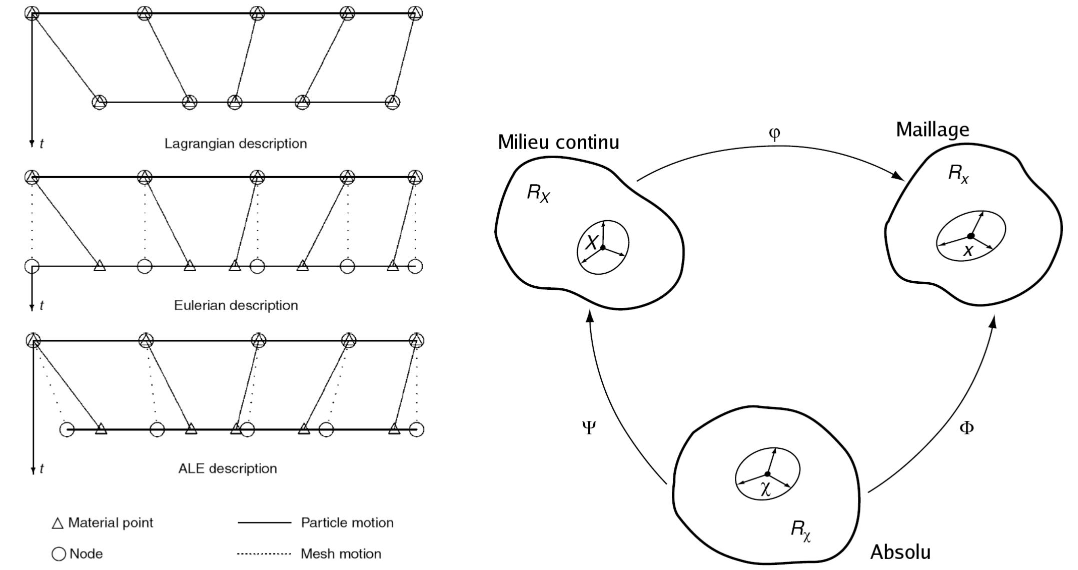
Comme la variation de la géométrie est périodique, il en va de même pour le volume V d'une cellule et l'opérateur D_t peut être appliqué sur (VW), de sorte que les équations de la TSM Eq. (4.42) deviennent

$$V_n \frac{\partial W_n}{\partial t_n^*} + R(W_n, s_n) + D_t(V_n W_n) = 0, \quad 0 \leq n < 2N+1. \tag{6.2}$$

À un instant n donné, le volume V_n est constant et n'est donc pas présent dans la dérivée sur le pseudo-temps.

Pour calculer la vitesse convective, différence de la vitesse absolue et de la vitesse de grille s, il est nécessaire de calculer cette dernière. Par exemple, les flux convectifs en deux dimensions Eq. (4.2) sont en formulation ALE :

$$F_{c_x} = \begin{pmatrix} \rho(u - s_x) \\ \rho u(u - s_x) + p \\ \rho v(u - s_x) \\ \rho H(u - s_x) \end{pmatrix}, \qquad F_{c_y} = \begin{pmatrix} \rho(v - s_y) \\ \rho u(v - s_y) \\ \rho v(v - s_y) + p \\ \rho H(v - s_y) \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$



(a) Mouvement du maillage et des particules

(b) Référentiels absolu, du maillage et des particules

Figure 6.14 – Formulation Eulérienne/Lagrangienne arbitraire. D'après Donea *et al.* [24].

Cette vitesse est la somme d'une vitesse d'entraînement s^E et d'une vitesse de déformation s^D. La vitesse d'entraînement résulte d'une formule analytique. Dans l'approche ALE, elle permet de prendre en compte les forces de Coriolis et centrifuge dans le repère entraîné. En revanche, la vitesse de déformation est égale à la variation de la position des points de maillage et donc à la dérivée de cette position. Lors d'un calcul instationnaire classique (type DTS), la vitesse de déformation est obtenue par un simple opérateur de différence finie entre les points de deux maillages déformés à des instants successifs :

$$s_n^D \simeq \frac{M_n - M_{n-1}}{\Delta t}, \quad \text{en tout point } M. \tag{6.4}$$

La précision de la vitesse ainsi obtenue dépend de la proximité des deux instants utilisés pour l'évaluation. Dans un calcul U-RANS typique d'aérodynamique externe où une période est discrétisée par au moins 30 instants, la précision obtenue est suffisante. En revanche, pour un calcul TSM cette approche ne peut donner un résultat satisfaisant puisque, par principe, un nombre réduit d'instants discrétise une période. Il convient donc de trouver une alternative.

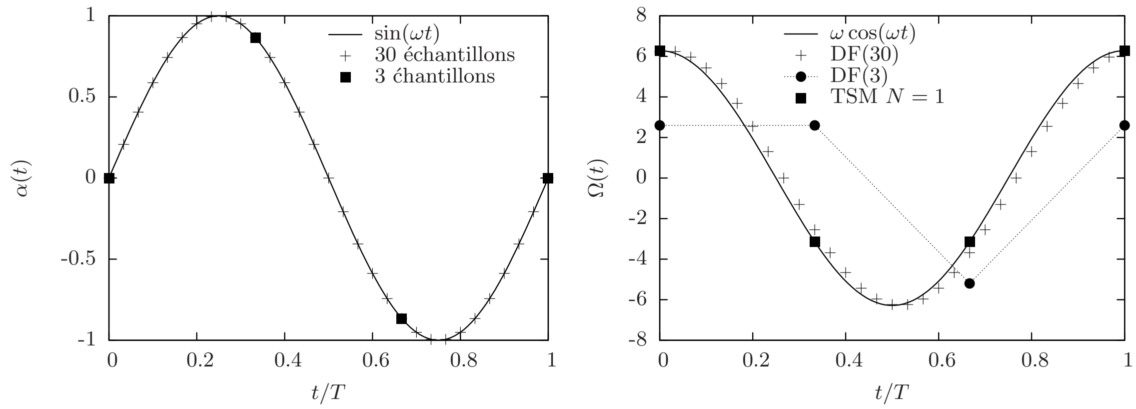
Ici encore, l'opérateur spectral de dérivée temporelle D_t se révèle utile. Il peut servir à approcher la vitesse en un instant de la période en utilisant les coordonnées des maillages à tous les autres instants et la périodicité du problème :

$$s_n^D \simeq D_t(M_n) = \frac{2\pi}{T} \sum_{m=-N}^{N} a_m M_{n+m} \,, \tag{6.5}$$

où les coefficients a_m sont donnés par Eq. (4.44). Cette formule ne fait intervenir que les maillages déformés aux instant de la TSM déjà nécessaires pour le calcul. Dans le cas d'un mouvement forcé, cette vitesse de grille dispose d'une formulation analytique. Il serait possible de mettre en œuvre ces formulations dans elsA mais chaque cas constituerait un cas particulier.

L'avantage de la formulation basée sur l'opérateur de la TSM est qu'elle est générique. De plus, elle est très précise comme le montre le paragraphe suivant.

L'intérêt d'utiliser l'opérateur de la TSM pour évaluer la vitesse de grille a déjà été illustré Fig. 4.3, repris ici Fig. 6.15. Une déformation harmonique en sinus est imposée, cette loi est typique d'une aile en tangage forcée comme étudié à la section précédente. La déformation sera alors directement reliée à la vitesse de rotation instantanée $\Omega(t) = \partial\alpha/\partial t$. La figure (a) montre l'échantillonnage de l'incidence à 30 instants pour réaliser un calcul différences finies Eq. (6.4) et l'échantillonnage à 3 instants pour la TSM à un harmonique Eq. (6.5). Les résultats de l'approximation de la dérivée par les deux schémas sont présentés en (b). Le schéma de différences finies (signes plus) montre un léger déphasage qui se réduit quand l'échantillonnage est raffiné. Quand ce schéma est également appliqué sur l'échantillonnage très grossier de la TSM, le résultat (disques) est très mauvais comme attendu. La TSM (carrés) donne la meilleure approximation avec une erreur proche du zéro machine.



(a) $M(t) = \sin(\omega t)$ (b) $s^D(t) = \omega\cos(\omega t)$

Figure 6.15 – Vitesse de grille : comparaison entre les différences finies et la TSM.

On peut toutefois noter que si le contenu harmonique de la perturbation est important, il sera nécessaire de monter en ordre global de la TSM pour calculer précisément la vitesse de grille. Évidemment, il en va de même pour le terme source de la TSM, et même pour le calcul U-RANS. Il est raisonnable de supposer que, en réponse à une perturbation avec un contenu harmonique donné, la vitesse de déformation dispose d'un spectre moins riche que les variables de l'écoulement (du fait des non linéarités des équations de Navier-Stokes). À ce titre, l'erreur sur la vitesse de grille calculée par cette approche serait inférieure à celle sur la dérivée temporelle des variables de l'écoulement.

Les développements sur maillages déformés ont été soumis par Dufour *et al.* [25] à l'AIAA Journal. Cet article porte principalement sur la comparaison des méthodes de linéarisation et la TSM. Le cas test utilisé, un aileron en oscillations forcées, est maintenant repris pour la validation.

6.4 Aileron en mouvement d'oscillations harmoniques forcées

La configuration maintenant étudiée est un profil d'aile en régime transsonique (Ma_∞ = 0,853) avec un aileron monté à 75 % de la corde, oscillant à 30 Hz avec une amplitude de 1,1 $^\circ$.

La fréquence réduite est $fc/2U_\infty = 0{,}06$ et le nombre de Reynolds est $2{,}4 \cdot 10^6$. Le profil reste à une incidence nulle. L'oscillation de l'aileron est appliquée par déformation de maillage et ce cas test permet donc de valider les développements théoriques présentés § 6.3.

Le maillage utilisé est présenté Fig. 6.16. Le domaine s'étend 30 cordes en amont, aval, au-dessus et au-dessous du profil. Il y a 354 points autour de l'aileron et 70 dans la direction normale. Près de la peau du profil, 25 points discrétisent la couche limite.

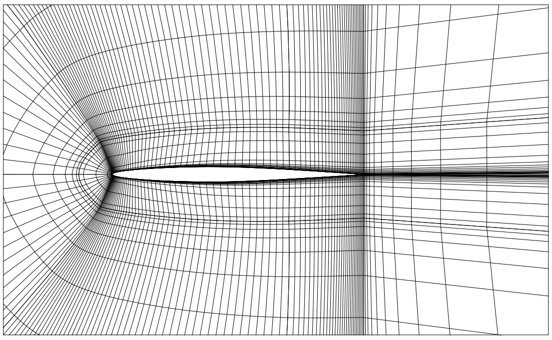


Figure 6.16 – Maillage du NACA64A006 avec aileron (un point sur deux pour une meilleure visibilité).

Comme l'incidence moyenne est nulle, un choc se forme tour à tour sur l'extrados et l'intrados du fait de l'effet de courbure induit par l'oscillation de l'aileron ainsi que le montre les instantanés de nombre de Mach Fig. 6.17. Quand l'aileron est en position haute, un choc se forme sur l'intrados et vice-versa. Des instantanés du coefficient de pression Fig. 6.18 sur la peau du profil montrent également cette alternance du choc. Le battement du choc est également clairement visible.

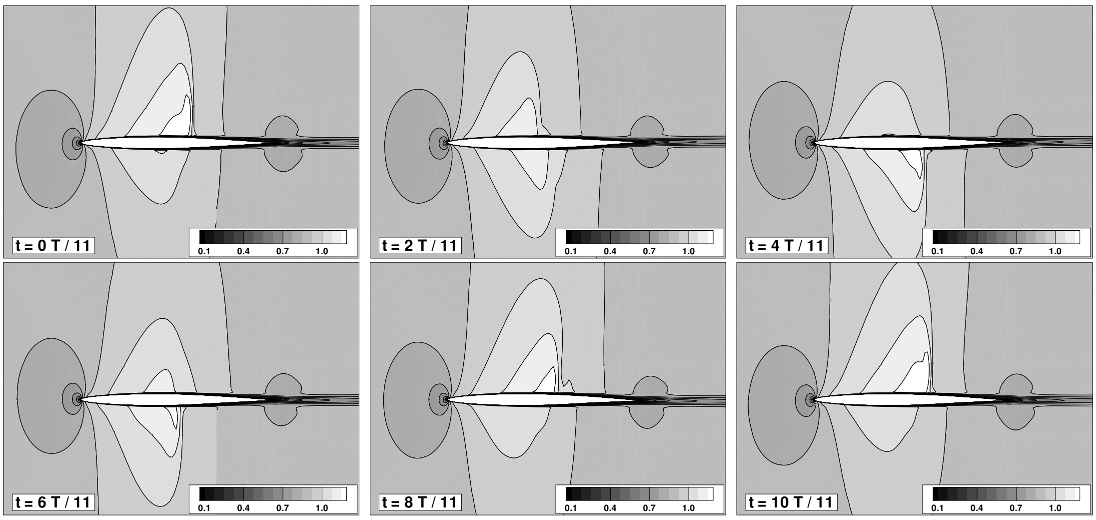
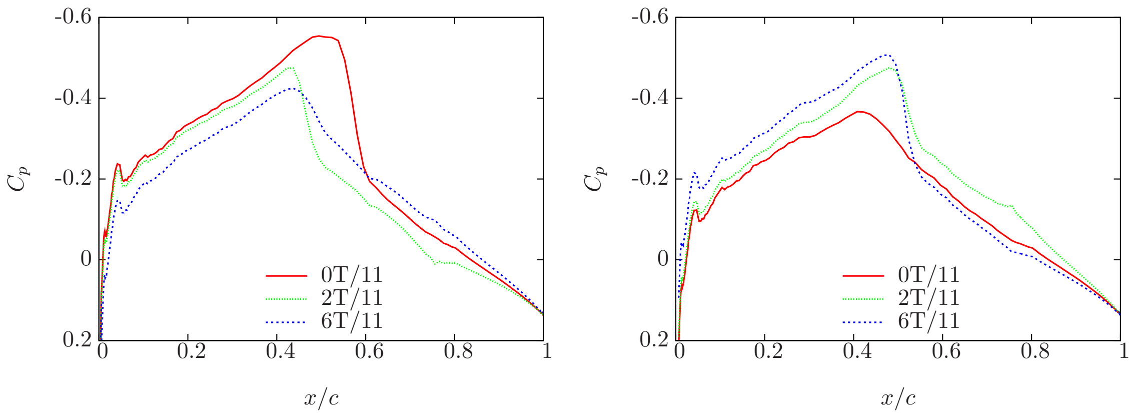


Figure 6.17 – Instantanés du nombre de Mach autour du profil NACA. Calcul TSM à 11 instants.

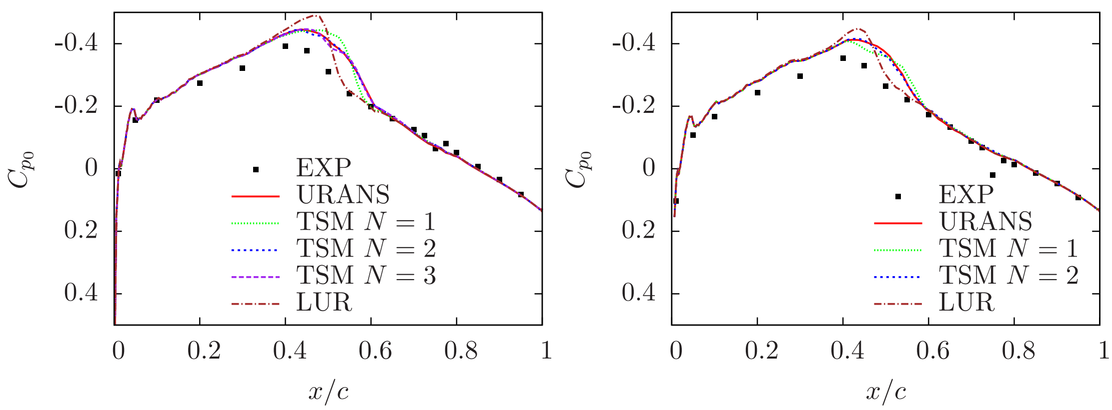
Les courbes de C_p des calculs U-RANS et TSM sont présentées aux figures 6.19 et 6.20 et comparées aux résultats expérimentaux de Zwaan [110]. Concernant la moyenne, la TSM à trois



(a) Extrados (b) Intrados

Figure 6.18 – Instantanés du C_p sur la peau du profil NACA. Calcul TSM à 11 instants.

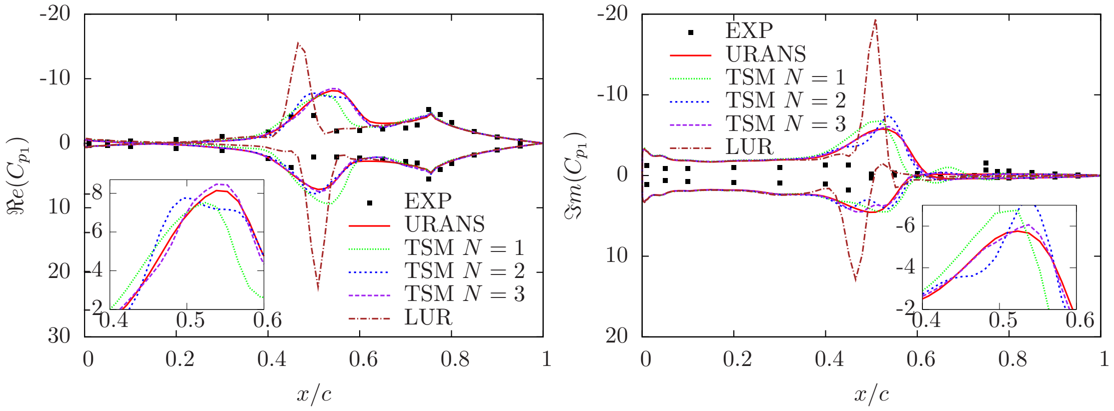
instants présente quelques variations autour du choc. Elles disparaissent presque totalement avec $N = 2$ et le calcul à sept instants est parfaitement superposé au calcul U-RANS. La partie stationnaire d'une simulation LUR linéarisé à la position moyenne (incidence nulle) est également présentée. Il s'agit simplement d'un calcul RANS : la différence entre un écoulement stationnaire à une position fixe et la moyenne temporelle d'un écoulement est clairement visible au niveau du choc où le LUR/RANS retourne un résultat plus éloigné du calcul de référence U-RANS que ne l'est le calcul TSM à trois instants (cf. § 4.5.1).



(a) Extrados (b) Intrados

Figure 6.19 – Moyenne temporelle du C_p autour du profil NACA.

Comme pour l'aile LANN, l'analyse du premier harmonique du C_p montre de plus grandes variations entre les calculs au niveau du choc. Les calculs TSM en présentent jusqu'à quatre harmoniques même si l'amplitude du choc est assez bien prédite. Pour $N = 5$, la TSM correspond parfaitement au U-RANS. Néanmoins, sept instants ($N = 3$) sont jugées suffisants pour obtenir une précision requise dans l'industrie. Dans ce cas, le gain de temps de calcul est proche de trois, comme l'indique la figure 6.21. Les parties réelles et imaginaire de l'équation des perturbations complexes du LUR révèlent des pics trop prononcés et en léger déphasage avec le calcul U-RANS. Une fois encore, le calcul TSM à trois instants donne de meilleurs résultats.



(a) Partie réelle

(b) Partie imaginaire

Figure 6.20 – Premier harmonique du C_p autour du profil NACA.

Le gain des méthodes TSM et LUR par rapport au calcul U-RANS de référence est présenté Fig. 6.21. Le gain de la TSM dépend du nombre d'instants considérés et tend vers zéro quand N augmente. Ainsi le calcul à cinq instants, donnant une physique d'écoulement relativement correcte, est quatre fois plus rapide que le calcul U-RANS. Le calcul TSM à sept instants est environ trois fois plus rapide. La gain de temps est donc relativement important.

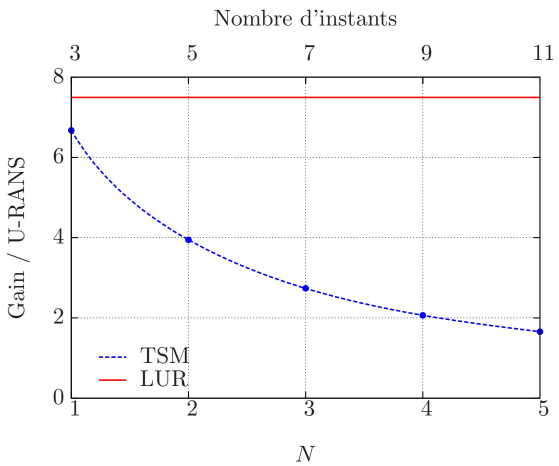


Figure 6.21 – Gain de temps de calcul par rapport au U-RANS sur le cas NACA.

Le temps de restitution du modèle LUR ne dépend pas de N et reste constant. Ce modèle est à peine plus rapide qu'un calcul TSM à trois instants alors que ce dernier restitue une meilleure physique de l'écoulement. L'intérêt de la TSM est donc réel puisqu'à un coût proche, l'utilisateur obtient un résultat plus physique.

La formulation ALE de la TSM a été testée sur des cas industriels réels à savoir un Airbus A380 complet avec mouvement de flexion des ailes et une configuration fuselage et ailes d'un Airbus A350 en mouvement forcé d'oscillations en tangage. Les résultats ne peuvent pas être présentés ici pour des raisons de confidentialité mais deux enseignements ont pu en être tiré :

1. la méthode TSM s'est bien comportée. La robustesse numérique du calcul et les résultats ont été satisfaisants.
2. En revanche le temps de restitution de la TSM était comparable à celui du U-RANS dès $N = 2$. En effet, les calculs U-RANS effectués par Airbus utilise la méthode DTS et le nombre de cycles multi-grilles utilisés dans les sous-itérations est cinq fois plus grand que celui utilisé pour le calcul stationnaire servant de condition initiale au calcul U-RANS. Avec $N = 2$, le calcul TSM réalise le couplage de cinq calculs stationnaires et comme le nombre d'itérations est à peu près identique, le temps de restitution est proche. Ce type de résultats se trouve rarement dans la littérature. Néanmoins, Custer *et al.* [19] obtiennent également des temps de restitution similaires du U-RANS et de la TSM sur une application de profil en mouvement forcé d'oscillations en tangage. La TSM ne donne des gains significatifs que quand le transitoire traversé par le calcul U-RANS est long.

La méthode est maintenant appliquée à des applications en turbomachines.

Troisième partie

Applications en turbomachines

Introduction aux applications en turbomachines

Proche du point de fonctionnement nominal, l'écoulement en turbomachine présente une double périodicité, à la fois temporelle et spatiale. La TSM profite de la périodicité temporelle et peut ainsi être directement appliquée à la simulation d'écoulements en turbomachines en considérant la période de révolution ce qui impose de simuler toute la roue. Néanmoins, il convient d'exploiter la périodicité spatiale afin de réduire la taille du domaine de calcul tel que décrit au chapitre 1. Il est donc d'usage de ne simuler qu'une section angulaire en appliquant des conditions aux limites adéquates en azimut.

La périodicité spatiale simple est étudiée au chapitre 7 par l'intermédiaire de deux configurations. La première consiste en l'interaction rotor/stator du CME2 à la géométrie modifiée pour obtenir le même nombre d'aubes à chaque roue. La deuxième configuration est un traitement de carter axial autour d'un rotor isolé. Le nombre de fentes étant un multiple du nombre d'aubes, la périodicité spatiale est réduite à un canal du rotor.

Lors de la simulation d'aubes en vibration, celles-ci peuvent être déphasées et l'hypothèse de périodicité spatiale simple n'est alors plus vraie, puisque l'écoulement est également déphasé d'un canal à l'autre. Il s'agit d'une périodicité plus complexe, dite spatio-temporelle. Le chapitre 8 développe les conditions limites à appliquer aux frontières haute et basse d'un canal. Dans le cas d'aubes en vibration, un angle de déphasage inter-aube est prescrit. Le cas test de ce chapitre est un rotor axial dessiné par Turboméca.

Ces conditions limites sont réutilisables pour la simulation d'un seul canal d'une configuration rotor/stator dès lors que les nombres d'aubes diffèrent dans chaque roue. Dans ce cas, l'angle de déphasage inter-aube dépend des vitesses de rotation relatives des deux roues et de leur nombre d'aubes respectifs. Chaque roue résout la fréquence de passage des aubes de la roue opposée. La condition d'interface, développée au chapitre 9, est donc relativement complexe puisqu'elle doit accommoder des pas de rangée d'aubes différents et des fréquences différentes. La vraie géométrie du CME2 peut alors être considérée.

Dans cette étude, nous nous limiterons aux cas à deux éléments en mouvement l'un par rapport à l'autre (interaction rotor/stator ou rotor/traitement de carter). Afin de simplifier la notation, les variables chapeautées par une barre $\overline{x}$ se réfèrent à une propriété de la roue opposée (les variables sans barre se référant à la roue courante). Pour faciliter la dérivation des équations dans le cas particulier des turbomachines, les variables de l'écoulement sont considérées dans le repère cylindrique (x, r, θ) où x désigne la distance axiale, r le rayon et θ l'azimut. Le solveur *elsA* considérant uniquement le repère cartésien, il sera nécessaire de réaliser des changements de repère lors de la mise en œuvre. Enfin, l'algorithme implicite BJ-SOR sera toujours utilisé dans la suite afin d'offrir le meilleur couplage implicite.

Chapitre 7

Périodicité spatiale

La géométrie de certaines turbomachines génère un écoulement dont la périodicité spatiale en azimut est plus petite que la circonférence complète. Le domaine de calcul peut alors être significativement réduit. La périodicité spatiale en azimut de l'écoulement est la première abordée car elle est intuitive et simple à mettre en place. De nouvelles conditions limites, autres que celles utilisées en aérodynamique externe, sont nécessaires mais déjà présentes dans le solveur *elsA*. Cette périodicité permet donc de réaliser les premières simulations TSM sur des applications en turbomachines sans avoir à y apporter de modifications significatives.

7.1 Périodicité de l'écoulement en azimut

Lors du fonctionnement d'une turbomachine en régime stable, l'écoulement présente une périodicité spatiale en azimut de pas angulaire θ_s. La relation suivante est alors vérifiée :

$$W(x, r, \theta \pm \theta_s, t) = W(x, r, \theta, t), \quad \theta_s \in]0; 2\pi]. \tag{7.1}$$

Elle indique que les variables de l'écoulement éloignées d'un angle θ_s sont égales comme montré Fig. 7.1 dans le cas particulier d'un rotor et d'un stator.

Cette périodicité peut être mise à profit pour ne simuler qu'un secteur angulaire de la machine plutôt que la circonférence complète. Le domaine de calcul, et donc le temps de restitution, se trouvent ainsi réduits d'un facteur $\Gamma = 2\pi/\theta_s$. Le découpage de la roue en secteurs entraîne la création de frontières haute et basse d'un secteur. L'écoulement à ces frontières vérifie la relation Eq. (7.1).

Cette périodicité se retrouve dans plusieurs cas de figure :

1. en aéroélasticité, il est courant de simuler la vibration forcée d'aubes d'une roue isolée. Si les aubes vibrent en phase, il est alors possible de ne simuler qu'un seul canal de la roue.
2. certaines turbomachines présentent une périodicité géométrique en azimut égale au plus grand commun diviseur du nombre d'aubes dans chacune des roues. Ainsi, la périodicité géométrique Γ d'un étage de turbomachine est donnée par

$$\Gamma = \mathrm{PGCD}(B_r, B_s). \tag{7.2}$$

Le Compresseur Mono-Étage 2 (CME2, Michon *et al.* [68]), par exemple, dispose de 30 aubes au rotor et de 40 aubes au stator (cf. Tab. 7.1), ce qui entraîne $\Gamma = 10$. Il est

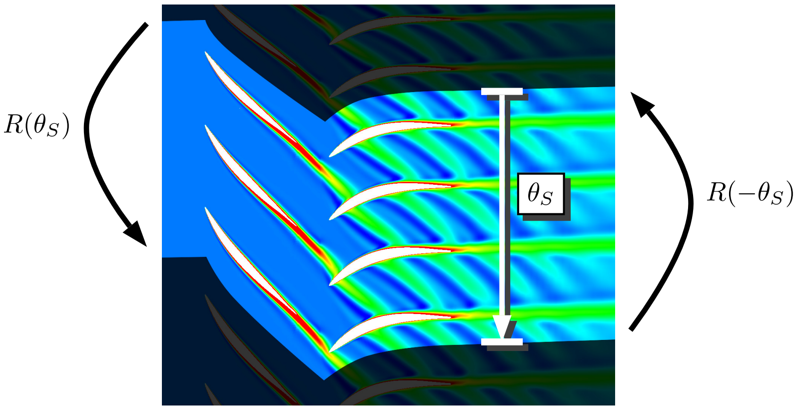


Figure 7.1 – Égalité du champ aux frontières haute et basse d'un secteur de turbomachine. Calcul U-RANS de la configuration rotor/stator 3-4 du CME2 (entropie).

possible de ne simuler qu'un dixième de la circonférence de la machine. Ainsi seules trois aubes du rotor font face à quatre aubes du stator comme indiqué Fig. 7.1.

3. des applications de traitement de carter peuvent également présenter une périodicité géométrique. Dans le cas de fentes non-axisymmétriques, le nombre de fentes est généralement un multiple du nombre d'aubes et le calcul peut alors être ramené à un seul canal.

nombre d'aubes du rotor	30
nombre d'aubes du stator	40
rayon du carter	0,275 m
longueur de l'étage	0,180 m
distance axiale rotor/stator	13 mm (moyeu) – 22 mm (carter)
rapport moyeu/carter	0,78
épaisseur de jeu	0,8 % de la hauteur d'aube
vitesse de rotation (point nominal)	6 300 tours/min (105 Hz)
vitesse périphérique (point nominal)	182 $m.s^{-1}$
débit (point nominal)	11 $kg.s^{-1}$
Taux de pression (point nominal)	1,14

Table 7.1 – Caractéristiques du compresseur CME2.

7.2 Conditions aux frontières

De nouvelles conditions limites apparaissent : le découpage de la roue en secteurs entraîne la création de frontières azimutales haute et basse d'un secteur et la condition d'interface entre une roue mobile et une structure fixe (stator ou traitement de carter) doit aussi être adaptée du fait de ce découpage.

7.2.1 Frontières haute et basse d'un secteur

L'écoulement aux frontières haute et basse d'un secteur de roue est identique en coordonnées cylindriques (Eq. (7.1)). Comme *elsA* est un code en coordonnées cartésiennes, les grandeurs vectorielles de l'écoulement doivent être recopiées en prenant en compte une rotation R égale à l'angle θ_s du secteur considéré

$$W_{\theta+\theta_S}(x,y,z,t) = R(\pm\theta_s)W_\theta(x,y,z,t). \tag{7.3}$$

Ce processus s'effectue dans les deux sens de communication (sens de rotation et sens inverse). Il est illustré Fig. 7.1 pour la configuration rotor/stator 3-4 du CME2.

7.2.2 Interface entre roues mobiles

L'étendue angulaire des secteurs de roues étant identique, chacun peut transmettre le champ au secteur de la roue opposée tant que ceux-ci se font face. C'est le cas illustré au premier instant de la figure 7.2 pour un cas rotor/stator. Mais comme le rotor est mobile, certaines zones se dévoilent au cours du temps et ne trouvent plus de cellules de maillage opposées. Il faut alors dupliquer l'information le long de l'interface en prenant en compte la rotation comme décrit précédemment Eq. (7.3). Sur la figure 7.2, cela est représenté par la duplication du domaine de calcul entier (en gris) mais en pratique, seules les cellules situées à l'interface sont dupliquées.

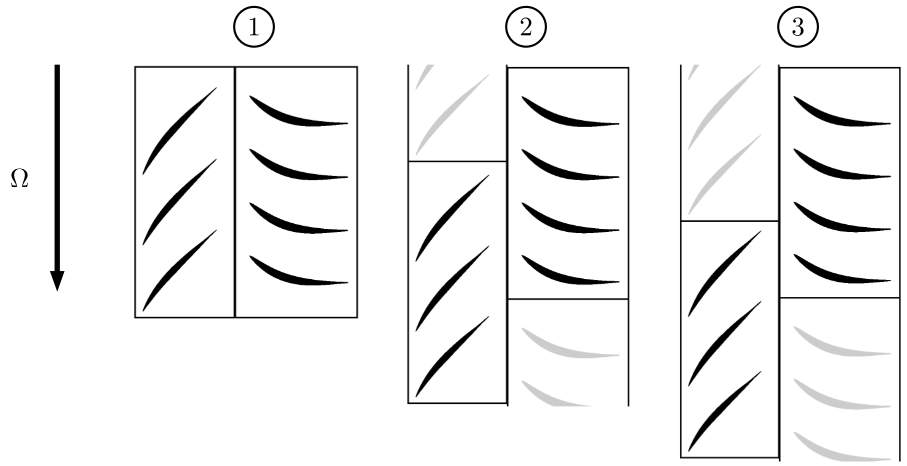


Figure 7.2 – Raccords non-coïncidents glissants entre un rotor et un stator à trois instants différents : illustration de la duplication (noir : domaine de calcul, gris : domaine dupliqué).

Il est à noter que le mouvement du rotor rend impossible la création de maillages coïncidents de part et d'autre de l'interface à tout instant. Le raccord utilisé fait appel à des projections et des algorithmes complexes de fenêtrage de polygones pour garantir la conservativité de l'écoulement pour des grilles non-coïncidentes totales. On parle alors de raccords non-coïncidents glissants (cf. Refs. Lerat et Wu [62], Rai [76]).

7.3 Adaptation de la TSM à la périodicité spatiale

Un calcul TSM aura comme fréquence fondamentale la fréquence de passage d'un secteur, soit Γ fois la fréquence de rotation de la machine $\Gamma\Omega/2\pi$. Cette fréquence peut être insuffisante pour capturer les instationnarités de l'écoulement. Typiquement, pour simuler les interactions rotor/stator, la fréquence de passage des aubes de la roue opposée doit être capturée. Dans l'exemple du CME2, la fréquence fondamentale sera égale à 10 fois la fréquence de rotation de la machine alors que, dans le repère realtif à chaque roue, les fréquences de passage des aubes (Blade Passing Frequency, BPF) sont égales à 30 et 40 fois la vitesse de rotation. Il faudra donc faire un calcul à au moins quatre harmoniques pour espérer capturer la BPF du stator dans le repère du rotor.

Le solveur *elsA* gère les changements de référentiel et permet de réaliser des calculs dans le référentiel relatif à chaque roue. Les maillages associés à un rotor ne subissent pas de rotation car la condition de raccord entre une roue mobile et une structure fixe permet toutes les positions relatives. La TSM déjà implémentée peut donc être utilisée directement. Si le solveur utilisé ne gérait qu'un seul repère, absolu par définition, alors il faudrait utiliser les développements décrits par van der Weide *et al.* [97].

Il est également intéressant de noter qu'à l'interface, le raccord coïncident n'est plus « glissant » mais reste à une position relative fixe des aubages, différente pour chaque instant de la période. Dans le cas d'une interaction rotor/stator, tous les instants sont initialisé par un même calcul réalisé avec la technique de plan de mélange. À chaque instant de la TSM, les sillages de la roue amont se propagent dans la roue aval à leur position relative respective. La TSM ne fait rien d'autre qu'un couplage (*i.e.* une combinaison linéaire) de plusieurs calculs « frozen rotor » à différentes positions relatives des deux roues.

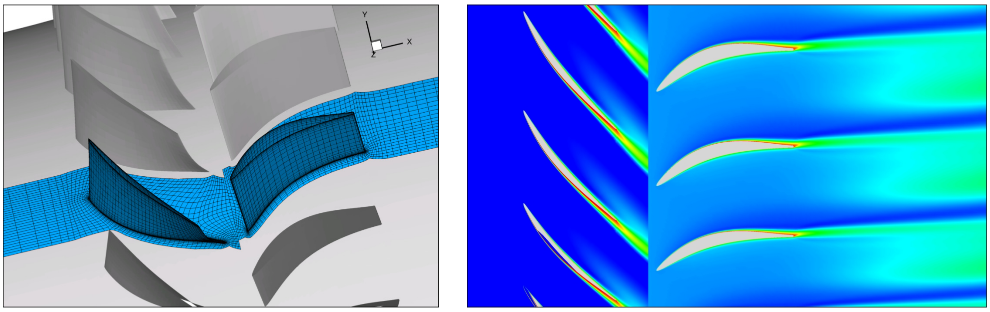
Cette technique est maintenant testée sur un cas d'interaction rotor/stator et de traitement de carter autour d'un rotor isolé.

7.4 Application à l'interaction rotor/stator

La périodicité spatiale pourrait être appliquée sur un secteur du CME2 représentant $1/10^{\text{ème}}$ de la circonférence, soit trois aubes rotor face à quatre aubes du stator. Le domaine de calcul est relativement conséquent (environs 3,5 millions de cellules), ce qui peut vite poser des problèmes de mémoire pour la montée en ordre de la TSM. De plus, comme indiqué précédemment, au moins quatre harmoniques sont nécessaires pour capturer la BPF du stator. L'objectif de ce chapitre étant de valider la TSM sur des applications turbomachines élémentaires, les calculs ont été allégés en réduisant le domaine de calcul : le stator du compresseur CME2 subit une mise à l'échelle de façon à ne plus comporter que 30 aubes. Une périodicité spatiale de $1/30^{\text{ème}}$ en azimut est ainsi obtenue comportant un canal de chaque roue. Le maillage, présenté Fig. 7.3, ne contient plus qu'un million de cellules et la BPF de chaque roue est capturée dès $N = 1$.

7.4.1 Paramètres numériques

Le schéma centré du second ordre de Jameson-Schmidt-Turkel (JST) [55] est utilisé pour les termes convectifs et un schéma centré du second ordre est utilisé pour les termes diffusifs. Le calcul U-RANS de référence est réalisé à l'aide du schéma DTS avec 40 instants par période et 20 sous-itérations. Tous les problèmes stationnaires (TSM et sous-itérations DTS) bénéficient d'une accélération de convergence par un cycle multi-grille en V avec un niveau de grille



(a) Maillage (un point sur deux) (b) Condition initiale (plan de mélange)

Figure 7.3 – Géométrie modifiée du CME2.

grossière. Ils sont intégrés en pseudo-temps par une méthode d'Euler rétrograde résolue par l'algorithme LU-SSOR pour le DTS et par l'algorithme BJ-SOR décrit § 5.4 pour la TSM. La turbulence est modélisée par le modèle à une équation de transport de Spalart et Allmaras [88].

En plus de la condition de périodicité spatiale appliquée aux frontières haute et basse du canal, une condition d'injection uniforme est appliquée en entrée et, en sortie une condition de vanne satisfaisant

$$P_S = P_0 + \eta Q^2, \tag{7.4}$$

avec équilibre radial :

$$\frac{\partial P_S}{\partial r} = \rho \frac{V_\theta^2}{r}. \tag{7.5}$$

La première relation impose la pression en un point pivot en fonction du débit local Q et de la pression extérieure P_0. La deuxième relation équilibre les forces centrifuge et de pression et permet de calculer la pression de part et d'autre du point pivot imposé par Eq. (7.4). La variation du paramètre de vanne η permet de parcourir la caractéristique d'un compresseur du point de blocage au proche pompage. Comme l'illustre la figure 7.4, les paraboles de la relation de vanne coupent la courbe caractéristique débit/pression du compresseur et définissent ainsi le point de calcul. Pour éviter tout phénomène de réflexion numérique aux frontières du maillage, les conditions limites amont et aval sont imposées au travers des relations caractéristiques définies par Couaillier [18]

– en entrée (subsonique) :

$$p + \rho c_0 V_n = cst, \tag{7.6}$$

– en sortie (subsonique) :

$$\begin{cases} V_t = 0, \\ p - \rho c_0^2 = cst, \\ p \pm \rho c_0 V_n = cst, \end{cases} \tag{7.7}$$

où V_n et V_t désignent la vitesse normale et tangentielle à la section d'entrée ou de sortie. Enfin, une condition de paroi adiabatique non-glissante avec loi de paroi est imposée sur les aubes.

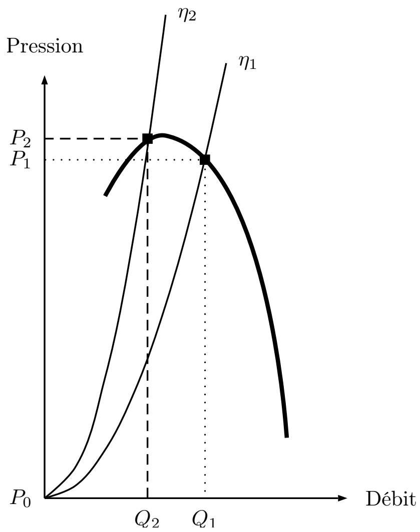
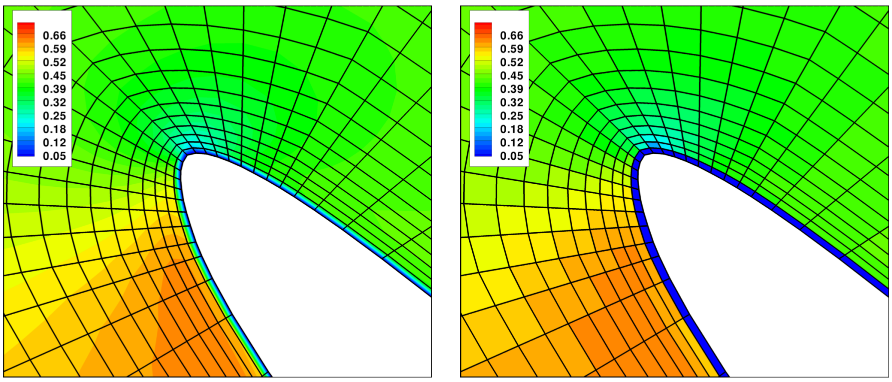


Figure 7.4 – Illustration de la condition de vanne.

Une loi de paroi permet d'avoir le premier noeud de maillage dans la région logarithmique de la couche limite ($y^+ > 20$). Ceci permet d'utiliser un pas de temps Δt plus grand et d'économiser des mailles en proche paroi comme indiqué sur la maillage Fig. 7.5(a) avec le champ de Mach interpolé. En (b) se trouve la valeur moyenne au centre des cellules. On constate sur cette dernière que toute la première rangée de cellules autour du profil est à une vitesse bien plus faible que la rangée suivant immédiatement.



(a) Contour de Mach relatif

(b) Valeur de Mach relatif au centre des cellules

Figure 7.5 – Illustration de la loi de paroi au bord d'attaque du rotor.

7.4.2 Résultats

Le calcul U-RANS a été mené sur 120 passages d'aubes. Les débits amont et aval sont présentés Fig. 7.6. Le débit aval présente une plus grande amplitude que le débit amont. Cela est dû à l'interaction de sillage qui ne se développe que dans le sens de l'écoulement. Seuls les effets potentiels peuvent le remonter et générer une instationnarité à l'amont. Le débit amont révèle cependant une période plus grande que le débit aval, ce dernier affichant une période conforme à celle attendue. Il est habituel que le débit amont converge plus lentement que le débit aval. Ce résultat indique sans doute que le calcul n'est pas totalement convergé mais 120 passages d'aubes représentent déjà un temps de calcul conséquent. Aussi les résultats présentés dans la suite se basent sur ce calcul.

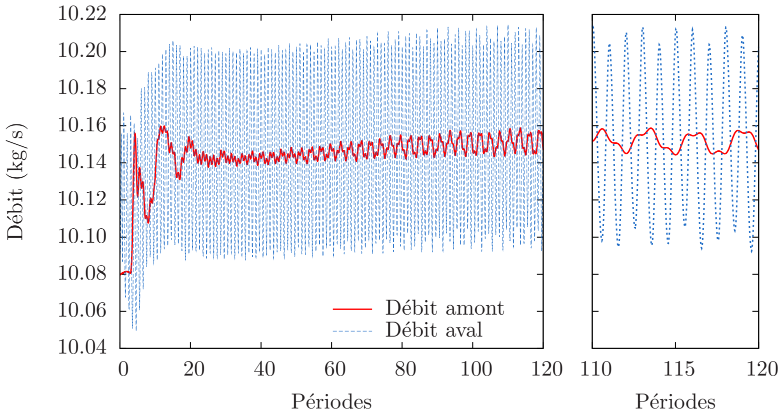
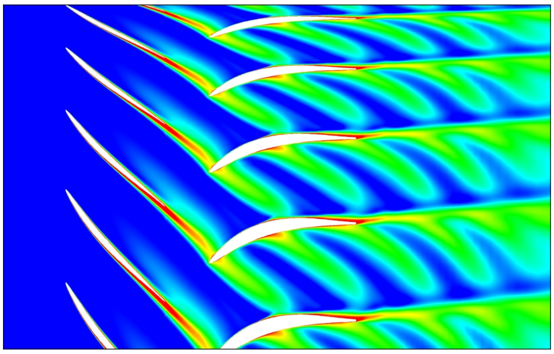


Figure 7.6 – CME2 modifié : convergence en débit du calcul U-RANS.

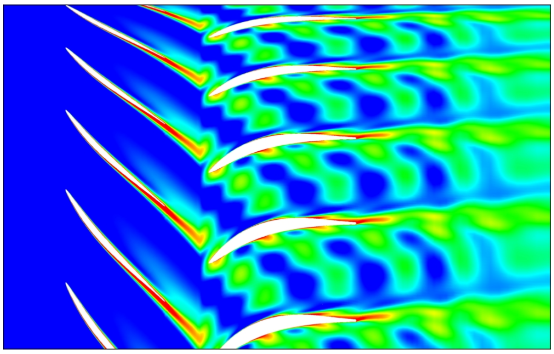
Les calculs TSM ont été menés avec un nombre d'instants variant de 3 à 11. La figure 7.7 présente l'entropie à 90 % de la hauteur de veine. Pour $N = 1$, le calcul TSM présente des bulles d'entropie grossières qui s'agglomèrent pour former des sillages hachés typiques des interactions entre roues mobiles. Les bulles sont très marquées proche du bord d'attaque des aubes du stator et se lissent vers l'aval, probablement grâce aux effets visqueux. Bien que l'écoulement ne soit pas très « propre », il est remarquable que la combinaison linéaire de trois calculs « frozen rotor » soit capable de recréer le découpage des sillages du rotor par le stator. Avec deux instants de plus, le résultat s'améliore nettement mais il reste de petites oscillations d'entropie juste en aval de l'interface entre les deux roues. Le raccord non-coïncident rajoute certainement du bruit numérique auquel la TSM est sensible. Ces oscillations tendent à disparaître quand le nombre d'harmoniques considérés croît et l'écoulement est bien capturé à partir de sept instants. Cette sensibilité de la qualité du sillage transmis est aussi observé par Vilmin *et al.* [102].

Les cartographies de vitesse axiale (Fig. 7.8) et de pression (Fig. 7.9) viennent confirmer les conclusions précédentes. Un calcul TSM à trois instants affiche une vitesse axiale très différente du calcul U-RANS, notamment dans les canaux du stator aval. Les sur-vitesses à l'extrados sont très chahutées alors qu'avec cinq instants, elles sont mieux groupées et juste affectées par le déficit de vitesse des sillages du rotor hachés par le stator. Il faut au moins cinq ou sept instants pour bien capturer la BPF de la roue opposée. Au delà, il reste quelques différences perceptibles entres le calcul U-RANS et les calculs TSM convergés.

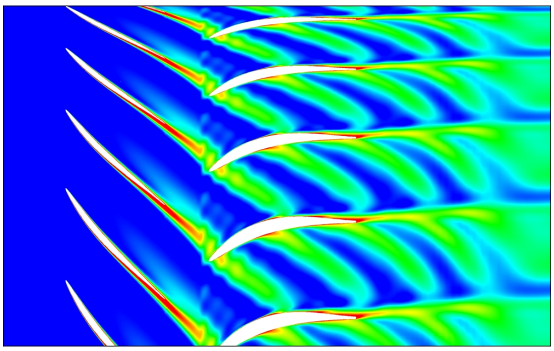
Une analyse spectrale du champ de pression est menée Fig. 7.10 sur un plan de coupe situé 0,4 corde en amont du rotor. Chaque colonne montre une cartographie de la norme des harmoniques de la pression. Ce type de post-traitement, associé à une analogie acoustique comme Ffowcs Williams et Hawkings [32], est utile pour déterminer le bruit de raies émis



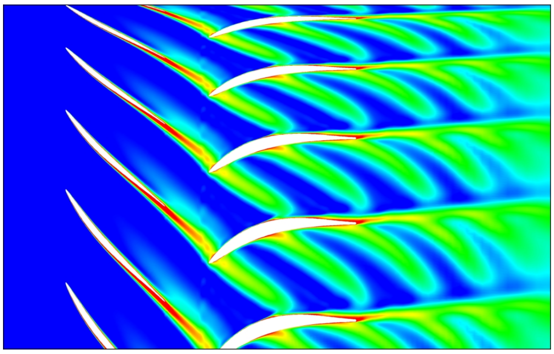
(a) U-RANS



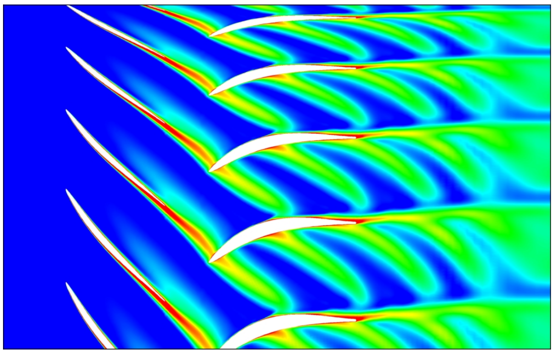
(b) TSM 3 instants ($N = 1$)



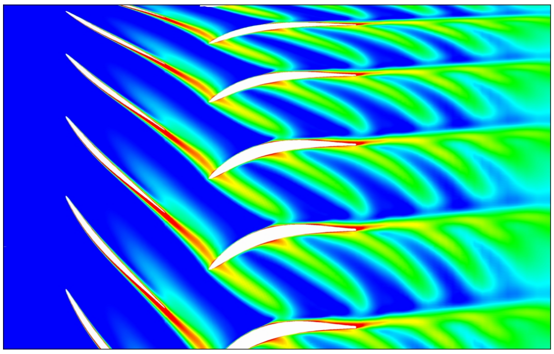
(c) TSM 5 instants ($N = 2$)



(d) TSM 7 instants ($N = 3$)

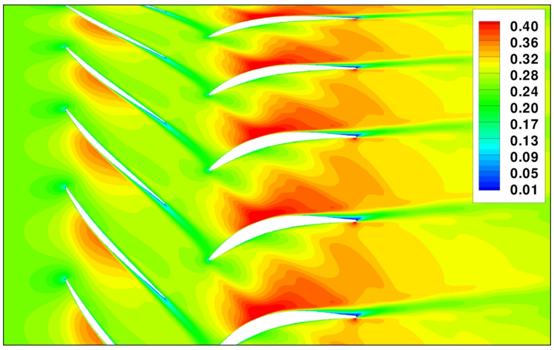


(e) TSM 9 instants ($N = 4$)

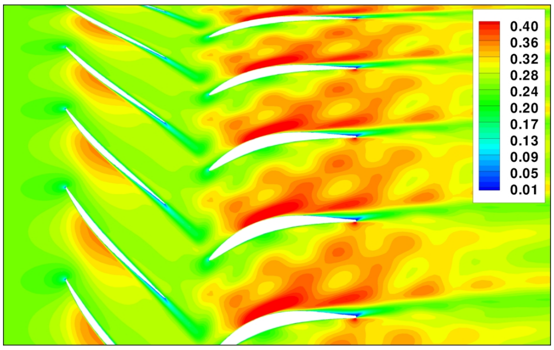


(f) TSM 11 instants ($N = 5$)

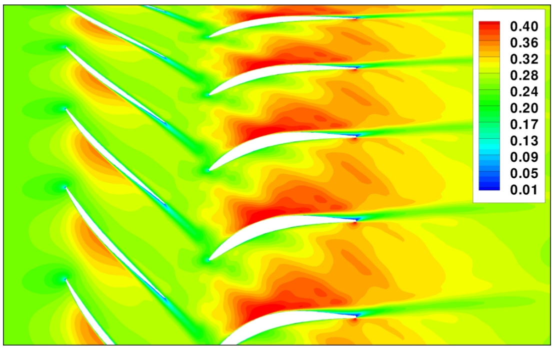
Figure 7.7 – Calculs CME2 à géométrie modifiée. Instantanés d'entropie à 90 % de la hauteur de veine.



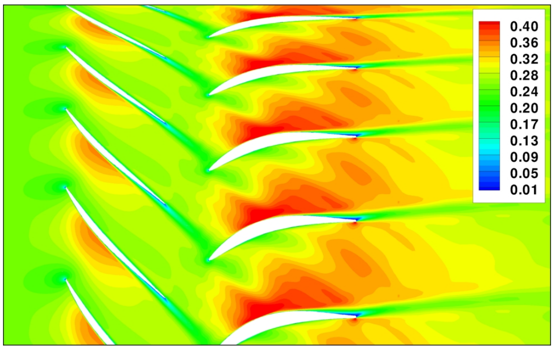
(a) U-RANS



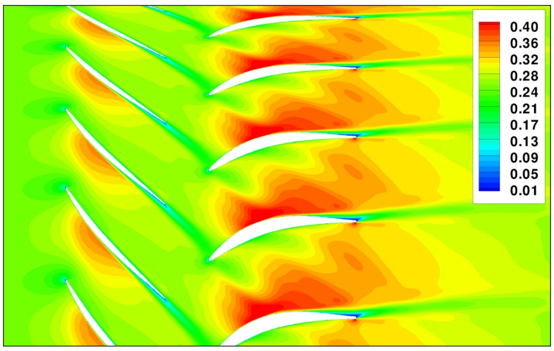
(b) TSM 3 instants ($N = 1$)



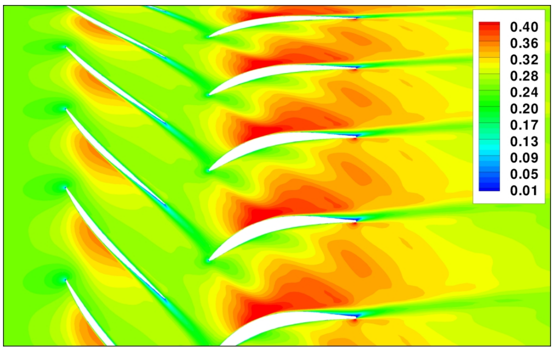
(c) TSM 5 instants ($N = 2$)



(d) TSM 7 instants ($N = 3$)

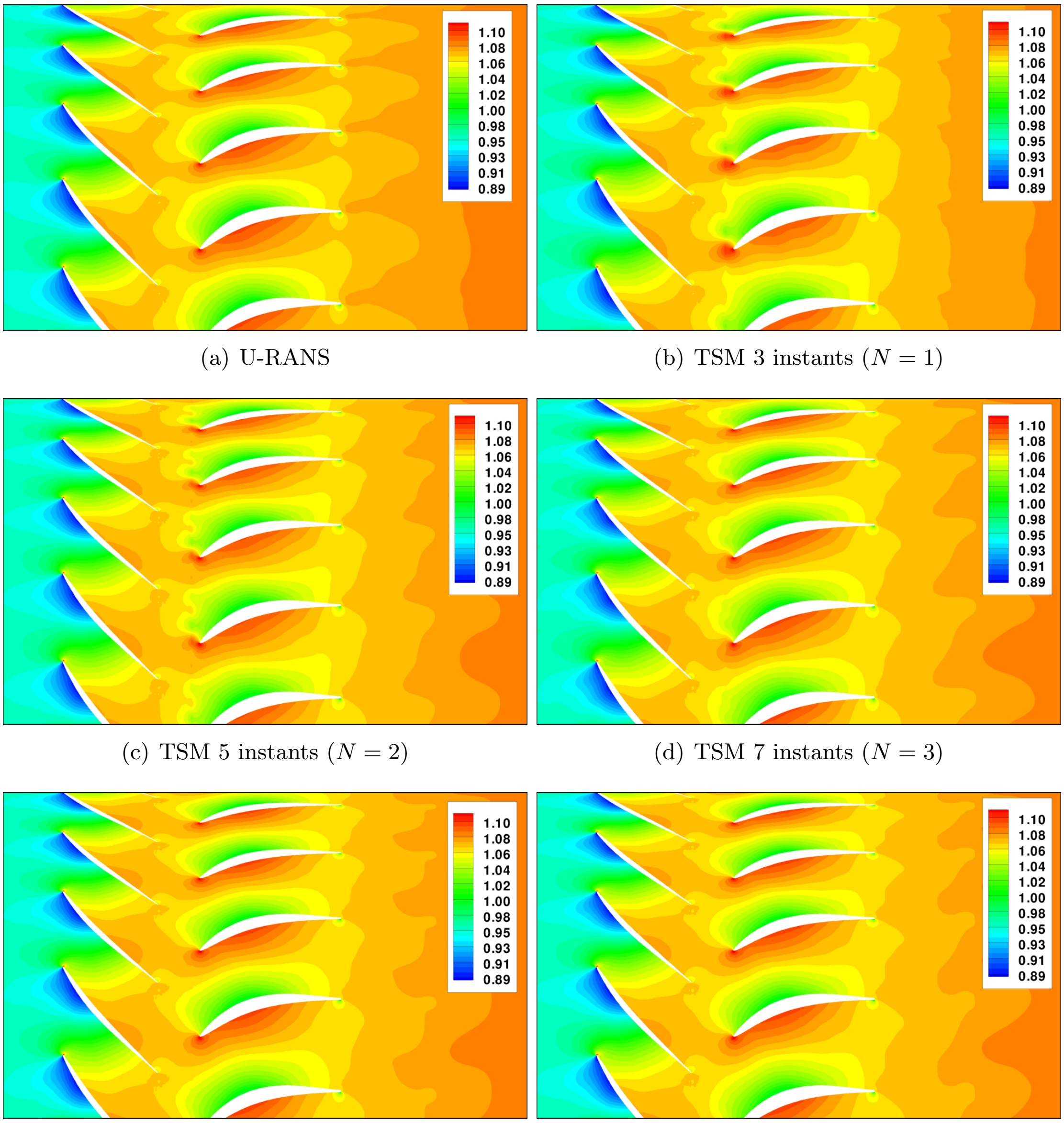


(e) TSM 9 instants ($N = 4$)



(f) TSM 11 instants ($N = 5$)

Figure 7.8 – Calculs CME2 à géométrie modifiée. Instantanés de vitesse axiale à 90 % de la hauteur de veine.



(a) U-RANS

(b) TSM 3 instants ($N = 1$)

(c) TSM 5 instants ($N = 2$)

(d) TSM 7 instants ($N = 3$)

(e) TSM 9 instants ($N = 4$)

(f) TSM 11 instants ($N = 5$)

Figure 7.9 – Calculs CME2 à géométrie modifiée. Instantanés de pression à 90 % de la hauteur de veine.

par la machine et fait l'objet d'un papier de conférence par Sicot *et al.* [82]. Dans ce cadre, il n'est pas nécessaire de considérer beaucoup d'harmoniques puisque les limites supérieures de sensibilité de l'oreille humaine sont vite atteintes. Les cartographies montrent que le $n^{\text{ème}}$ harmonique est convergé avec un calcul TSM $N = n+2$. Les résultats sont cependant différents de ceux obtenus avec le calcul U-RANS pour les harmoniques d'ordre supérieur.

La figure 7.11 donne le gain en temps de restitution des calculs TSM par rapport aux simulations U-RANS. Un calcul TSM à trois instants est ainsi plus de dix fois plus rapide que le calcul U-RANS. Pour obtenir un écoulement comparable, il faut sept instants, soit un gain notable supérieur à quatre.

7.5 Application au traitement de carter

Le rotor du CME2, composé de 30 aubes, est entouré de 120 fentes semi-circulaires uniformément réparties dans le carter. La position axiale des fentes commence légèrement en amont du bord d'attaque des aubes et se prolonge jusqu'à mi-corde environ ce qui optimise l'efficacité du traitement de carter selon Wilke et Kau [105]. Cette configuration permet de ne simuler qu'un trentième de la roue soit une aube face à quatre fentes (cf. Fig. 7.12). La fréquence de passage de l'aube devant les fentes sera ainsi quatre fois plus grande que la fréquence de passage des aubes (BPF) du rotor, qui est la fréquence fondamentale résolue par le calcul TSM. Il faut donc au moins quatre harmoniques de la BPF du rotor pour capturer les effets des fentes.

La figure 7.13 montre des instantanés d'entropie à 98 % de la hauteur d'aube. Un calcul TSM à cinq instants présente une entropie peu représentative de ce type d'écoulement. À partir de $N = 4$, des bulles d'entropie sont présentes sous les fentes et sont convectées en aval après le passage de l'aube. L'écoulement semble convergé a $N = 5$.

Une deuxième étude plus aboutie de traitement de carter d'un compresseur transsonique utilisant la méthode TSM a été menée au CERFACS par Legras *et al.* [61] et reproduit annexe B.

7.6 Avantages et limites

La TSM a été appliquée avec succès sur deux configurations de turbomachines présentant une périodicité spatiale en azimut. Le principal avantage de la périodicité spatiale est sa facilité de mise en œuvre, la TSM ne nécessitant pas d'adaptation particulière. Ses limites sont cependant vite atteintes. Trois reproches peuvent lui être faits :

1. le premier concerne la montée nécessaire en nombre d'harmoniques. En effet, la fréquence fondamentale du calcul TSM est égale à la fréquence de passage d'un secteur choisi pour sa périodicité géométrique. Il est ensuite nécessaire de considérer autant d'harmoniques que d'aubes ou de fentes dans ce secteur pour capturer leur fréquence de passage. Ceci n'est pas négligeable d'autant qu'il ne s'agit que d'un minimum.
2. la périodicité spatiale n'est pas applicable à des cas industriels réalistes. En effet, la périodicité géométrique d'un étage de turbomachine peut-être très élevée en pratique, voire ne pas exister pour éviter les phénomènes de résonance. Au final, cette technique s'applique à peu de cas réels. La modification de la géométrie, décrite § 2.2.2.2 et appliquée ici, permet de ramener une géométrie complexe à une périodicité géométrique acceptable mais les niveaux d'instationnarité prédits sont forcément biaisés.

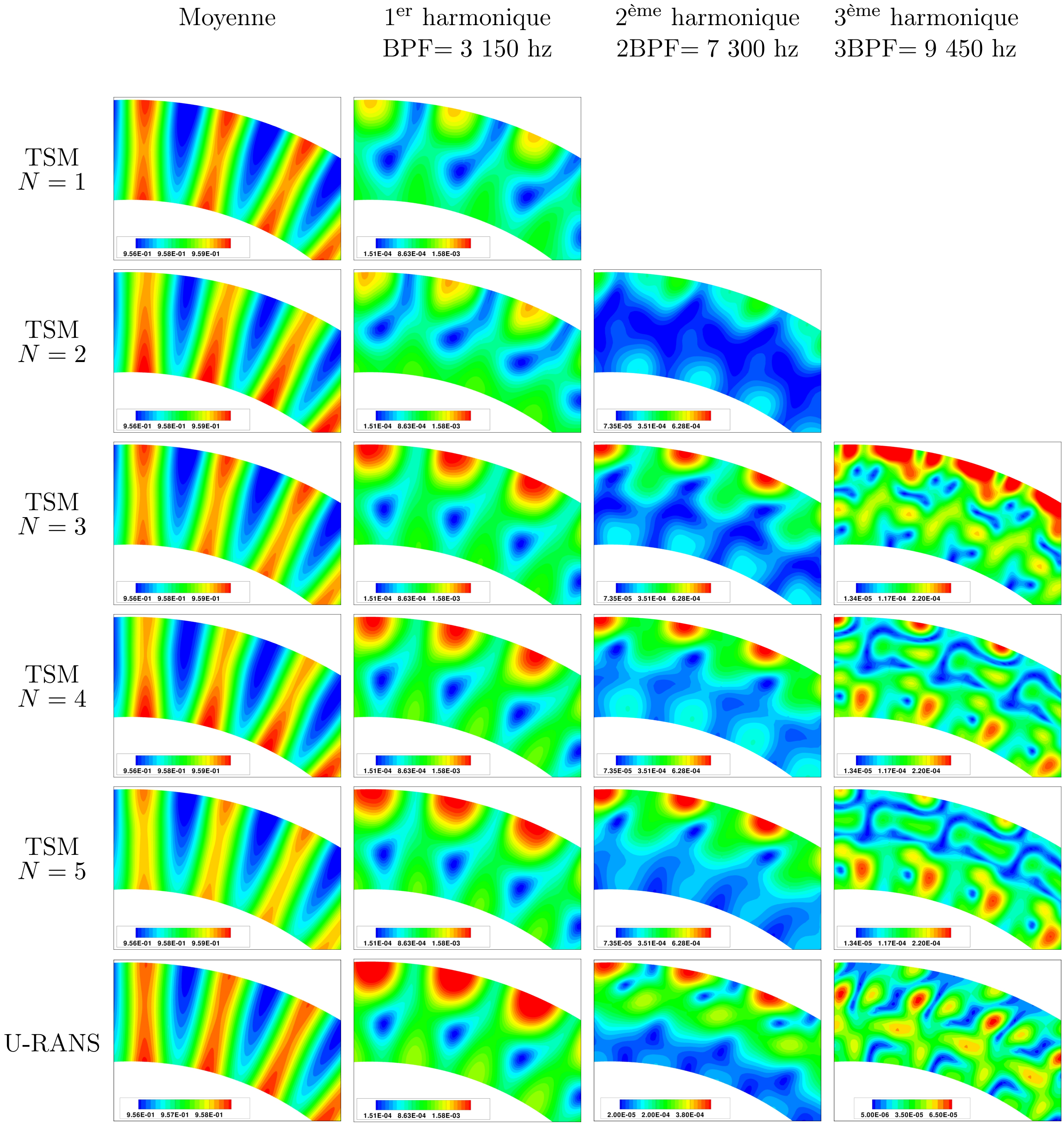


Figure 7.10 – Analyse spectrale de la pression, coupe axiale à 0,4c en amont du rotor.

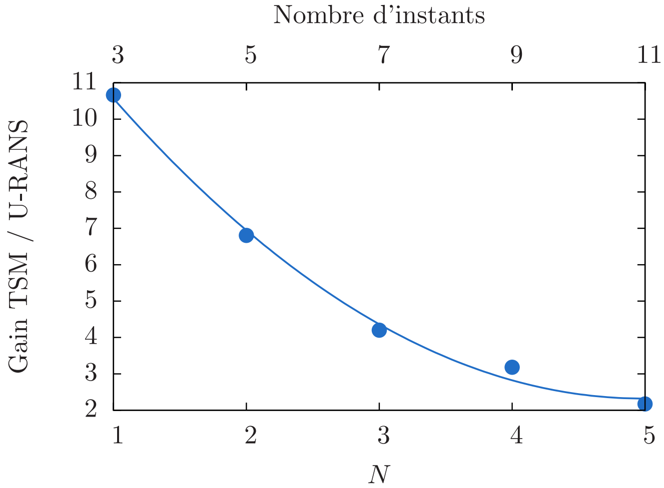
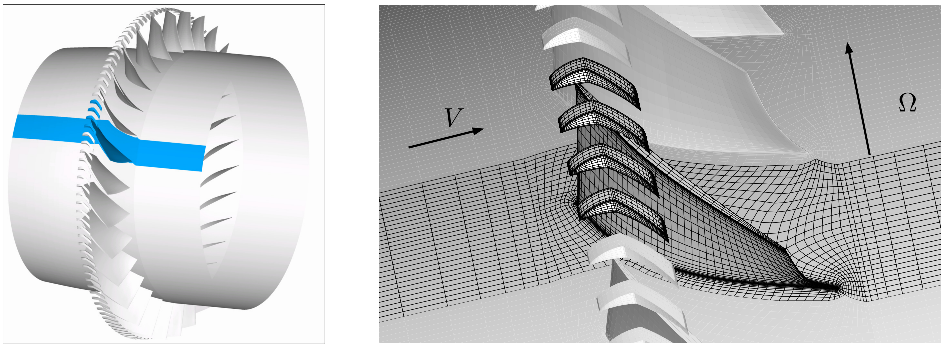


Figure 7.11 – Gain de la TSM par rapport au U-RANS.



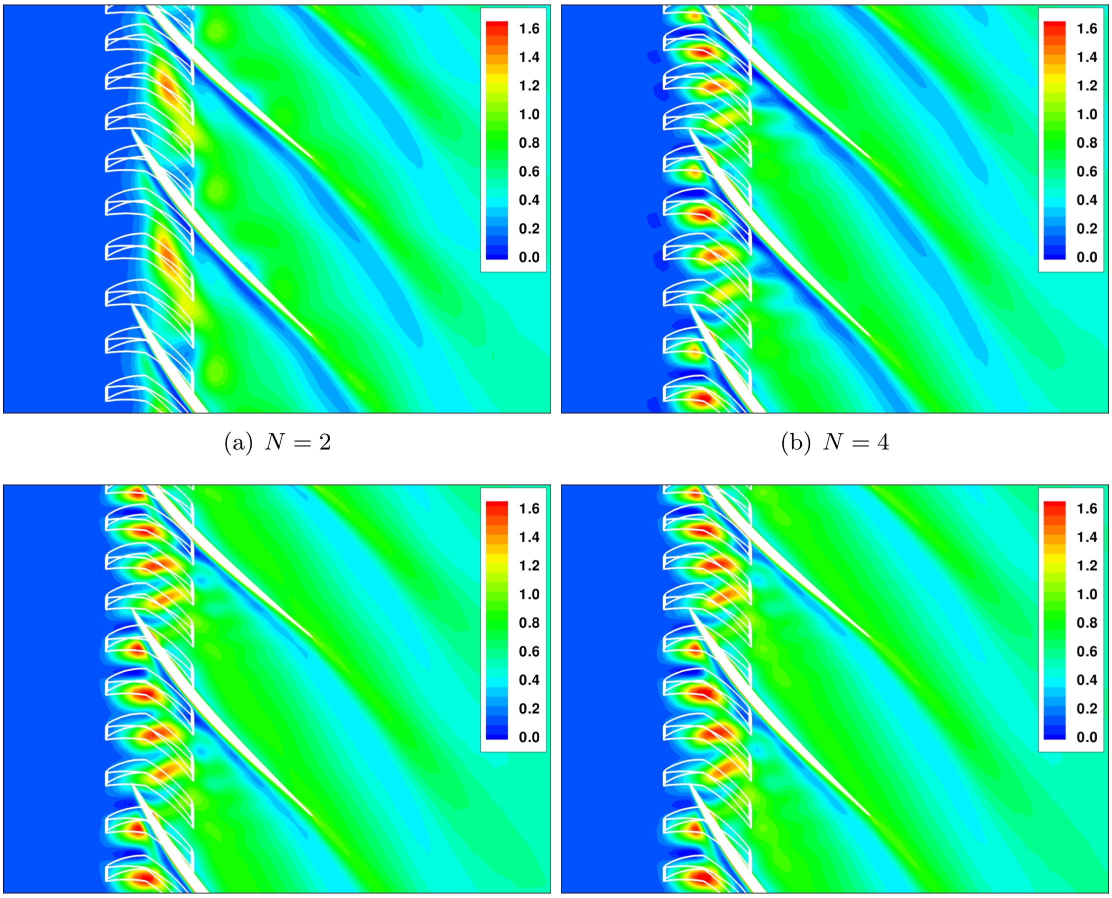
(a) Périodicité géométrique $\Gamma = 30$

(b) Maillage

Figure 7.12 – Traitement de carter axial du CME2. Périodicité géométrique $1/30^{\text{ème}}$.

3. dans le cadre de l'étude du flottement d'aubes, il a été indiqué § 1.3.1 que ce phénomène a comme origine un déphasage de vibration des aubes. La périodicité spatiale ne peut pas être appliquée dans ce cas.

Il est toutefois possible de pallier ces défauts au prix de conditions aux limites complexes mais plus réalistes dites « spatio-temporelles ». En plus de réduire encore le domaine de calcul, elles s'adaptent à toute géométrie de turbomachines et permettent de capturer directement la BPF de la roue adjacente. Les deux prochains chapitres sont dédiés à la mise en place de telles conditions aux limites.



(a) $N = 2$

(b) $N = 4$

(c) $N = 5$

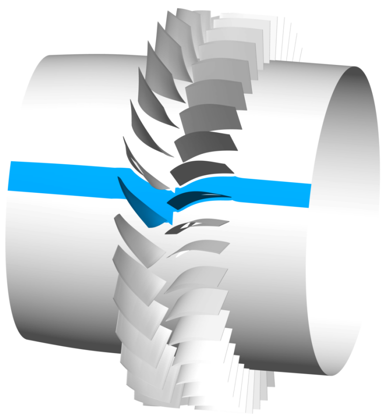
(d) $N = 6$

Figure 7.13 – Traitement de carter CME2 : coupe radiale à 98 % de la hauteur d'aube (entropie).

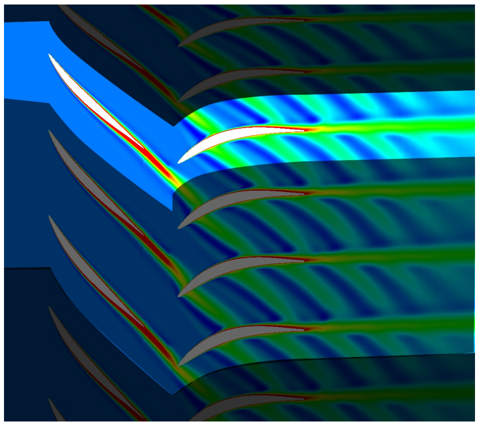
Chapitre 8

Périodicité spatio-temporelle

Le chapitre précédent a démontré la facilité de mise en œuvre de la périodicité spatiale mais aussi ses limites, vite atteintes. Afin de simuler à un coût raisonnable un étage de turbomachine où la périodicité géométrique est grande ou inexistante (cas d'un étage où les roues disposent de nombres d'aubes premiers entre eux), une périodicité plus générale, dite spatio-temporelle, permet de ne considérer qu'un canal dans chaque roue quelle que soit la géométrie. La figure 8.1 démontre clairement que l'écoulement est différent aux frontières azimutales haute et basse d'un seul canal : les canaux sont déphasés entre eux. Ce déphasage dépend du nombre d'aubes dans chaque roue et de la vitesse de rotation relative entre les roues. Cette condition a été décrite par Erdos *et al.* [28] en 1977 et est donc maîtrisée depuis longtemps. Cependant, il convient de l'adapter au contexte particulier de la TSM.



(a) un canal par roue



(b) l'écoulement est déphasé (calcul U-RANS, entropie)

Figure 8.1 – Périodicité spatio-temporelle : simulation d'un canal par roue (CME2).

Dans le cas d'une interaction entre deux roues, on remarque également Fig. 8.1 que la frontière entre les deux roues n'a pas la même étendue azimutale car le pas angulaire de chaque roue est différent. Le traitement utilisé à l'interface sera décrit au prochain chapitre. Ce chapitre ne traite que des frontières azimutales haute et basse d'un canal.

Cette périodicité décalée aux frontières haute et basse permet également de traiter la vibration déphasée d'aubes d'une roue isolée dans le cadre d'une étude de flottement. C'est le cas de validation de ce chapitre, pour lequel différents déphasages sont imposés.

8.1 Frontières haute et basse d'un canal

Le déphasage aux frontières haute et basse d'un canal peut s'exprimer par un retard temporel des variables de l'écoulement :

$$W(x, r, \theta + \theta_G, t) = W(x, r, \theta, t + \Delta t). \tag{8.1}$$

L'écoulement entre deux canaux de pas angulaire θ_G est déphasé d'un temps Δt. La périodicité spatiale décrite au chapitre précédent peut être qualifiée de périodicité instantanée (*i.e.* $\Delta t = 0$). Dans le cas présent, la périodicité spatiale se retrouve après un déphasage temporel Δt, d'où l'adjectif spatio-temporel. Ce déphasage temporel peut s'exprimer à l'aide d'un angle de déphasage β d'une onde tournante à la vitesse angulaire ω_β :

$$\Delta t = \frac{\beta}{\omega_\beta}. \tag{8.2}$$

Dans le cas d'un rotor isolé en vibration, ω_β est égal à la pulsation de vibration de l'aube et β est imposé arbitrairement selon des modes « à diamètres ». Dans le cas d'une interaction entre roues mobiles, ω_β est égal à la fréquence de passage des aubes (BPF) de la roue opposée et β dépend du nombre d'aubes et de la vitesse relative des deux roues. Ces situations sont résumées Tab. 8.1. Le cas rotor/stator sera développé au chapitre suivant car il nécessite une condition d'interface spéciale entre les roues.

	Aube en vibration	**Rotor/stator**
vitesse de l'onde ω_β :	fréquence de vibration	$\overline{B}\Omega$
déphasage β :	imposé	$f(B_1, B_2, \Omega_1, \Omega_2)$

Table 8.1 – Condition de déphasage spatio-temporel : onde tournante en turbomachine.

La condition de périodicité spatio-temporelle nécessite une interpolation temporelle du champ au temps $t + \Delta t$. Lors d'un calcul instationnaire classique, trois méthodes principales ont été introduite dans la littérature :

1. Erdos *et al.* [28] utilisent un stockage direct du champ aux interfaces à chaque instant et une simple interpolation est réalisée entre les deux instants concernés par le déphasage. Cette solution est relativement coûteuse en mémoire car elle nécessite de stocker le champ sur les frontières à chaque pas de temps durant une période.
2. Giles [36] propose le changement de variable suivant

$$t' = t - \lambda\theta, \quad \text{avec } \lambda = -\frac{\beta B}{(2\pi)^2 f}. \tag{8.3}$$

Cette méthode, dite de temps incliné, se place sur un plan de calcul où t' est constant. Les points de ce plan se déplacent selon l'azimut à la vitesse d'une onde générée par l'interaction entre le rotor et le stator. Dans cette onde, les points de calcul sont sans déphasage ce qui permet d'employer une périodicité spatiale classique entre canaux inter-aubes.

3. He [47] propose une méthode de « correction de forme ». L'écoulement est décomposé en séries de Fourier tronquées à un ordre arbitraire. Cela revient à imposer la « forme » de l'écoulement à l'interface mais le calcul du déphasage est aisé et le stockage est réduit à celui des coefficients de Fourier.

Comme la TSM dispose intrinsèquement d'un échantillonnage uniforme de l'écoulement, elle se rapproche de la technique de stockage direct évoquée plus haut. Dans l'esprit des méthodes harmoniques, une interpolation spectrale (par série de Fourier) est proposée par Gopinath *et al.* [40] pour le cas rotor/stator. Elle est étendue ici au cas plus général d'une onde se propageant à une vitesse ω_β avec un angle de déphasage β quelconque. La condition limite proposée ici pour la TSM constitue donc une méthode hybride entre la méthode de stockage direct et la méthode de correction de forme.

La série de Fourier des variables conservatives de pulsation ω_β tronquée à l'ordre N s'écrit

$$W(x,r,\theta,t) = \sum_{k=-N}^{N} \widehat{W}_k(x,r,\theta)e^{ik\omega_\beta t}. \tag{8.4}$$

Le déphasage temporel Δt est introduit et, considérant Eq. (8.1), donne le spectre à imposer à la frontière déphasée :

$$\sum_{k=-N}^{N} \widehat{W}_k(x,r,\theta+\theta_G)e^{ik\omega_\beta t} = \sum_{k=-N}^{N} \widehat{W}_k(x,r,\theta)e^{ik\omega_\beta \Delta t}e^{ik\omega_\beta t}. \tag{8.5}$$

Puis l'angle de déphasage de la relation Eq. (8.2) simplifie l'équation précédente à

$$\widehat{W}_k(x,r,\theta+\theta_G) = \widehat{W}_k(x,r,\theta)e^{ik\beta}. \tag{8.6}$$

Le spectre d'un canal $\theta+\theta_G$ est donc égal au spectre du canal voisin θ modulé par une exponentielle complexe dépendant de l'angle de déphasage β.

Il est possible d'obtenir une formule analytique à la manière dont est obtenu l'opérateur D_t décrit § 4.4.1. L'approximation des coefficients de Fourier $\widehat{W}_k$ est réalisée par TFD. Une fois la modulation appliquée, le champ à imposer à la frontière opposée est obtenue par TFDI. Matriciellement, cela s'écrit :

$$W^*(x,r,\theta+\theta_G) = \mathcal{E}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{E}W^*(x,r,\theta), \tag{8.7}$$

où $\mathcal{M}$ est la matrice diagonale de modulation

$$\mathcal{M} = \text{diag}\left(e^{ik\beta}\right), \quad k=-N,\dots,N. \tag{8.8}$$

Au final, une combinaison linéaire de tous les instants permet de trouver le champ déphasé :

$$W(x,r,\theta+\alpha\theta_G,t_n) = \frac{1}{2N+1}\sum_{m=-N}^{N} b_m W(x,r,\theta,t_{n+m}), \tag{8.9}$$

avec les coefficients

$$b_m = 1 + 2\sum_{k=1}^{N} \cos\left[k\left(2\pi\frac{m}{2N+1} - \alpha\beta\right)\right], \tag{8.10}$$

où $\alpha = \pm 1$ pour accommoder les deux sens de transmission du champ. Ce processus est illustré Fig. 8.2 : un signal harmonique $W(x, r, \theta, t)$ (ligne pleine) est connu à 11 instants pour un calcul TSM à $N = 5$ (carrés pleins). Le signal à imposer au canal suivant, $W(x, r, \theta + \theta_G, t)$, est également connu avec un déphasage arbitraire (ligne pointillée). L'application de la formule Eq. (8.9) aux échantillons de la TSM donne les disques qui correspondent bien au signal déphasé connu aux instants d'origine.

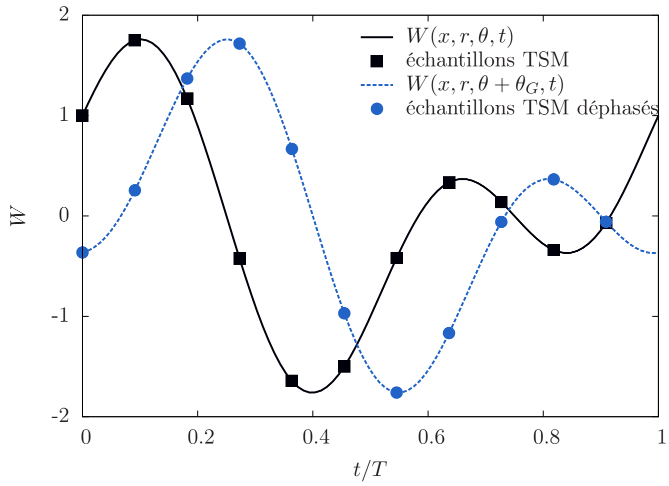


Figure 8.2 – Illustration du déphasage entre canaux.

8.2 Application au flottement d'aube

Le meilleur moyen de traiter le problème du flottement consiste à réaliser un couplage aéroélastique direct entre le fluide et la structure. Toutes les non-linéarités de l'écoulement et la déformation dynamique de la structure sont prises en compte et des phénomènes complexes tels que les cycles limites peuvent être prédits avec précision. Cependant, ces simulations sont encore trop coûteuses pour être utilisées au quotidien. Dans un tel contexte, l'une des alternatives est la méthode P-K proposé par Irwin et Guyett [52] (P désignant la variable de Laplace et K une fréquence réduite) et récemment amélioré par Chen [14]. Elle est basée sur l'hypothèse d'une évolution linéaire de la charge aérodynamique du fluide sur les aubages par rapport à la déformation de la structure. Les équations dynamiques sont transposées dans le domaine de Laplace où la charge aérodynamique se manifeste alors sous forme de forces aérodynamiques généralisées (GAF). Les GAF correspondent au travail de la pression selon le déplacement associé à chaque mode de déformation. La prédiction du flottement requière trois étapes, illustrées Fig. 8.3 :

1. calcul des modes propres du modèle de la structure ;
2. prédiction des GAF grâce à des simulations instationnaires en mouvement forcé selon les modes prédits à l'étape précédente ;

3. résolution d'un système algébrique pour obtenir l'amortissement aérodynamique de chaque mode pour plusieurs points de fonctionnement.

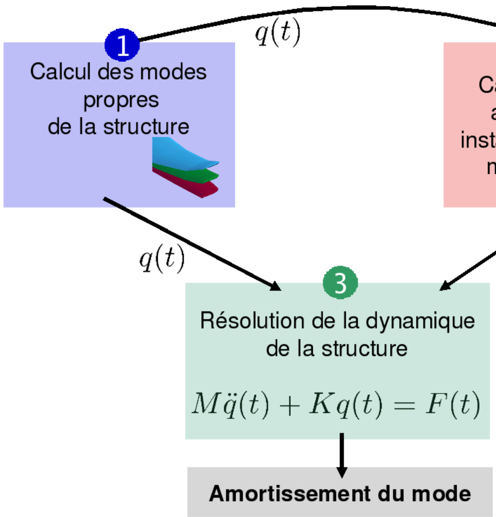


Figure 8.3 – Illustration de la méthode P-K.

La deuxième étape requiert donc une simulation instationnaire en mouvement forcé périodique qui est ici réalisée avec les modèles U-RANS et TSM. Comme la déformation des aubes impose une déformation du maillage, la formulation lagrangienne/eulérienne arbitraire décrite § 6.3 est utilisée.

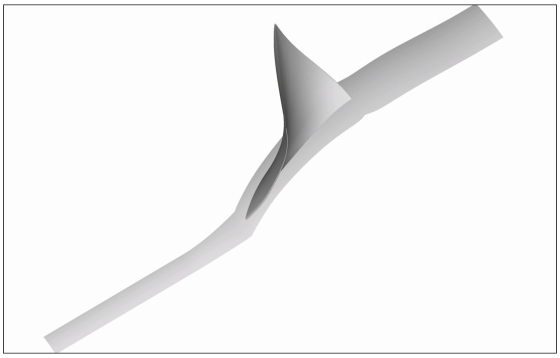
8.2.1 Description du cas test

Le déphasage des frontières haute et basse est testé sur une roue isolée d'un compresseur axial de Turboméca dont les aubes sont en vibration forcée sur le premier mode complexe de flexion (illustration Fig. 8.4). Le mode de vibration est identique pour chaque aube, mais elles ne vibrent pas nécessairement en phase. Différents déphasages doivent être testés pour déterminer la sensibilité au flottement.

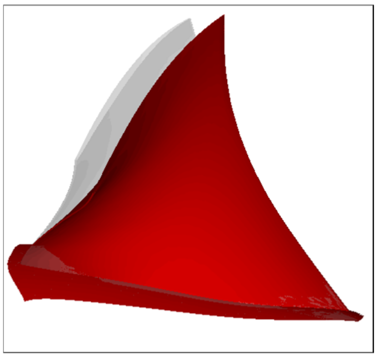
L'algorithme de déformation mis en œuvre dans *elsA* n'étant pas capable de traiter le jeu entre la tête d'aube et le carter, celle-ci se déforme en glissant le long du carter. Les simulations de ce type sont également très sensibles à l'amplitude du mouvement. Le déplacement de la tête de l'aube est par conséquent très faible, inférieur à son épaisseur. Cela ne présente pas de problème pour l'analyse physique puisque la réponse du fluide est supposée être linéaire en l'amplitude de la déformation.

Le schéma décentré de Roe [78] au deuxième ordre est utilisé pour la discrétisation spatiale. Le champ turbulent est modélisé par l'approche $k-l$ de Smith [85]. Le calcul U-RANS est mené à l'aide d'une avance en temps par DTS avec 45 instants par période et 80 sous-itérations. La convergence des problèmes stationnaires (TSM et sous-itérations DTS) est accélérée grâce à un cycle multi-grille en V à deux niveaux de grilles grossières.

Les conditions limites amont et aval sont identiques aux calculs du chapitre précédent. Le maillage utilisé permet d'intégrer les équations jusqu'à la paroi. L'aube et le moyeu disposent d'une condition d'adhérence alors que le carter est considéré glissant du fait de la déformation de l'aube à son contact. La condition initiale est fournie par un calcul stationnaire.



(a) Domaine de calcul



(b) Illustration de la flexion des aubes (×100)

Figure 8.4 – Compresseur axial Turboméca (vue déformée).

Les résultats adimensionnés sont maintenant présentés.

8.2.2 Résultats

8.2.2.1 Vibration en phase

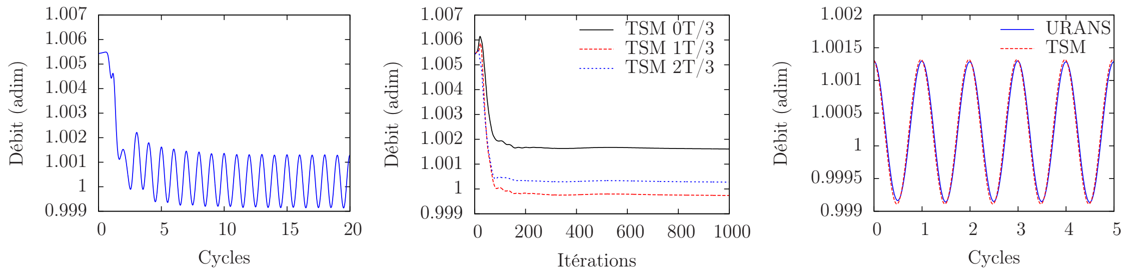
Dans un premier temps, un déphasage nul est considéré et l'écoulement est périodique en azimut aux frontières haute et basse d'un canal. S'il ne permet pas de tester la périodicité spatio-temporelle, ce cas permet néanmoins de mettre en place les calculs et de valider les paramètres numériques, notamment ceux du DTS.

Le débit instationnaire du calcul U-RANS est présentée Fig. 8.5(a). Le débit amont, plus lent à converger que le débit aval, est tracé en fonction du nombre de cycles de vibration. L'état périodique est considéré atteint après une dizaine de cycles. La faible amplitude du mouvement entraîne une faible variation de débit puisque celui-ci oscille de moins de 0,2 % autour de la valeur moyenne.

La figure 8.5(b) montre la convergence de chacun des trois instants d'un calcul TSM à un harmonique. Un plateau est atteint très rapidement. Une fois les instants convergés, il est possible de reconstruire un signal instationnaire à n'importe quel instant en utilisant une interpolation spectrale. Ce signal obtenu est superposé au signal provenant du modèle U-RANS Fig. 8.5(c). Ils se superposent parfaitement. Un calcul TSM à trois instants suffit donc à correctement prédire le débit instationnaire alors que le temps de calcul est divisé par quatre par rapport au U-RANS.

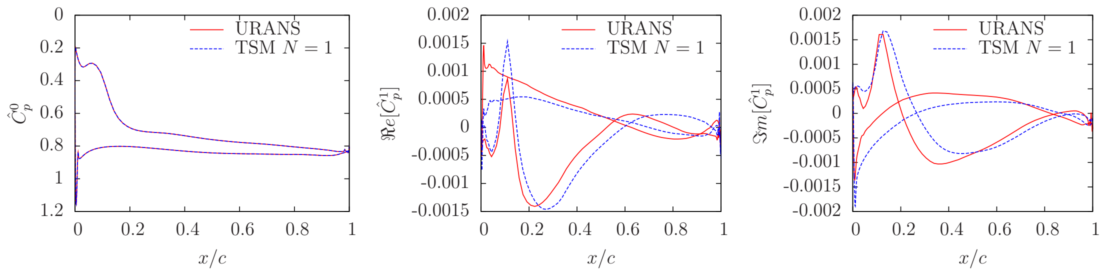
Une analyse spectrale du coefficient de pression sur la peau de l'aube à 90 % de l'envergure est présentée Fig. 8.6. Les deux modèles, U-RANS et TSM, prédisent la même moyenne. Cependant, les parties réelle et imaginaire diffèrent légèrement même si les tendances sont comparables.

La convergence des forces aérodynamiques généralisées projetées selon les parties réelle et imaginaire du mode complexe est présentée Fig. 8.7. En (a), la convergence d'un calcul TSM à trois instants est calculée toutes les 50 itérations et superposée à la convergence instationnaire du calcul U-RANS. Ce dernier correspond bien avec la reconstruction du signal instationnaire obtenu à partir des échantillons de la TSM (Fig. 8.7(b)). Les GAF projetées sur la partie imaginaire donnent également de bons résultats Fig. 8.7(c) et (d).



(a) U-RANS (b) TSM $N = 1$ (c) U-RANS / TSM

Figure 8.5 – Aube en vibration sans déphasage, débit amont.



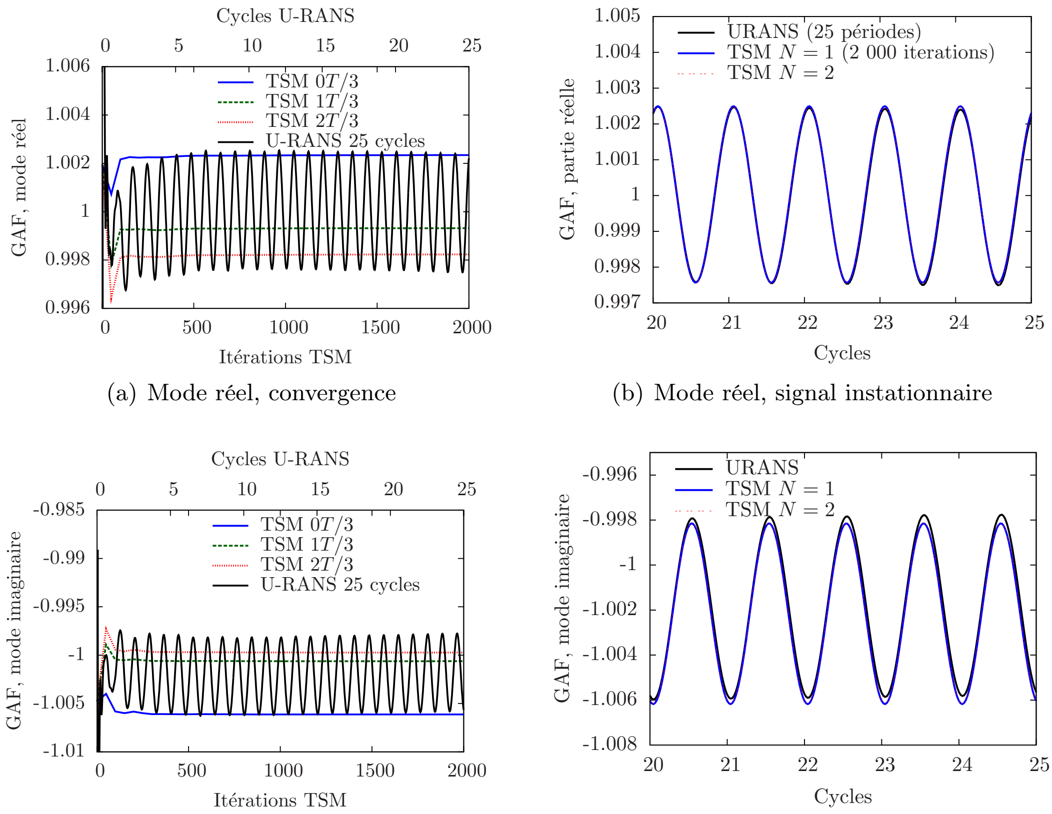
(a) Moyenne (b) Partie réelle du 1[er] harmonique (c) Partie imaginaire du 1[er] harmonique

Figure 8.6 – Aube en vibration sans déphasage, coefficient de pression (90 % hauteur de veine).

8.2.2.2 Vibration avec faible déphasage

Un léger déphasage est maintenant appliqué et la fréquence de vibration est augmentée de 20 % par rapport au cas précédent sans déphasage. Afin d'illustrer le déphasage aux frontières haute et basse d'un canal, une cartographie de l'écoulement à rayon constant obtenu par un calcul TSM à trois instants est présentée Fig. 8.8(a). Le canal du milieu constitue le domaine de calcul. Le canal du haut résulte de la simple duplication du domaine de calcul. Comme l'écoulement n'est pas périodique en azimut, les iso-lignes de contours de la variable ρE ne correspondent pas de part et d'autre de la frontière (ellipse rouge et zoom Fig. 8.8(b)). La différence est faible car, d'une part, l'amplitude de vibration de l'aube est modeste, et d'autre part, le déphasage est faible. Les fluctuations instationnaires le sont donc également. Pour reconstruire l'écoulement dans tout le domaine de calcul, il est nécessaire de dupliquer le canal d'origine en prenant en compte le déphasage temporel. Le canal du bas a été construit de cette manière. Les iso-lignes de contours sont alors bien coïncidentes, comme le montre Fig. 8.8(c).

Le calcul U-RANS utilise une méthode similaire à la correction de forme développée par He [47] pour le calcul du déphasage aux frontières haute et basse. À chaque itération sur le temps physique, les coefficients de Fourier de l'écoulement aux frontières haute et basse sont mis à jour pour imposer le champ à la frontière opposée en prenant en compte le déphasage. Ce processus d'accumulation rallonge considérablement le transitoire nécessaire pour atteindre l'état périodique comme l'indique clairement la figure 8.9(a). Quand le calcul U-RANS avec périodicité spatiale avait besoin de dix cycles, la condition spatio-temporelle avec un faible déphasage en a besoin d'au moins 40, alors même que le débit semble toujours présenter une



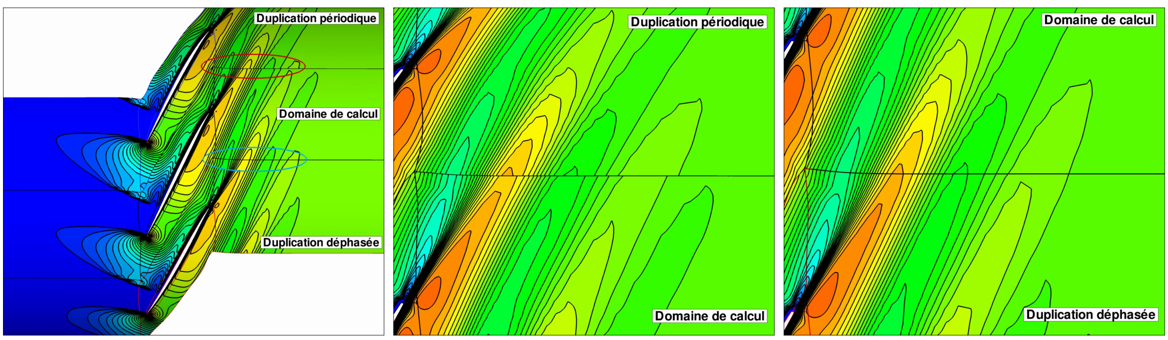
(a) Mode réel, convergence

(b) Mode réel, signal instationnaire

(c) Mode imaginaire, convergence

(d) Mode imaginaire, signal instationnaire

Figure 8.7 – Aube en vibration sans déphasage, forces aérodynamiques généralisées (GAF) adimensionnées.



(a) Trois canaux

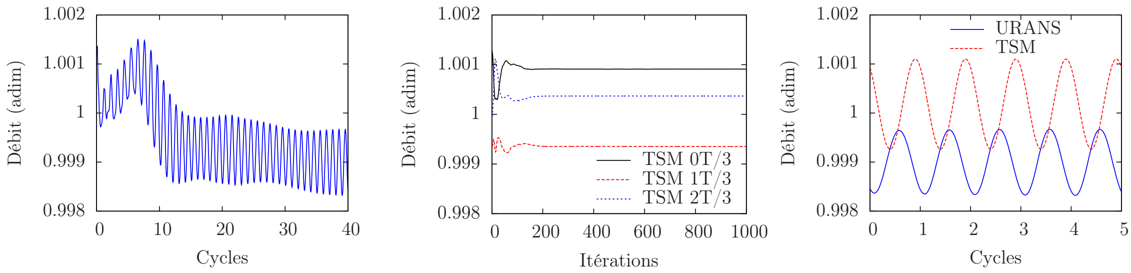
(b) Duplication périodique

(c) Duplication déphasée

Figure 8.8 – Aube en vibration : cartographie du déphasage (ρE).

légère dérive. La convergence de la TSM, Fig. 8.9(b), n'est pas impactée et le débit atteint une nouvelle fois un régime stable en quelques centaines d'itérations. Les gains en temps de calcul de la TSM par rapport au U-RANS est alors plus important, passant de quatre à dix.

Les fluctuations instationnaires du débit amont prédites par les modèles U-RANS et TSM sont cependant légèrement différentes (Fig. 8.9(c)). La moyenne ainsi que l'amplitude ne sont pas égales même si l'écart reste très faible en valeur absolue. Le U-RANS ne peut plus vraiment être considéré comme une référence car son transitoire instationnaire est difficile alors que la TSM se montre plus robuste.



(a) U-RANS (b) TSM $N = 1$ (c) U-RANS / TSM

Figure 8.9 – Aube en vibration avec faible déphasage, débit amont.

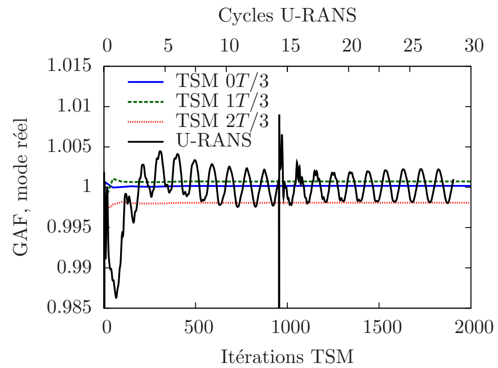
Les courbes de GAF sont présentées Fig. 8.10. La discontinuité observée sur le calcul U-RANS correspond à la reprise du calcul qui ne pouvait tenir entièrement dans le temps imparti par le système de batch du calculateur. Cette discontinuité s'observe également sur le débit même si elle est moins visible. La reprise reprend pourtant les coefficients de Fourier des frontières haute et basse, préalablement stockés à la fin d'un calcul pour être repris au début du calcul suivant. Mais comme le schéma DTS d'avance en temps est d'ordre 2, il faudrait stocker les deux dernières solutions pour faire une reprise, ce qui n'est pas fait. Cela entraîne donc un petit transitoire à chaque reprise, ce qui amène peut-être la dérive des grandeurs comme le débit.

Là encore, un léger déphasage et une faible différence d'amplitude sont observés entre les simulations TSM et le calcul U-RANS, même si ces écarts sont moins importants que sur le débit.

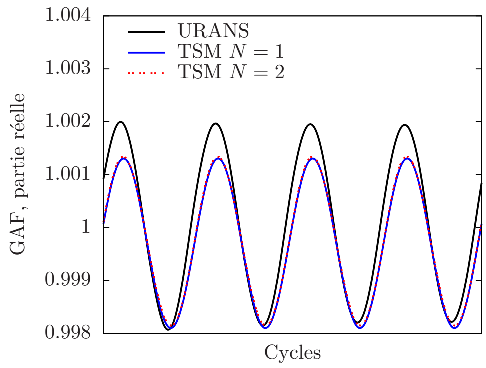
8.2.2.3 Vibration avec fort déphasage

Le déphasage appliqué dans cette section est très grand puisque deux aubes voisines vibrent quasiment en opposition de phase. La fréquence est également 30 % supérieure au cas sans déphasage. Le transitoire du calcul U-RANS est alors beaucoup plus long et chahuté comme le montre nettement la figure 8.11(a) : le débit présente une forte variation qui ne semble guère se stabiliser même après 200 cycles de vibration.

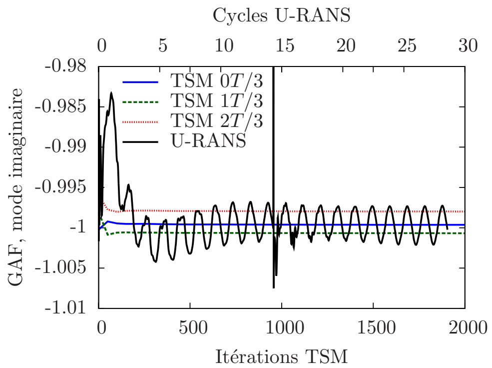
La TSM fait toujours preuve de robustesse comme le démontre la convergence de chaque instant Fig. 8.11(b).



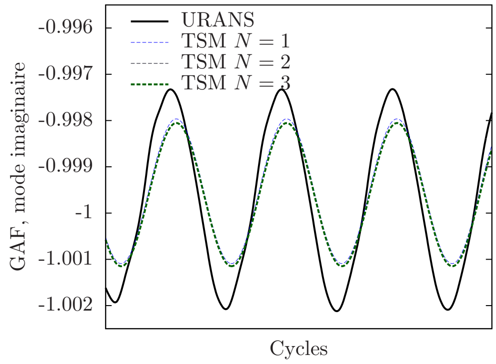
(a) Mode réel, convergence



(b) Mode réel, signal instationnaire



(c) Mode imaginaire, convergence



(d) Mode imaginaire, signal instationnaire

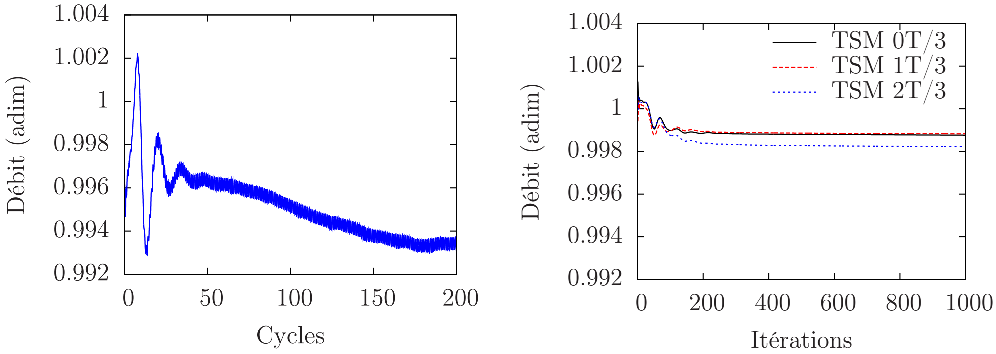
Figure 8.10 – Aube en vibration avec faible déphasage, forces aérodynamiques généralisées (GAF) adimensionnées.

Synthèse

Ce chapitre a présenté la condition de périodicité spatio-temporelle et son adaptation au modèle TSM. Les conditions limites azimutales sont traitées purement dans le domaine temporel. Le cas test d'une aube en vibration forcée en déphasage avec les aubes adjacentes a montré une bonne robustesse de la TSM. Des écarts sont apparus par rapport au U-RANS qui semble de moins en moins robuste à mesure que le déphasage augmente. Il est donc difficile de statuer mais la TSM semble pouvoir apporter une réponse rapidement et avec précision à l'ingénieur. Les gains en temps de restitution sont favorables à la TSM notamment quand le transitoire nécessaire au calcul U-RANS est long. On passe ainsi d'un gain proche de 4 pour la simulation sans déphasage à un gain de 10 pour un faible déphasage.

Une étude similaire a été menée par Bakhle et Reddy [5], Bakhle *et al.* [6]. Ils utilisent un code NASA pour le U-RANS et le code de Duke University (Hall *et al.* [45]) pour la méthode d'équilibrage harmonique. Les méthodes numériques utilisées dans les deux cas sont très différentes et les maillages ne possèdent ni la même résolution ni la même topologie. Au final, il est difficile de comparer d'une part, la précision de la physique, et d'autre part, les temps de restitution.

Le prochain chapitre détaille la condition d'interface entre roues mobiles afin d'étudier les interactions rotor/stator.



(a) U-RANS

(b) TSM $N = 1$

Figure 8.11 – Aube en vibration avec fort déphasage, débit amont.

Chapitre 9

Interaction rotor/stator

Maintenant que le déphasage aux frontières azimutales d'un canal inter-aube est validé, le dernier développement nécessaire à la simulation d'écoulements en turbomachine concerne l'interface entre deux roues mobiles.

Dans ce chapitre, les nombres d'aubes de chaque roue sont considérés différents sinon le cas trivial d'une périodicité spatiale avec un seul canal simulé dans chaque roue est retrouvé. S'ils sont dédiés à la simulation d'interactions entre un rotor et un stator, les développements présentés sont valables pour des vitesses de rotations arbitraires.

9.1 Fréquences et échantillonage

La simulation d'un seul canal dans chaque roue implique l'apparition de deux fréquences de l'écoulement. En effet, chaque roue observe la fréquence de passage des aubes (BPF) de la roue opposée, de sorte que chaque roue capture

$$\omega_k = k\overline{B}\Omega, \quad 0 < k \leq N, \tag{9.1}$$

où $\overline{B}$ désigne le nombre d'aubes de la roue opposée et Ω la vitesse de rotation de la machine. Si le nombre d'aubes dans chacune des roues est différent ($B \neq \overline{B}$), alors les fréquences seront différentes et il est très peu probable qu'elles soient multiples l'une de l'autre. La TSM telle qu'elle a été précédemment dérivée n'est pas adaptée à cette situation. Pourtant, chaque roue résout toujours une seule fréquence fondamentale (la BPF de la roue opposée) et ses harmoniques. La TSM peut donc être appliquée séparément à chacune des roues. Mais comme les fréquences fondamentales diffèrent, la période de l'écoulement n'est pas identique dans chaque roue et les instants de résolution ne sont donc pas coïncidents comme le montre la figure 9.1. Dans chaque roue, la période de l'écoulement est

$$T = \frac{2\pi}{\overline{B}\Omega}, \tag{9.2}$$

et l'échantillonnage temporel est

$$t_n = \frac{2\pi}{\overline{B}\Omega}\frac{n}{2N+1}, \quad 0 \leq n < 2N+1. \tag{9.3}$$

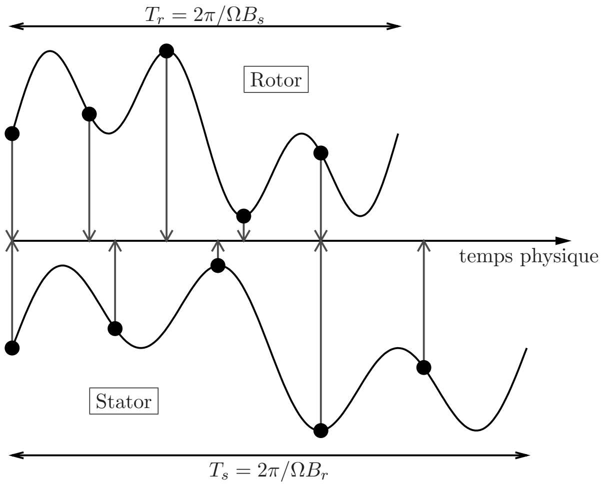


Figure 9.1 – Périodes et instants différents dans chacune des roues (5 instants).

L'étude de l'interaction rotor/stator à l'aide de la condition de déphasage spatio-temporelle nécessite donc le couplage de deux calculs TSM, un par roue.

Dans un premier temps, le déphasage des frontières haute et basse est appliqué au cas particulier des interactions rotor/stator. Ensuite l'interpolation spatio-temporelle réalisée à l'interface entre les deux roues est décrite § 9.3. Une fois tous ces éléments réunis, la simulation d'un écoulement avec la vraie géométrie du CME2 est présentée.

9.2 Frontières haute et basse d'un canal

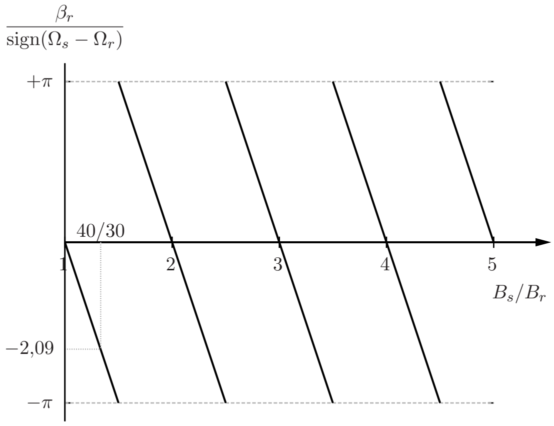
Dans le cadre d'une interaction rotor/stator, l'angle de déphasage inter-aubes est analytique. D'après Gerolymos et Chapin [34], il dépend du nombre d'aubes dans chaque roue ainsi que de la vitesse de rotation relative entre les deux roues :

$$\beta = -2\pi \left(1 - \frac{\overline{B}}{B}\right) \operatorname{sign}(\Omega - \overline{\Omega}). \tag{9.4}$$

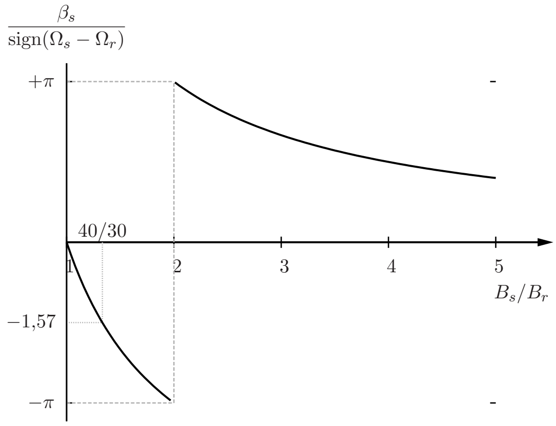
La figure 9.2 trace la valeur du déphasage pour chacune des roues en fonction du rapport du nombre d'aubes. Si le nombre d'aubes est identique dans les deux roues ($B = \overline{B}$), alors le déphasage est nul et la périodicité spatiale développée au chapitre 7 est retrouvée.

9.3 Interface entre roues

L'information doit maintenant être transférée d'une roue à la roue adjacente au moyen de raccords de type non-coïncident glissant. Dans le cas d'une périodicité spatiale (cf. chapitre 7), l'écoulement instationnaire était connu aux mêmes instants dans chaque roue, et la duplication (rendue nécessaire par le mouvement relatif des deux roues) était simplement périodique en azimut. Dans le cas présent, la première section de ce chapitre a déjà montré que l'échantillonnage temporel est différent dans chaque roue. De plus, la duplication n'est plus périodique et doit tenir du compte du déphasage entre canaux inter-aubes. En conséquence, l'écoulement de



(a) Déphasage au rotor



(b) Déphasage au stator

Figure 9.2 – Déphasage entre canaux en fonction du rapport du nombre d'aubes. Exemple du CME2. Adapté de Gerolymos et Chapin [34].

la roue donneuse doit être reconstruit à la fois aux instants et à la localisation spatiale de la roue receveuse. L'interface entre les roues doit permettre le couplage des deux calculs TSM (un par roue).

Dans l'approche proposée par Ekici et Hall [26], ce couplage est réalisé dans le domaine fréquentiel même si le transport des grandeurs conservatives se fait dans le domaine temporel. Une TFD est appliquée sur les variables conservatives W^* de la roue donneuse pour obtenir $\widehat{W}^*$ de chaque cellule dans la direction azimutale. Comme les lignes de maillage dans cette même direction ne sont pas coïncidentes de part et d'autre de l'interface, une autre TFD est appliqué en azimut et $\widetilde{W}^*$ est obtenu. En supposant que les nappes radiales du maillage soient coïncidentes, ces coefficients sont transférés à la roue receveuse après un traitement non-réflectif (Hall *et al.* [44]) formulé simplement dans le domaine fréquentiel. L'écoulement est ensuite reconstruit dans la roue receveuse. Gopinath *et al.* [40] proposent une méthode purement dans le domaine temporel, dont nous nous sommes inspirés car elle est plus commode à mettre en œuvre dans le solveur *elsA*,

9.3.1 Interpolation temporelle

Il s'agit d'interpoler les champs de la roue donneuse aux instants de la roue receveuse. Afin de conserver le spectre, on effectue une interpolation spectrale :

$$\overline{W}^*(t) = \mathcal{E}_i^{-1}\overline{\mathcal{E}}\,\overline{W}^*\left(\bar{t}\right), \tag{9.5}$$

où $\overline{\mathcal{E}}$ est la matrice de TFD considérant les instants et les fréquences de la roue donneuse

$$\overline{\mathcal{E}}_{k,n} = \frac{1}{2N+1}\exp\left(-i\overline{\omega}_k\bar{t}_n\right) = \frac{1}{2N+1}\exp\left(-2i\pi k\frac{n}{2N+1}\right), \tag{9.6}$$

et $\mathcal{E}_i^{-1}$ est la matrice de TFD inverse conservant le même contenu fréquentiel mais considérant les instants de la roue receveuse

$$\left(\mathcal{E}_i^{-1}\right)_{m,k} = \exp\left(i\overline{\omega}_k t_m\right) = \exp\left(2i\pi\frac{B}{\overline{B}}k\frac{m}{2N+1}\right). \tag{9.7}$$

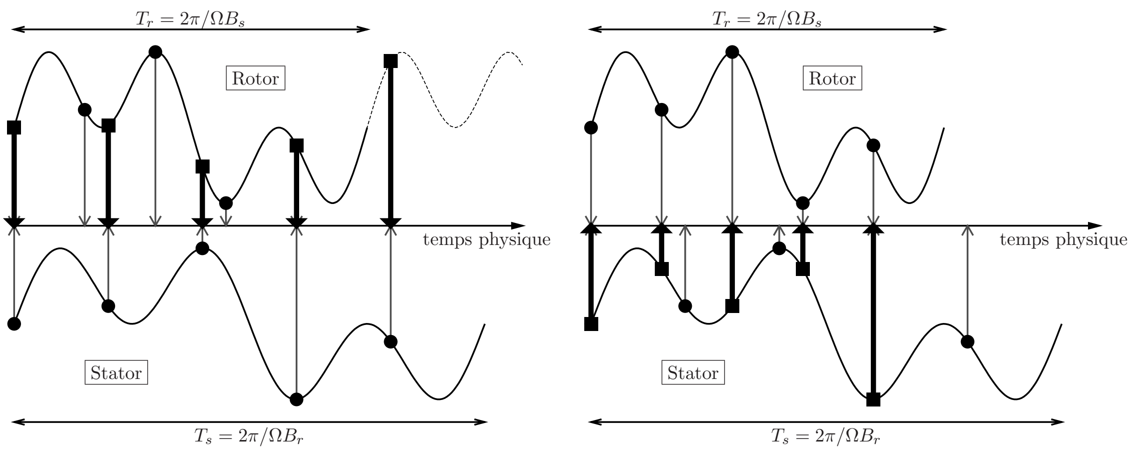
Après déroulement des produits matriciels, une combinaison linéaire est obtenue :

$$\overline{W}\left(t_m\right) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{2N} c_{m,n} \overline{W}\left(\bar{t}_n\right), \tag{9.8}$$

avec les coefficients

$$c_{m,n} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{N} \cos\left[2\pi \frac{k}{2N+1}\left(\frac{B}{\overline{B}} m - n\right)\right]. \tag{9.9}$$

Ce processus est illustré Fig. 9.3 dans les deux sens de communication.



(a) Du rotor vers le stator (b) Du stator vers le rotor

Figure 9.3 – Interpolation temporelle (carré et traits épais) entre deux roues de vitesse de rotation différente. Exemple d'un échantillonnage à cinq instants sur le cas CME2 ($B_r = 30$ et $B_s = 40$).

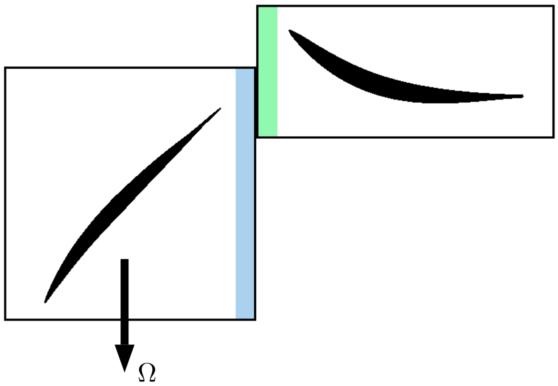
9.3.2 Interpolation spatiale

L'interpolation spatiale utilise la même technique de maillages non-coïncidents et de duplication que celle décrite pour la périodicité spatiale § 7.2.2. Il y a deux adaptations à réaliser :

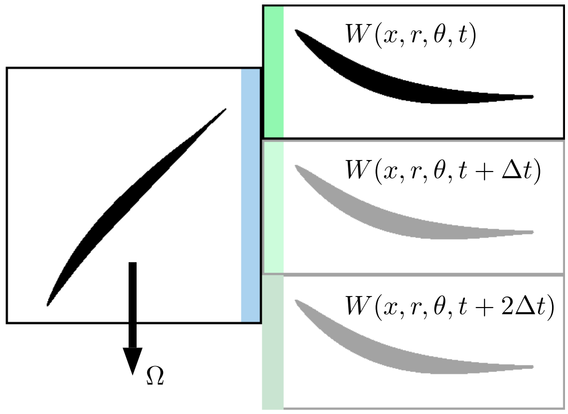
1. comme les instants résolus dans chaque roues sont différents, un même raccord doit gérer deux positions relatives différentes entre les aubages selon le sens de l'échange ;
2. comme l'écoulement n'est pas périodique en azimut d'un canal à l'autre, la duplication doit tenir compte du déphasage temporel de la même manière que les frontières haute et basse.

Ce deuxième processus est illustré à la figure 9.4 : la position relative du rotor et du stator est schématisé en (a). Le rotor n'a pas son interface avec le stator totalement recouverte et l'information en provenance de ce dernier doit être dupliquée. Dans le cas présent, le pas angulaire du stator étant beaucoup plus faible, elle doit même être dupliquée plusieurs fois comme schématisé en (b). Dans ce cas, les n_d déphasages s'additionnent

$$W(x, r, \theta + n_d\theta_G, t) = W(x, r, \theta, t + n_d\Delta t). \tag{9.10}$$



(a) Configuration résolue



(b) Duplication avec déphasage

Figure 9.4 – Interface entre roues mobiles : duplication avec déphasage.

Il n'est pas possible d'utiliser directement les formules de calcul du déphasage dérivées au chapitre précédent (Eq. (8.9)) car une fois l'interpolation temporelle décrite à la section précédente réalisée, l'écoulement n'est plus échantillonné uniformément dans la période résolue par la roue donneuse. Cependant, il est possible de combiner en une étape l'interpolation temporelle décrite à la section précédente et le déphasage nécessaire à l'interpolation spatiale. Ainsi, la roue receveuse a besoin de l'écoulement de la roue donneuse $\overline{W}$ aux instants résolus par la roue receveuse t_m plus le déphasage dû à la duplication de la roue opposée $n_d\overline{\Delta t}$, soit

$$\overline{W}^*(t + n_d\overline{\Delta t}) = \mathcal{E}_{n_d}^{-1}\overline{\mathcal{E}}\,\overline{W}^*\left(\overline{t}\right), \tag{9.11}$$

ou la matrice $\mathcal{E}_{n_d}^{-1}$ prend la même forme que Eq. (9.7) et prend en compte le déphasage pour la duplication n_d :

$$\left(\mathcal{E}_{n_d}^{-1}\right)_{m,k} = \exp\left[i\overline{\omega}_k\left(t_m + n_d\overline{\Delta t}\right)\right] = \exp\left(2i\pi\frac{B}{\overline{B}}k\frac{m}{2N+1} + ikn_d\overline{\beta}\right). \tag{9.12}$$

Une combinaison linéaire est ainsi obtenu

$$\overline{W}\left(t_m + n_d\overline{\Delta t}\right) = \frac{1}{2N+1}\sum_{n=0}^{2N} d_{m,n,n_d}\overline{W}\left(\overline{t}_n\right) \tag{9.13}$$

avec les coefficients

$$d_{m,n,n_d} = 1 + 2\sum_{k=1}^{N}\cos\left[2\pi\frac{k}{2N+1}\left(\frac{B}{\overline{B}}m - n\right) + kn_d\overline{\beta}\right]. \tag{9.14}$$

Il est à noter que si le déphasage est nul ($n_d = 0$), l'interpolation temporelle est réalisée : $d_{m,n,0} = c_{m,n}$ (Eq. (9.9)). Si le nombre d'aubes est le même dans chaque roue ($\overline{B} = B$), le déphasage est nul : $d_{m,n,n_d} = \delta_{m,n}$.

L'interpolation temporelle et spatiale est illustrée Fig. 9.5 dans le cas du CME2 ou le stator (40 aubes) est la roue donneuse et le rotor la roue receveuse. L'écoulement du stator ($\overline{W}(t)$, trait plein noir), de période $\overline{T}$, est échantillonné par cinq instants ($\overline{W}(\bar{t}_n)$, carrés pleins noirs). Ces instants sont interpolés aux instants du rotor ($\overline{W}(t_m)$, losanges vides noirs) par la formule Eq. (9.8). Le signal est déphasé par β (Eq. (9.4)) en ligne pleine bleue. L'utilisation de la formule Eq. (8.9) dérivée au chapitre précédent sur les carrés noirs donne les échantillons déphasés ($\overline{W}(\bar{t}_n + \overline{\Delta t})$, carrés pleins bleus). Si cette même formule est appliquée sur l'écoulement échantillonné aux instants de la roue receveuse (losange noir), les cercles rouges sont obtenus. Ils ne correspondent pas à la fonction déphasée car les losanges noirs ne représentent pas un échantillonnage uniforme de la période associée à la roue donneuse. Il faut utiliser la dernière formule (Eq. (9.13)) pour obtenir l'écoulement déphasé aux instants de la roue receveuse ($\overline{W}(t_m + \overline{\Delta t})$, losanges bleus).

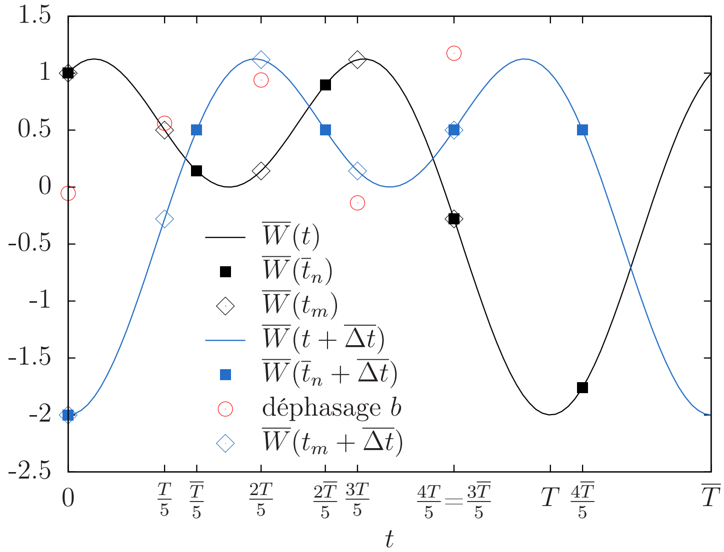


Figure 9.5 – Illustration des interpolations à l'interface entre roues (allure du signal périodique arbitraire).

9.3.3 Filtrage

Gopinath *et al.* [40] dérivent un filtrage à l'interface équivalent au traitement non-réflectif présenter par Ekici et Hall [26] en fréquentiel. En effet, lors des diverses interpolations temporelles précédentes, des fréquences plus élevées peuvent apparaître et corrompre le spectre [40]. Il est alors nécessaire de filtrer la solution. Si le critère de Shannon [81] impose un minimum de $2N + 1$ échantillons équi-répartis dans une période pour capturer le $N^{\text{ème}}$ harmonique de la fréquence fondamentale, le critère d'Orszag [72] impose au moins $3N + 1$ instants pour filtrer et éliminer les hautes fréquences. Il est alors possible d'interpoler l'écoulement de la roue donneuse à $3N + 1$ instants équi-répartis dans la période de la roue receveuse et ensuite procéder au filtrage. Seulement ces nouveaux $3N + 1$ instants ne correspondraient pas aux $2N + 1$ instants résolus par la HBT et il faudrait refaire une interpolation temporelle après le filtrage. Il a donc été décidé de doubler le nombre d'instants, soit $2(2N + 1)$ instants. Le critère d'Orszag est respecté ($2(2N + 1) > 3N + 1$) et après filtrage, il suffira de ne retenir qu'un instant sur deux pour imposer la condition d'interface aux instants résolus par la TSM. Concrètement, ce sur-échantillonnage est obtenu par

$$\overline{W}^* \left(t_m^s\right) = \mathcal{F}^+ \overline{\mathcal{E}}\, \overline{W}^* \left(\bar{t}_n\right), \tag{9.15}$$

où t_m^s désigne le sur-échantillonnage de $2(2N+1)$ instants équi-répartis dans la période de la roue receveuse et $\mathcal{F}^+$ est une matrice rectangulaire qui gère les fréquences de la roue donneuse et le sur-échantillonnage, donc de dimensions $2(2N+1) \times (2N+1)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^+_{m,k} &= \exp\left(i\overline{\omega}_k t_m^s\right) \\ &= \exp\left(2i\pi \frac{B}{\overline{\overline{B}}} k \frac{m}{2(2N+1)}\right), \quad -N \leq k \leq N, \quad 0 \leq m < 2(2N+1). \end{aligned} \tag{9.16}$$

Combiné avec le déphasage temporel à appliquer pour la duplication, Eq. (9.13) devient

$$\overline{W}\left(t_m^s + n_d \overline{\Delta t}\right) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{2N} e_{m,n,n_d} \overline{W}\left(\bar{t}_n\right), \quad 0 \leq m < 2(2N+1), \tag{9.17}$$

avec

$$e_{m,n,n_d} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{N} \cos\left[\pi \frac{k}{2N+1}\left(\frac{B}{\overline{\overline{B}}} m - 2n\right) + k n_d \overline{\beta}\right]. \tag{9.18}$$

L'interpolation spatiale précédemment décrite est ensuite appliquée sur chacun des $2(2N+1)$ instants pour fournir le champ à la roue receveuse $W(t_m^s)$. Celle-ci applique le filtrage pour éliminer les hautes fréquences :

$$\overline{W}^f(t_m^s) = \mathcal{F}^+ \mathcal{F} \overline{W}(t_m^s), \tag{9.19}$$

où $\mathcal{F}$ est une matrice rectangulaire $(2N+1) \times 2(2N+1)$ qui gère les fréquences résolues dans le canal courant et le sur-échantillonnage. La matrice $\mathcal{F}^+$ est la matrice pseudo-inverse Moore-Penrose de $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}^+\mathcal{F} \neq I$. Le filtrage Eq. (9.19) peut être calculé uniquement pour les instants de la TSM (soit un sur deux) depuis le sur-échantillonnage issu de l'interpolation spatiale. Ce filtrage, propre à chaque roue, induit une légère perte de conservativité à l'interface.

9.3.4 Synthèse de la condition d'interface

L'interface entre roues mobiles inclut trois étapes :

1. interpolation de l'écoulement de la roue donneuse aux instants de la roue receveuse en prenant en compte le déphasage lié à la duplication Eq. (9.17) ;
2. interpolation spatiale des $2(2N+1)$ sur-échantillons à l'aide d'un raccord non-coïncident glissant ;
3. filtrage de l'écoulement de la roue donneuse Eq. (9.19). Ce filtrage permet de ne conserver que les fréquences d'intérêt et n'est calculé que pour les échantillons de la TSM.

9.4 Application à la machine CME2

9.4.1 Tranche radiale

Afin d'alléger le cas test, le maillage de la machine CME2 est tronqué dans la direction radiale. Cinq nappes de maillages sont retenues entre 40 et 60 % de la hauteur d'aube comme illustrée Fig. 9.6. Le maillage passe ainsi de 900 000 cellules à un peu plus de 72 000. La géométrie réelle est préservée de sorte que les aubes présentent toujours un vrillage. Il s'agit bien d'un cas en trois dimensions. Les paramètres numériques sont identiques à la section § 7.4.1 auxquels s'ajoutent une condition de symétrie imposée aux frontières radiales.

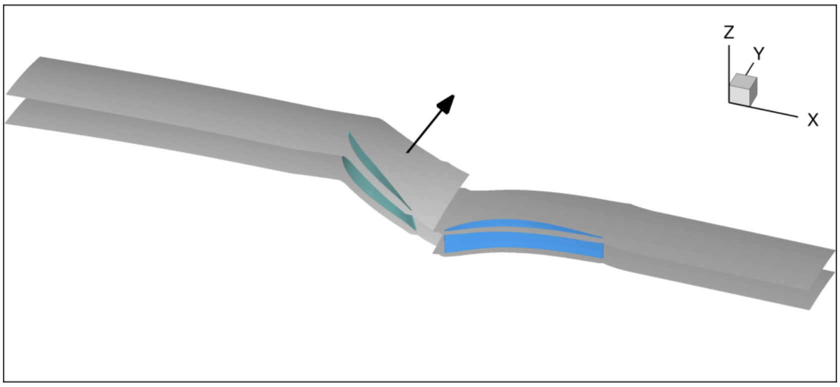
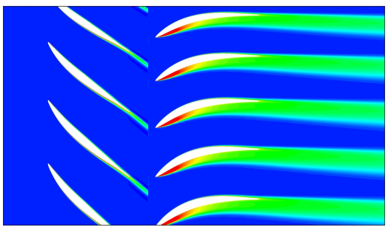
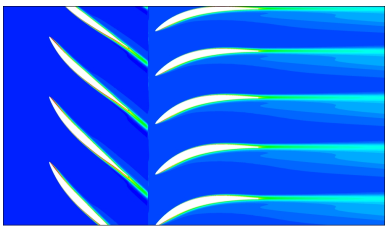


Figure 9.6 – Tranche radiale de maillage du CME2.

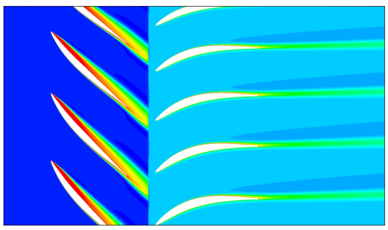
Un calcul utilisant la technique du plan de mélange est effectué afin de fournir une condition initiale aux calculs TSM et U-RANS. Il a été difficile de trouver un point de fonctionnement adapté comme le montre la figure 9.7. En (a), l'écoulement de la première nappe de maillage (correspondant au rayon le plus faible) présente un décollement à l'intrados du stator aval, Au rayon moyen (b), l'écoulement présente de très faibles décollements sur l'intrados des deux roues. Enfin au rayon maximal (c), le décollement est massif sur l'intrados du rotor. Ceci n'est cependant pas problématique et permet de tester la TSM sur un de point fonctionnement numériquement « plus raide ».



(a) 1$^{\text{ère}}$ nappe



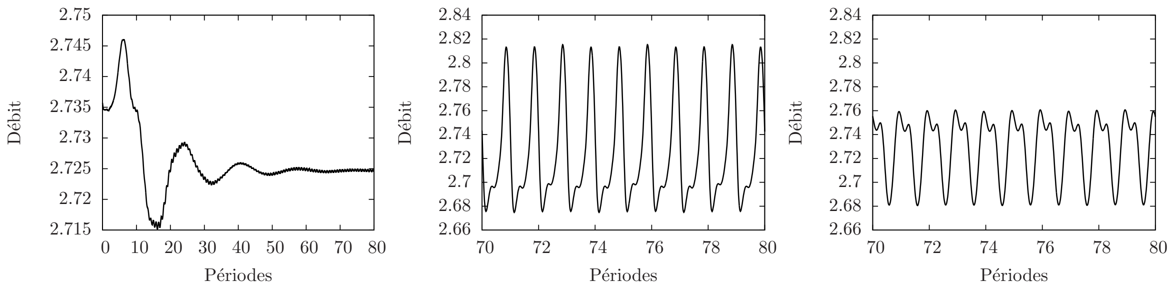
(b) 3$^{\text{ème}}$ nappe



(c) 5$^{\text{ème}}$ nappe

Figure 9.7 – Tranche du CME2 : condition initiale par plan de mélange (entropie, même échelle pour les trois figures).

Des calculs U-RANS avec périodicité spatio-temporelle sont menés avec une méthode DTS à 80, 160 et 320 instants par période et 20 sous-itérations. Une méthode de correction de forme (He [47]) est utilisée pour transférer l'information à l'interface : les vingt premiers harmoniques de l'écoulement sont retenus. La périodicité spatio-temporelle a tendance à rallonger le transitoire nécessaire à un calcul U-RANS pour atteindre l'état périodique par rapport à la périodicité spatiale simple. Le débit amont converge en 80 périodes Fig. 9.8(a). Les débits à l'interface et à l'aval ont alors déjà convergé. Les figures (b) et (c) trace ainsi leur évolution sur les dix dernières périodes de calculs.



(a) Amont (b) Interface rotor/stator (c) Aval

Figure 9.8 – Convergence en débit du calcul U-RANS à 320 instants par période.

La périodicité spatio-temporelle nécessite également une discrétisation spatiale plus fine. La figure 9.9 montre le signal de rendement instationnaire pour les trois calculs U-RANS. Le calcul U-RANS discrétisé par 80 instants sous-estime le rendement lors de la première moitié de la période par rapport au calcul à 160 instants. La différence est moins grande entre 160 et 320 instants puisque l'écart sur le rendement est inférieur à 0,1 % sur toute la période. Nous considérerons donc que 160 instants sont suffisants pour discrétiser la période. Dans ce cas, les résidus perdent près de trois ordres de grandeur en 20 sous-itérations (cf. Fig. 9.10) ce qui est considéré comme suffisamment convergé.

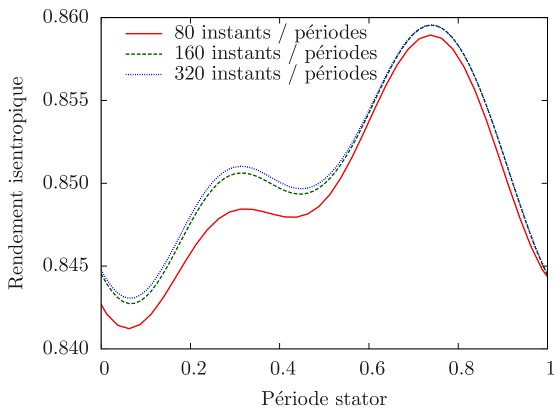


Figure 9.9 – Convergence du rendement des calcul U-RANS sur la tranche du CME2.

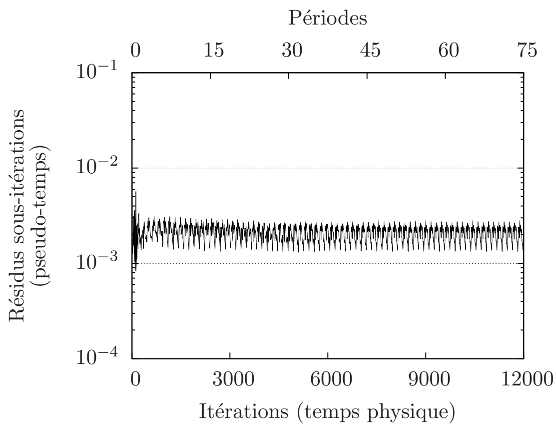


Figure 9.10 – Convergence des sous-itérations (cas 160 instants).

Le calcul TSM à trois instants ne converge pas comme indiqué Fig. 9.11. Les autres calculs présentent une vitesse de convergence similaire et perdent quatre ordres de grandeurs en 5 000 itérations.

La convergence en débit d'un calcul à 15 instants est montrée Fig. 9.12. Elle est atteinte en environs 3 000 itérations. L'instationnarité est générée à l'interface rotor/stator (b) par la

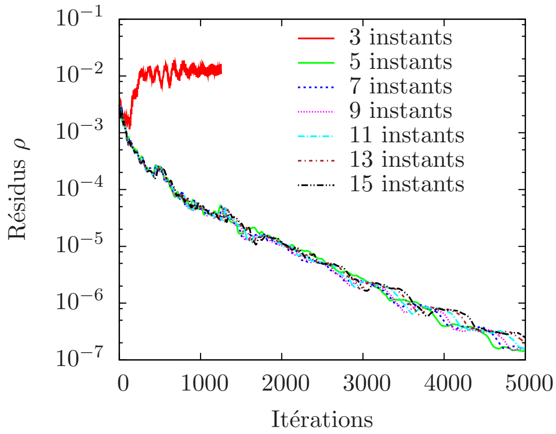
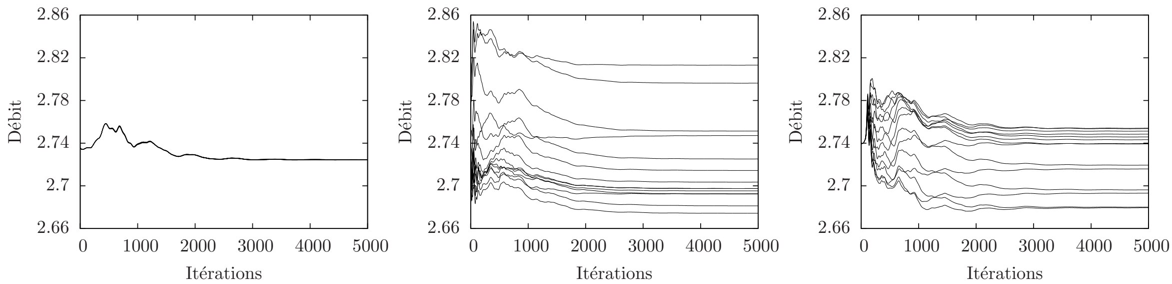


Figure 9.11 – Convergence des calcul TSM sur la tranche du CME2.

convection des sillages aux différentes positions relatives des aubages. Le débit est donc différent à chaque instant dès la premières itération. En amont et en aval, il faut quelques itérations, le temps que l'information se propage dans le domaine de calcul, pour que les débits se séparent. Le débit amont (a) reste relativement constant au cours du temps alors que le débit aval (c) présente de fortes variations.

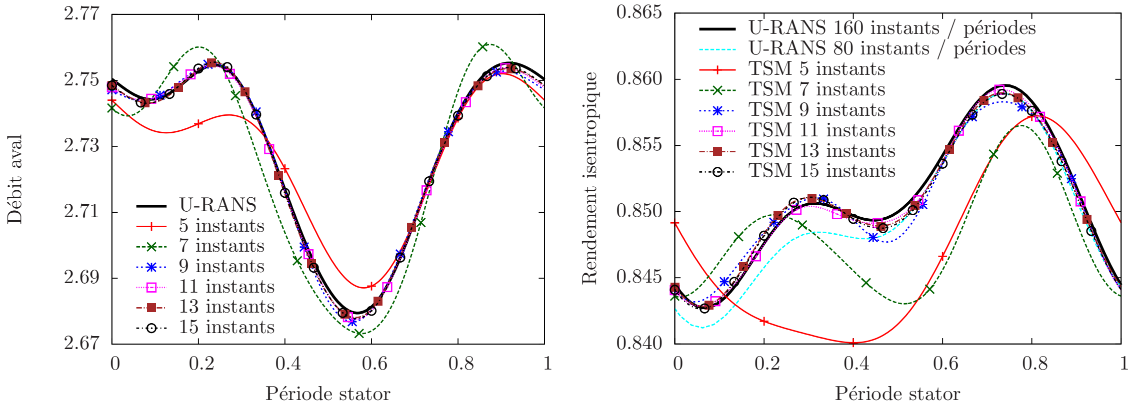


(a) Amont (b) Interface rotor/stator (c) Aval

Figure 9.12 – Convergence en débit, calcul TSM à 15 instants.

Le signal instationnaire de débit à l'aval est reconstitué pour chaque calcul TSM Fig. 9.13(a) et comparé au débit obtenu par le calcul U-RANS. La période considérée est la période du stator, liée à la BPF du rotor. Le signal semble convergé à partir d'un calcul TSM à neuf instants. Celui à sept instants donne un signal proche alors que celui à cinq instants ne capture pas les écarts d'amplitude. En (b) est présentée la comparaison du rendement isentropique. Les calculs TSM à cinq et sept instants donnent un résultat assez éloigné des calculs TSM plus raffinés puisque ni l'allure ni l'amplitude du signal ne sont correctement reproduites. À partir de $N = 4$, l'allure du signal est meilleure que celle du calcul U-RANS à 80 instants par période et la simulation TSM à 11 instants donne un résultat quasiment identique au calcul U-RANS à 160 instants par période. Les deux modèles convergent donc vers une même solution.

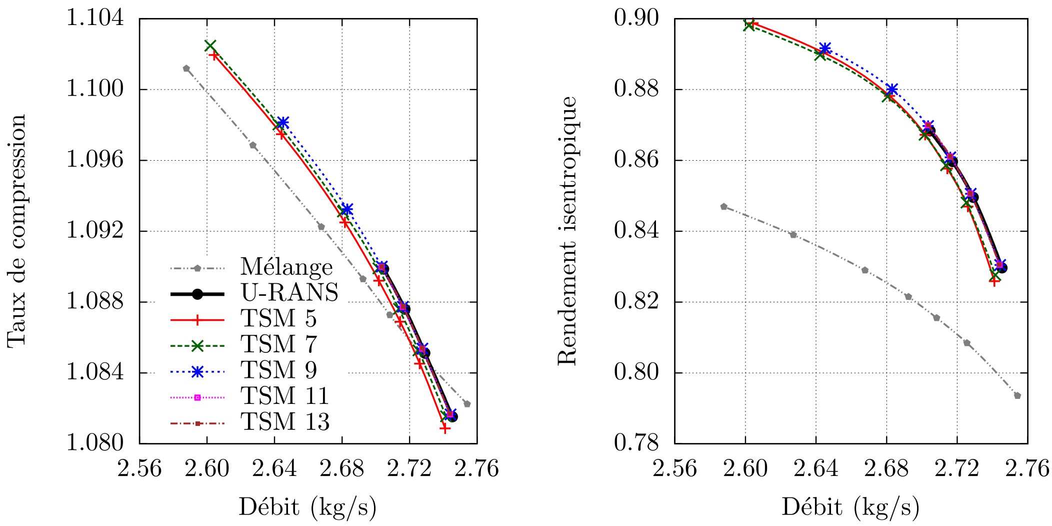
En moyennant les quantités sur une période, il est possible de tracer Fig. 9.14 les caractéristiques débit/pression et débit/rendement de la machine. Le modèle plan de mélange donne une évolution linéaire du taux de compression mais l'ordre de grandeur est proche du calcul



(a) Débit aval (b) Rendement isentropique

Figure 9.13 – Comparaison des calculs TSM et calcul U-RANS en débit en rendement.

U-RANS. Les écarts sur le rendement sont en revanche beaucoup plus importants puisqu'il peut-être sous-estimé de plus de 5 % par le modèle plan de mélange. Cela est dû aux décollements massifs observés Fig. 9.7 et démontre l'impact des phénomènes instationnaires sur les performances d'une machine. Les calculs TSM donnent une bonne estimation des courbes caractéristiques quelques soit le nombre d'instants et sont convergés à partir de 9 instants où ils sont superposés à la caractéristique du modèle U-RANS. La convergence en terme d'instants est donc plus rapide pour des quantités moyennées que pour des quantités instationnaires.



(a) Pression (b) Rendement isentropique

Figure 9.14 – Courbes caractéristiques.

La figure 9.15 montre les neuf instantanés d'un calcul TSM à $N = 4$. Chaque roue étant résolue dans son repère spatial et temporel relatif, l'écoulement n'est pas coïncident à l'interface rotor/stator. Il est néanmoins possible de reconstruire l'écoulement dans tous les canaux et à n'importe quel instant comme le montre la figure 9.16(c). L'entropie permet de repérer aisément les sillages impactant le stator aval à différent niveau. La TSM est donc bien capable de prédire efficacement le déphasage inter-aube.

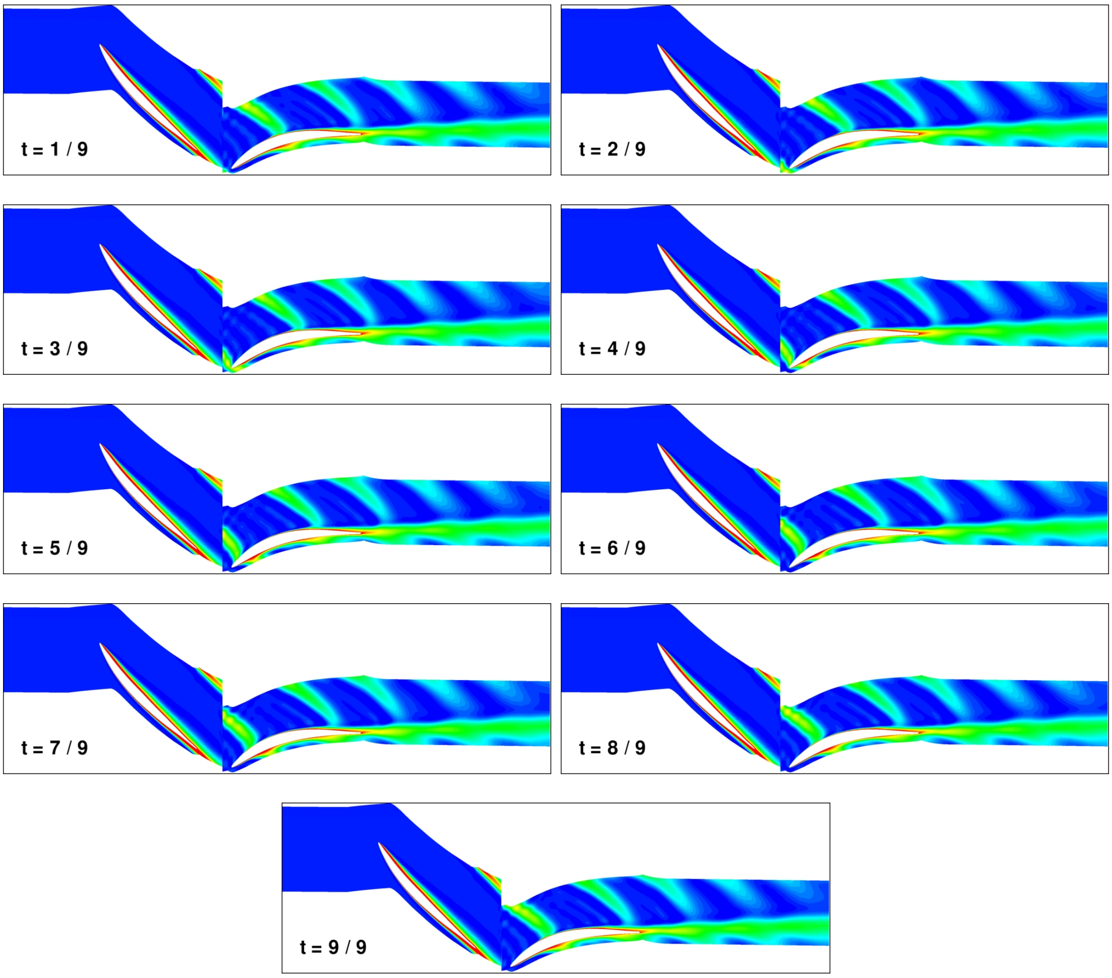


Figure 9.15 – Tranche du CME2 : calcul TSM à 9 instants, instantanés d'entropie (adimensionnée).

Les figures 9.16 à 9.19 présentent des cartographies de l'écoulement reconstruit pour chaque calcul TSM à l'instant de référence et les comparent au calcul U-RANS de référence. La simulation à cinq instants révèle des bulles d'entropie qui se détachent en aval de l'interface non-coïncidente entre les deux roues. Le zoom de la figure 9.17(b) montre bien ce comportement. Le premier découpage est bien aligné mais rapidement, les bulles dégénèrent et se dissipent. De petites bulles, de moindre ampleur, sont également présentes entre deux rangées de sillages. Ce comportement est probablement dû au terme source de la TSM et est semblable à celui observé sur la périodicité spatiale (cf. § 7.4 et Fig. 7.7). La vitesse axiale présente également de fortes distorsions dans le canal stator alors que le champ de pression semble régulier, même s'il ne semble pas parfaitement coïncident à l'interface. Le calcul TSM à sept instants améliore sensiblement les résultats. Les bulles d'entropie apparaissent toujours mais sont mieux agglomérées et forment un sillage plus régulier. De plus, les petites bulles présentes entre les sillages sont fortement réduites. La vitesse axiale dans les canaux du stator commence à être sensible au déficit de vitesse des sillages. À partir de $N = 4$, l'écoulement devient beaucoup plus lisse mis à part un peu de bruit numérique juste en aval de l'interface rotor/stator. La vitesse axiale présente bien un déficit de vitesse à l'emplacement des sillages. Le déphasage entre canaux inter-aube peut ainsi bien s'observer via cette variable. Cette observation est cohérente avec la convergence en débit de la figure 9.13. Même un calcul TSM à 15 instants présente encore un peu de bruit numérique en aval de l'interface rotor/stator (voir zoom 9.17(f)) au contraire du calcul U-RANS. Cela est dû au fait que l'interface rotor/stator mis en œuvre dans *elsA* pour le calcul U-RANS n'utilise pas de technique de maillages non-coïncidents.

Application en acoustique

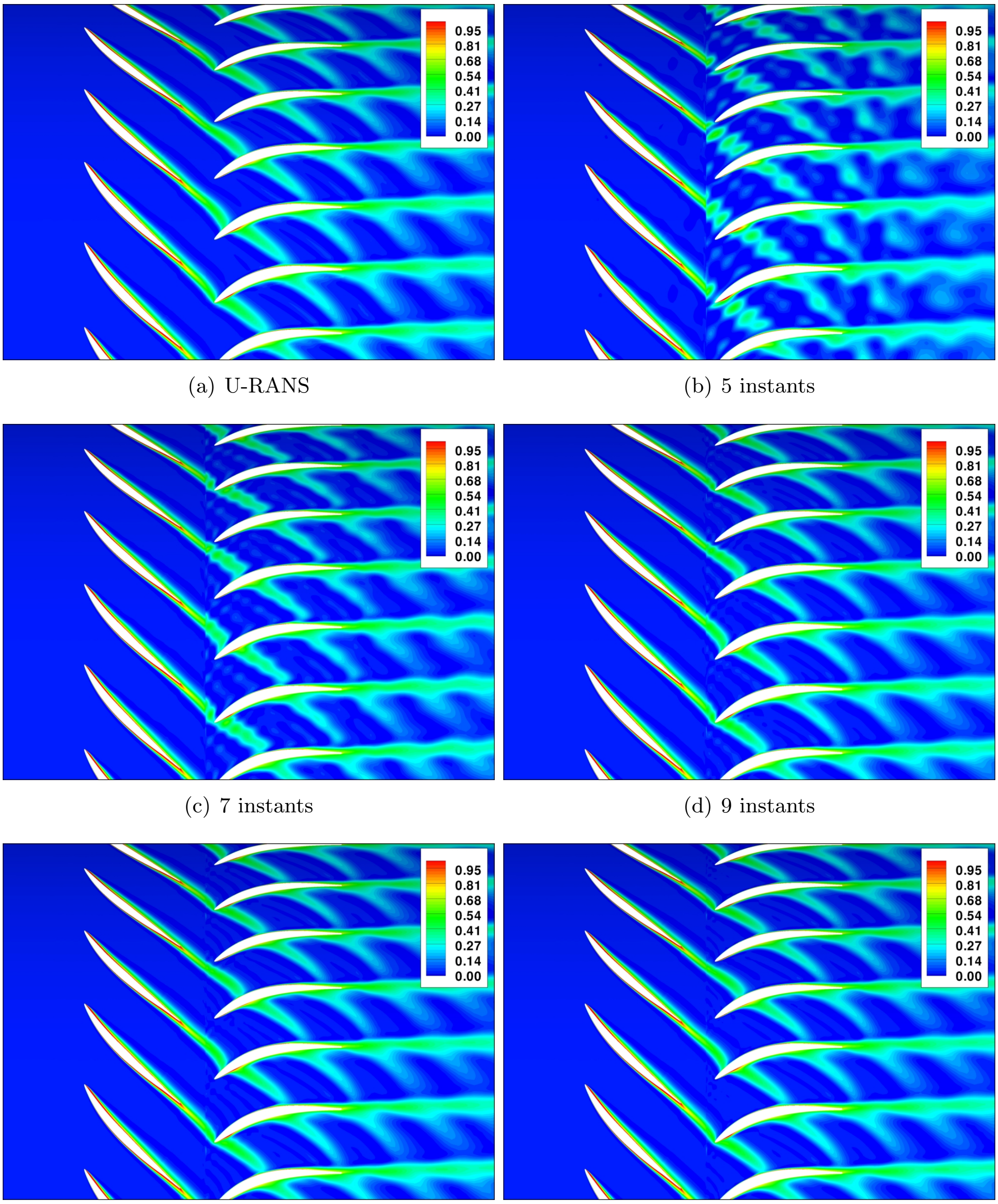
Une analyse spectrale est conduite sur la pression pariétale du stator. Cela peut servir comme source dipolaire à un code de propagation acoustique. La BPF du rotor et ses deux et troisième harmoniques sont présentées Fig. 9.20 à 9.22. En (a) se trouve une cartographie du calcul U-RANS de référence. Les instationnarités sont principalement localisées au bord d'attaque. Les résultats de calculs TSM de 7 à 13 instants sont présentés de (b) à (e). L'erreur relative est ensuite calculée en chaque point du maillage de peau et moyennée selon la norme L_2. L'erreur est ensuite tracée pour tous les calculs TSM ce qui permet de suivre la convergence.

Concernant la BPF Fig. 9.20, un calcul TSM à 5 instants donne une erreur supérieure à 7 %. Celle-ci décroît rapidement à 1,3 % avec 7 instants et passe en dessous de 1 % avec 11 instants. La convergence au deuxième harmonique (Fig. 9.21) est similaire : il faut 9 instants pour obtenir une erreur inférieure au pour-cent. Pour capturer le 3$^{\text{ème}}$ harmonique, il faut au minimum 7 instants dans la période. Ce calcul TSM donne une erreur élevée supérieure à 12 %. Onze instants sont alors nécessaires pour réduire l'erreur à 0,8 %. La convergence de grandeures locales comme le champ pariétal de pression est donc du même ordre de grandeur que précédemment : 9 instants donnent une bonne précision physique mais 11 instants sont nécessaires pour certaines quantités.

Gains

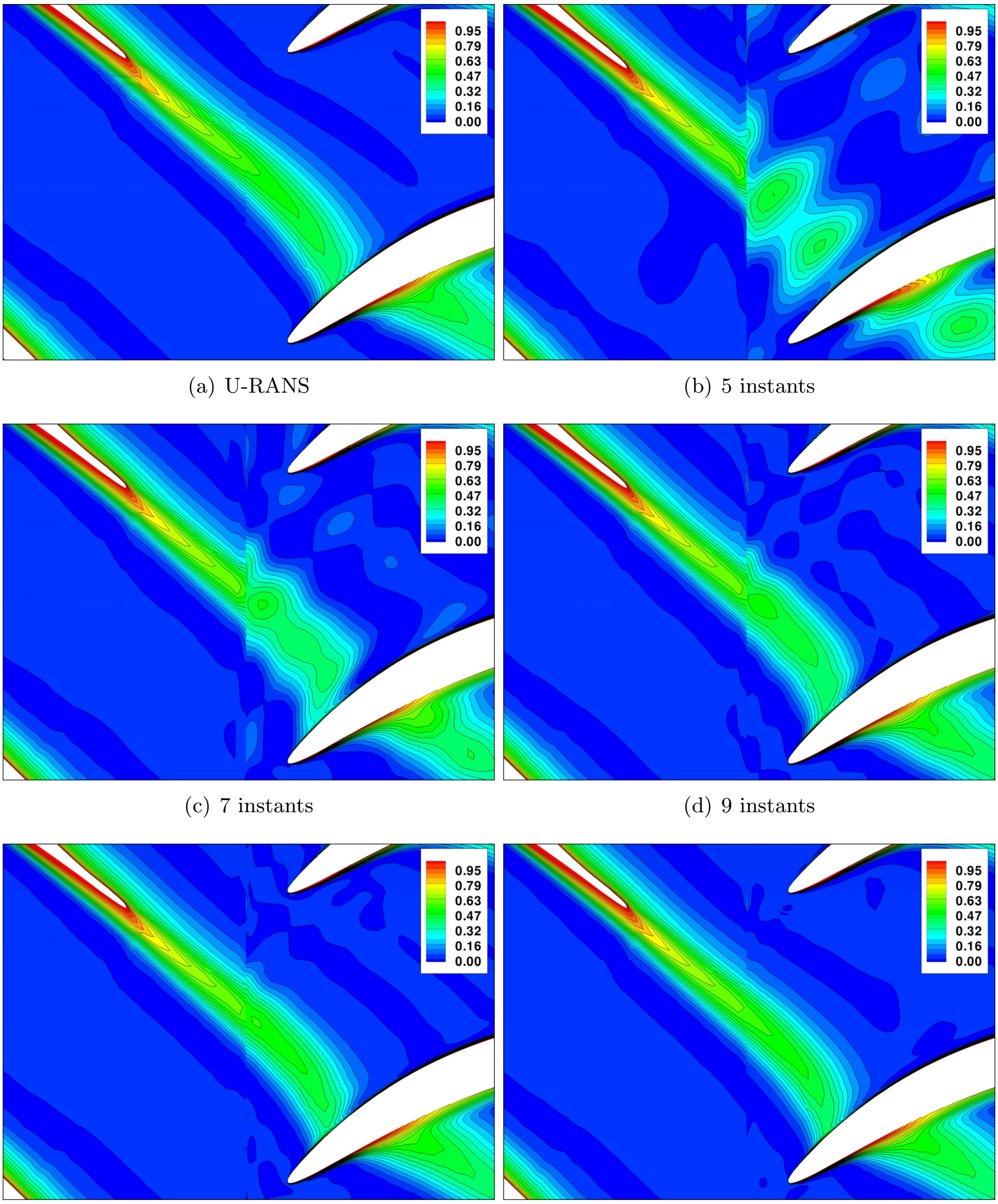
Le nombre d'instants nécessaires à la bonne convergence d'un calcul TSM semble donc plus important avec la périodicité spatio-temporelle qu'avec la périodicité spatiale seule. Il y a au moins deux raisons à ce phénomène :

1. il y a de nombreuses interpolations temporelles (déphasage aux frontières azimutales et duplication à l'interface) réalisées en périodicité spatio-temporelle qui n'existent pas en périodicité spatiale seule. Plus le nombre d'instants est élevé et plus ces interpolations sont précises. La précision semble en tout cas plus faible qu'avec une périodicité spatiale sans interpolation réalisée avec le même nombre d'instants.
2. La différence de pas angulaire entre les roues joue également en défaveur de la précision concernant l'interaction de sillage. En effet, si le pas angulaire de la roue aval est plus faible que celui de la roue amont, il peut arriver qu'à un instant donné, l'interface de la roue aval se trouve juste au milieu de deux sillages provenant de la roue amont comme schématisé Fig. 9.23. Dans cette position relative, le domaine aval, de pas angulaire plus faible, ne reçoit pas de sillage de la roue amont (en rouge). Les sillages devraient alors pénétrer par l'une ou l'autre des frontières azimutales (schématisé en bleu en provenance de la roue amont adjacente en gris). Ces sillages ne peuvent être que recréées par l'opérateur de la TSM, qui a alors besoin d'un certains nombre d'instants pour fournir une dérivée



(a) U-RANS
(b) 5 instants
(c) 7 instants
(d) 9 instants
(e) 11 instants
(f) 13 instants

Figure 9.16 – Tranche du CME2 : entropie (55 % hauteur d'aube et 75 % hauteur de tranche).



(a) U-RANS

(b) 5 instants

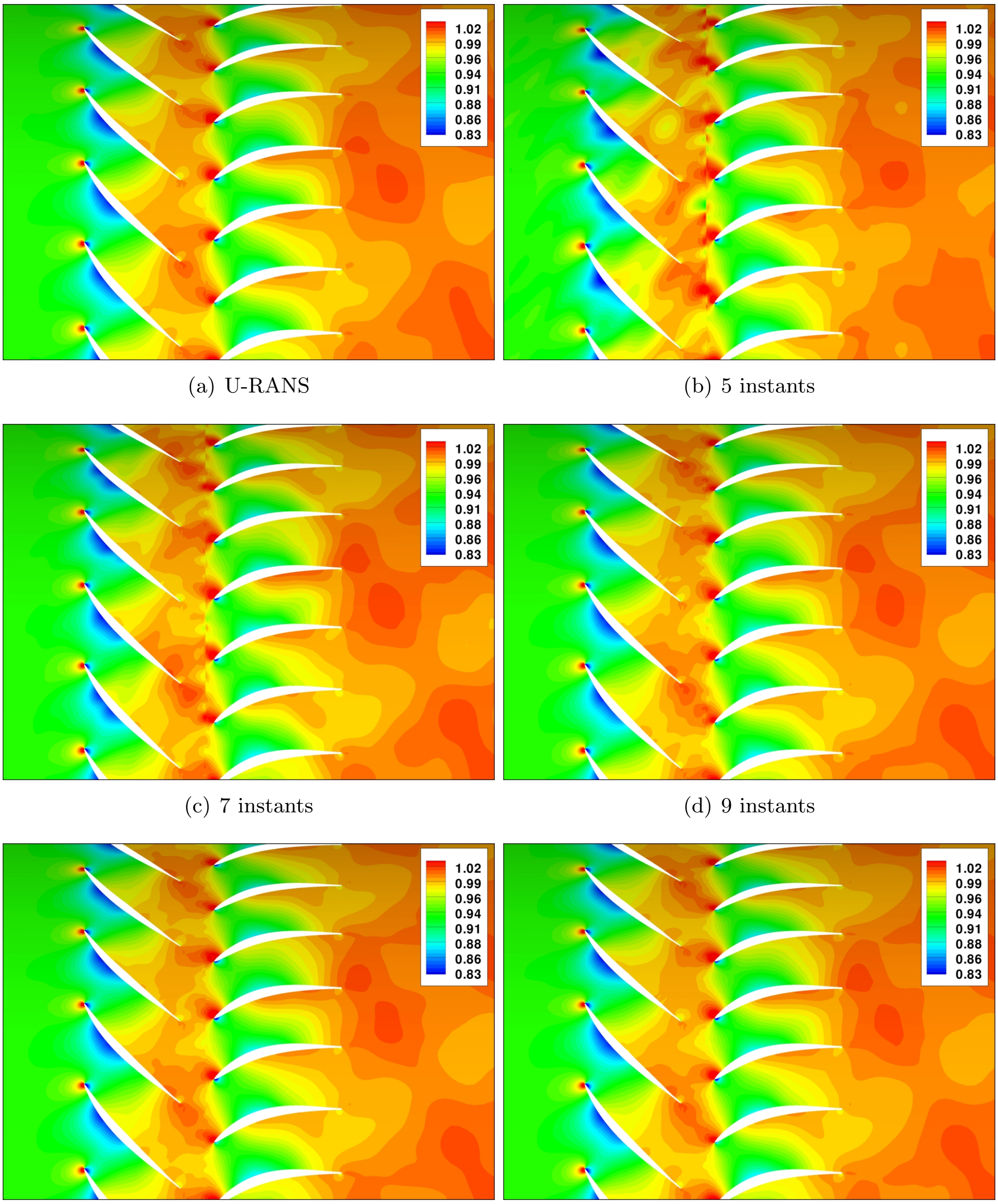
(c) 7 instants

(d) 9 instants

(e) 11 instants

(f) 15 instants

Figure 9.17 – Tranche du CME2 : entropie, zoom sur l'interface rotor/stator (55 % hauteur d'aube et 75 % hauteur de tranche).



(a) U-RANS

(b) 5 instants

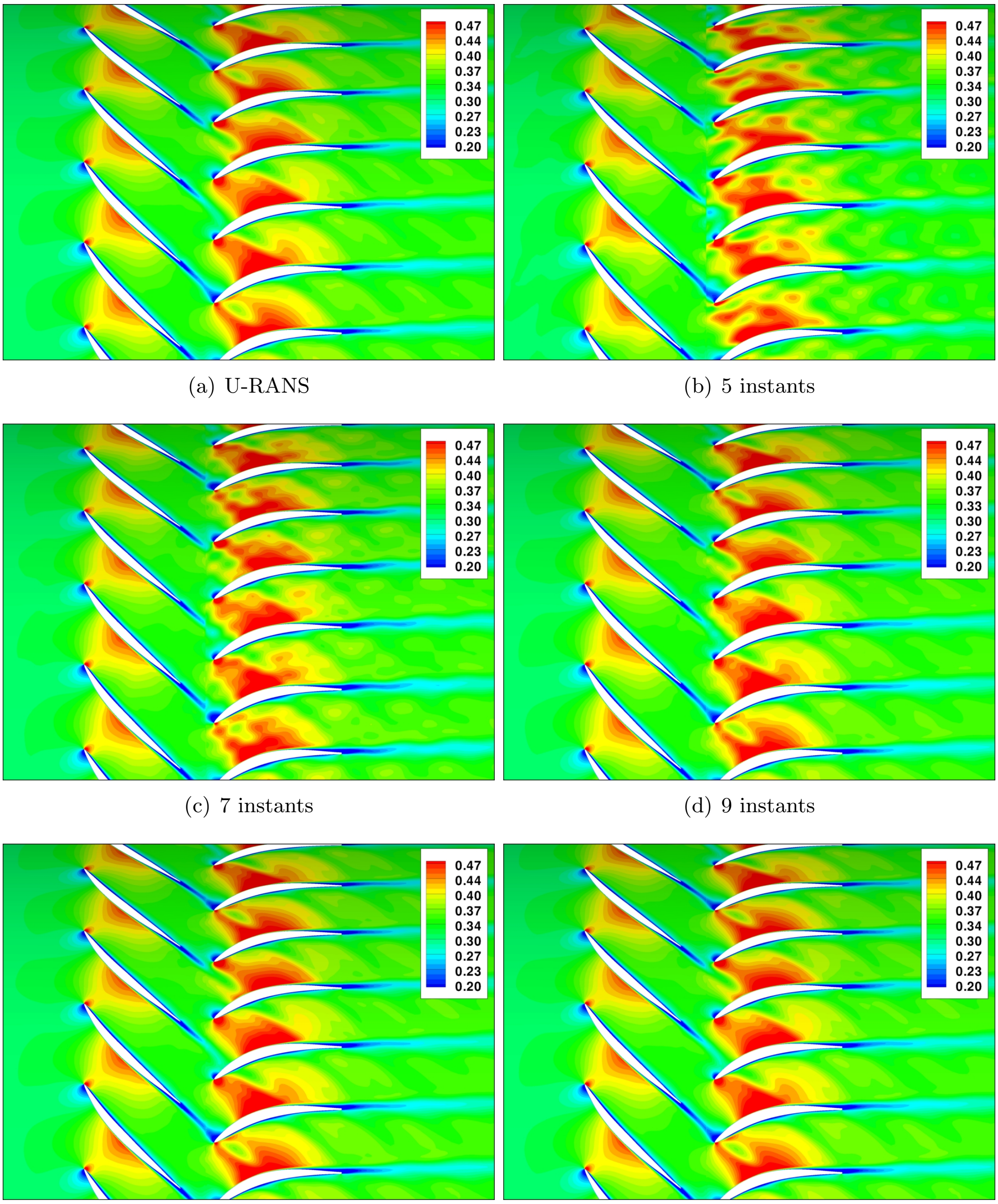
(c) 7 instants

(d) 9 instants

(e) 11 instants

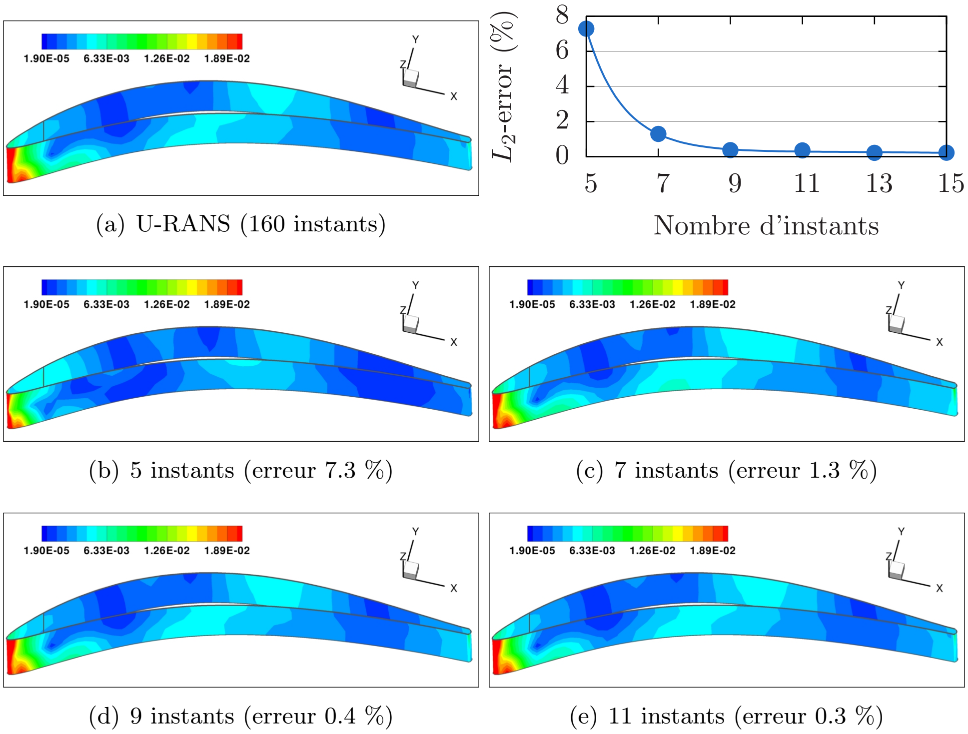
(f) 13 instants

Figure 9.18 – Tranche du CME2 : pression (55 % hauteur d'aube et 75 % hauteur de tranche).



(a) U-RANS
(b) 5 instants
(c) 7 instants
(d) 9 instants
(e) 11 instants
(f) 13 instants

Figure 9.19 – Tranche du CME2 : vitesse axiale (55 % hauteur d'aube et 75 % hauteur de tranche).



(a) U-RANS (160 instants)

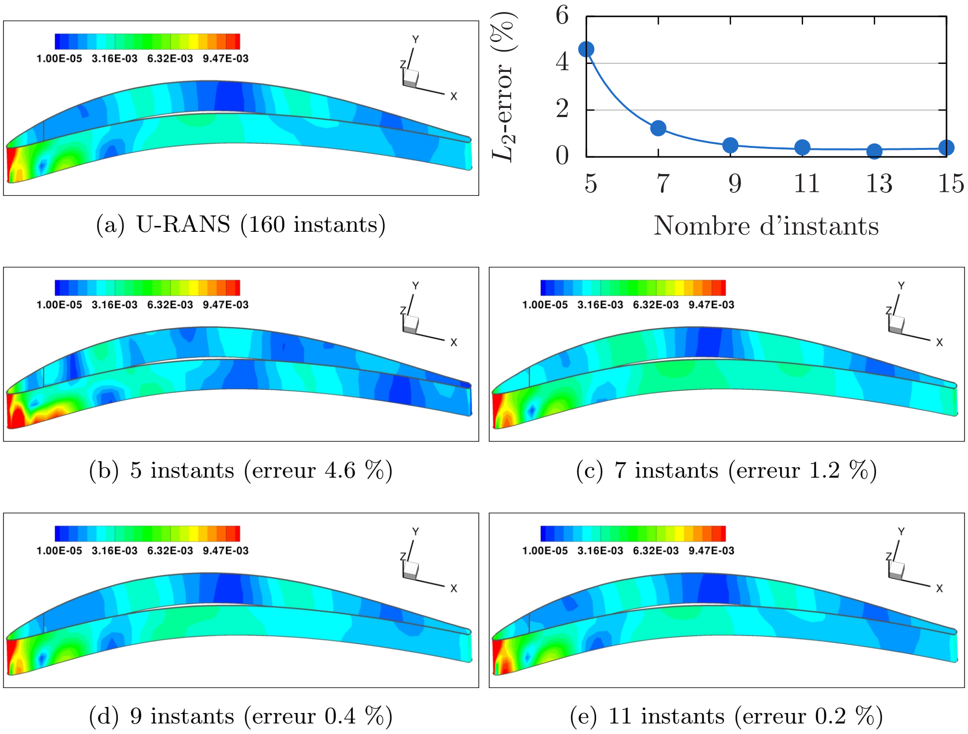
(b) 5 instants (erreur 7.3 %)

(c) 7 instants (erreur 1.3 %)

(d) 9 instants (erreur 0.4 %)

(e) 11 instants (erreur 0.3 %)

Figure 9.20 – Charge de pression sur aube stator : BPF.



(a) U-RANS (160 instants)

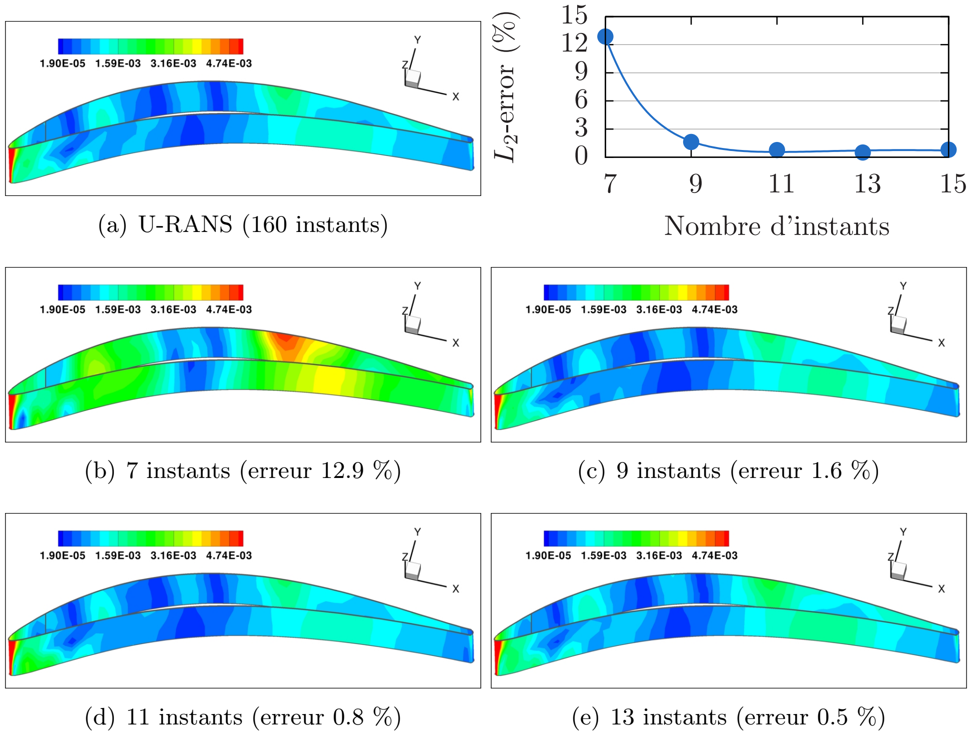
(b) 5 instants (erreur 4.6 %)

(c) 7 instants (erreur 1.2 %)

(d) 9 instants (erreur 0.4 %)

(e) 11 instants (erreur 0.2 %)

Figure 9.21 – Charge de pression sur aube stator : 2 BPF.



(a) U-RANS (160 instants)

(b) 7 instants (erreur 12.9 %)

(c) 9 instants (erreur 1.6 %)

(d) 11 instants (erreur 0.8 %)

(e) 13 instants (erreur 0.5 %)

Figure 9.22 – Charge de pression sur aube stator : 3 BPF.

temporelle correcte. En fait, plus la différence de pas angulaire est élevée entre deux roues, plus le nombre d'instants doit être élevé.

Les gains en temps de calcul de la TSM par rapport au U-RANS à périodicité spatio-temporelle et 160 instants par période sont indiqués Fig. 9.24. Le calcul TSM à trois instants ne converge pas et celui à cinq instants offre un gain supérieur à 10. L'écoulement semblant relativement bien capturé à partir de 11 instants, le gain est alors environ égal à 4.

9.4.2 Machine 3D complète

La configuration complète présente des diffcultés de convergence : du bruit numérique est généré au niveau de l'écoulement de jeu et se propage dans la veine entraînant la divergence des simulations TSM. Ce problème n'avait pas été rencontré en périodicité spatiale classique (cf. § 7.4) et n'est pas rencontré en U-RANS avec périodicité spatio-temporelle. Il est probable que la périodicité spatio-temporelle soit la cause de ce problème (le cas d'aube en vibration présenté § 8.2 ne comportait pas de jeu et ne permet de statuer avec certitude sur ce point). L'écoulement de jeu génère en effet des tourbillons (cf. § 1.2) et donc certainement plus de modes d'écoulement. Ces modes ne sont pas correctement gérés par la condition de déphasage aux frontières azimutales du domaine car la TSM dispose d'un échantillonnage temporel grossier. Le U-RANS étant beaucoup plus raffiné en temps ne rencontre pas ce problème.

Il est possible de contourner ce problème grâce à une procédure d'initialisation adéquate. Vilmin *et al.* [101] proposent par exemple de réaliser dans un premier temps un calcul à faible nombre d'harmoniques sur une grille grossière. Comme pour le multigrille, l'utilisation d'une grille grossière permet de filtrer l'écoulement. Cette première simulation est ensuite interpolée

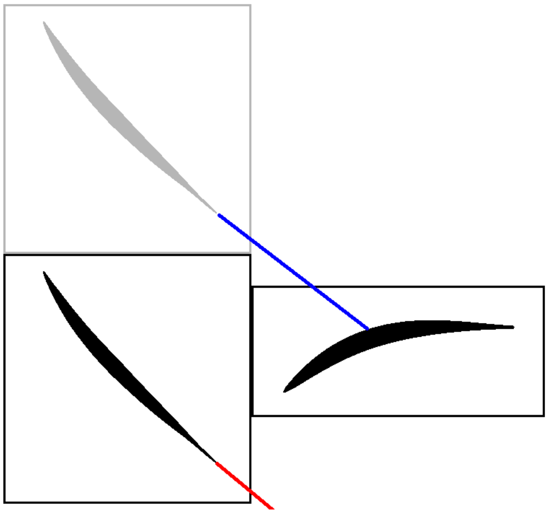


Figure 9.23 – Interface avale sans sillage.

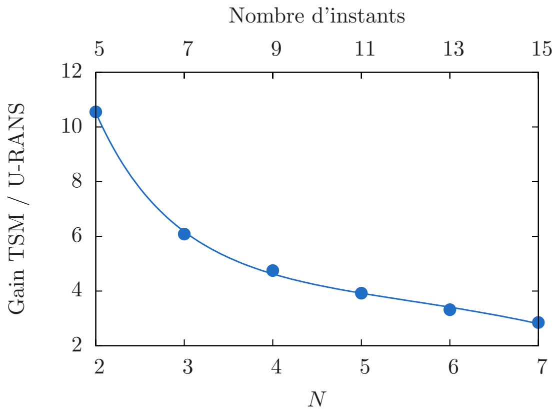
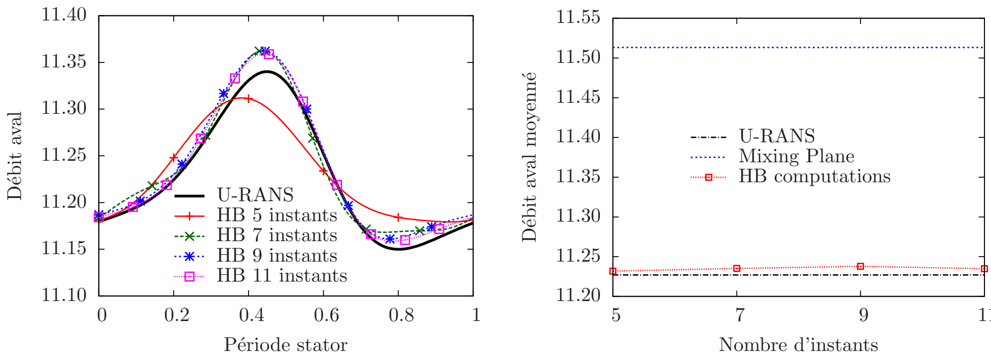


Figure 9.24 – Gain de la TSM par rapport au U-RANS.

pour fournir une condition initale correcte à une calcul à plus grande nombre d'harmoniques sur une grille plus fine. Comme le maillage utilisé dans le cas présent n'est pas compatible avec le multigrille, une autre procédure a été utilisée : la turbulence est gelée (*i.e.* le terme source de la TSM n'est plus appliquée aux grandeurs turbulente) et le CFL est baissé drastiquement (de l'ordre de deux ordres de grandeur). Une fois qu'un transitoire est dépassé (de l'ordre de quelques centaines d'itérations en pseudo-temps), les paramètres sont remis à leur valeur nominale pour poursuivre la convergence normalement.

Les débits obtenus sont présentés Fig. 9.25. En (a), le calcul TSM à 5 instants estime correctement la forme du débit aval instationnaire. La TSM est convergée dès 7 instants mais le maximum est légèrement surestimé par rapport à la simulation U-RANS. La meilleure estimation du débit moyen (b) est donné par le calcul TSM le plus grossier. L'erreur reste cependant inférieure à 15 g.s^{-1} quelque soit le nombre d'instant et bien inférieure à la différence entre le modèle plan de mélange et le modèle U-RANS.

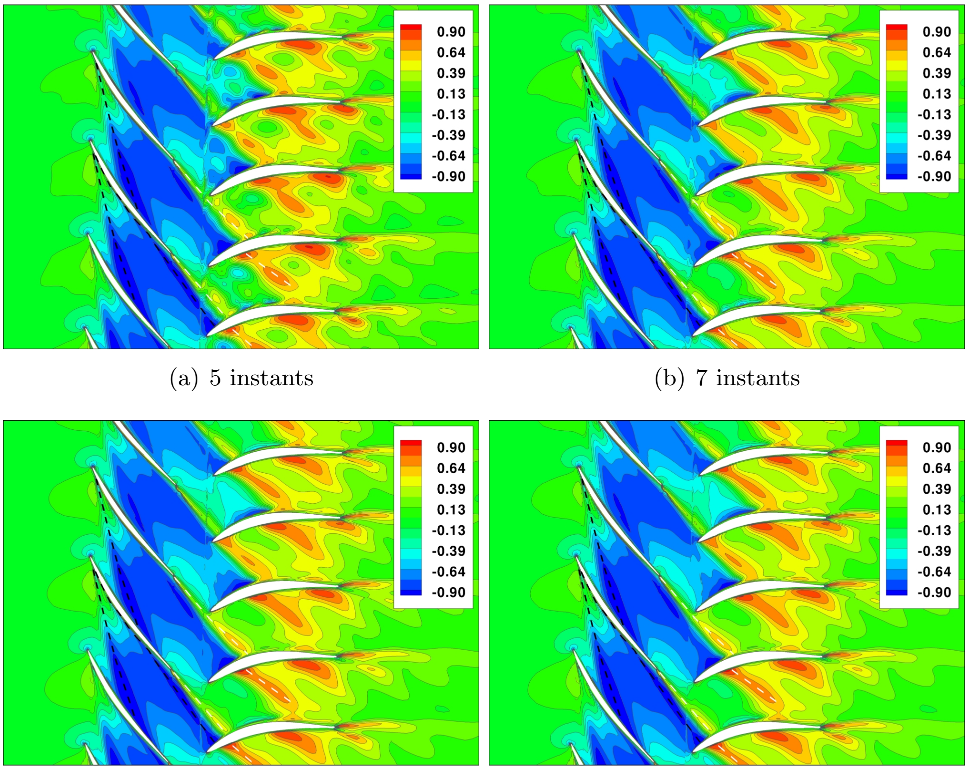


(a) Débit instationnaire (b) Moyenne temporelle

Figure 9.25 – Débit aval.

Comme le problème de convergence provenait de la zone de jeu, il est intéressant d'y observer l'écoulement à convergence. Les figures 9.26 et 9.27 présente des cartographies d'hélicité, définie comme le produit scalaire du vecteur vitesse du fluide et de son rotationnel. L'hélicité est maximale qund les deux vecteurs sont colinéaires et indique donc la présence de tourbillons. Elle est normée entre -1 et $+1$, ces deux bornes indiquant des sens de rotation opposée.

La figure 9.26 présente l'hélicité dans un plan aube à aube à 98 % de la hauteur d'aube. À la manière d'une aile d'avion, l'écoulement s'enroule en tête d'aube et un tourbillon est généré. Ce tourbillon reste le long de l'arrête extrados de l'aube. Un deuxième tourbillon est généré au bord d'attaque et vient impacter l'aube adjacente avale dans le sens de rotation. Il repasse dans le jeu de l'aube adjacente, se ré-énergise et permet au premier tourbillon de se détacher de l'arrête rotor pour venir impacter le stator aval. Les avis divergent quant à savoir s'il s'agit d'un vrai tourbillon ou seulement la trace du premier qui extrait de la vorticité de la couche limite du carter. Des tourbillons contra-rotatifs indiquent également la présence des sillages découpés par le stator aval. Si ces sillages ne sont pas suffisement résolus avec 5 instants, le schéma des tourbillons de jeu sont correctement capturé avec ce faible échantillonnage.



(a) 5 instants

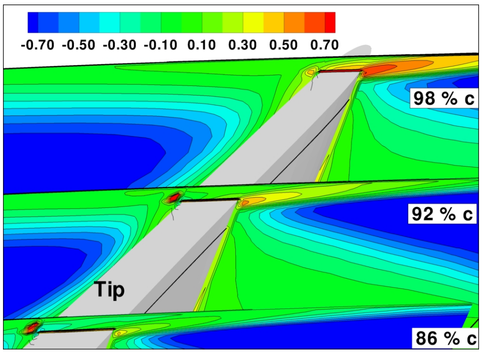
(b) 7 instants

(c) 9 instants

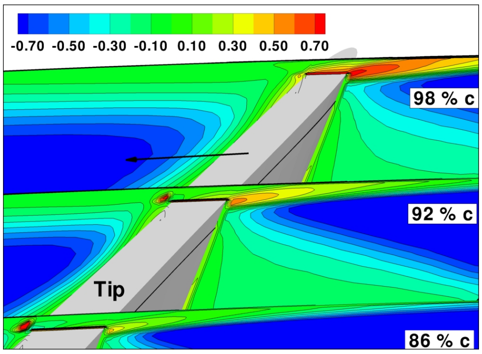
(d) 11 instants

Figure 9.26 – Helicité dans un plan aube à aube à 98 % h.

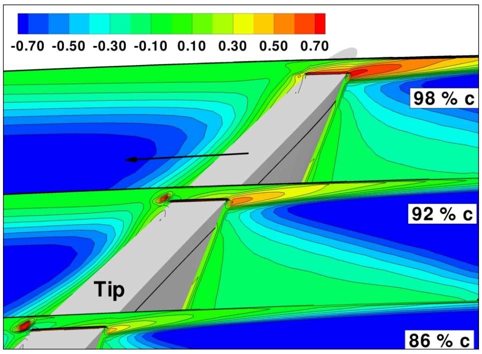
La figure 9.27 présente des coupes axiales de l'hélicité proche du bord de fuite à 86, 92 et 98 % de la corde. Le trait proche de la têt d'aube indique les 98 % d'hauteur d'aube utilisées pour les cartographies précédentes. Le tourbillon proche de l'arrête et se détachant vers 80 % de la corde est ici toujours observable. Il y a un autre tourbillon, contra-rotatif, dans les derniers 2 %, qui s'enroule en aval derrière le passage de l'aube. Les schémas de tourbillons sont bien capturés dès 5 instants et correpondent au calcul U-RANS de référence (a).



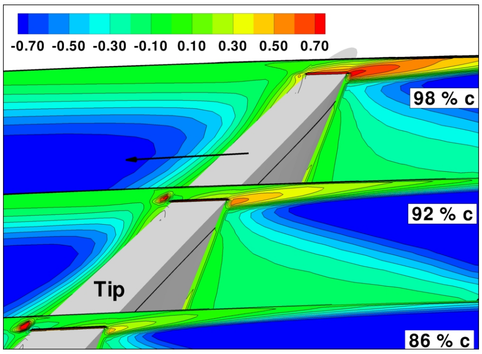
(a) U-RANS



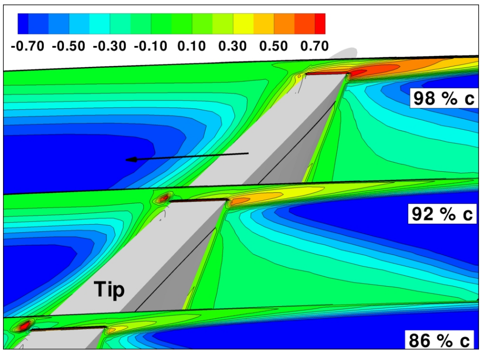
(b) 5 instants



(c) 7 instants



(d) 9 instants



(e) 11 instants

Figure 9.27 – Helicité : coupes à 86, 92, 98 % c.

Synthèse

Ce chapitre a développé la condition d'interface entre roues mobiles pour la méthode TSM. Cette interface, réalisée dans le domaine temporel, assure en fait le couplage de deux calculs TSM, un par roue (chacune étant dans son référentiel et ayant sa période propre), par le biais d'interpolation spatio-temporelles et de filtrage complexes.

Les simulations conduites sur une tranche de la machine CME2 avec la vraie géométrie ont donné un bon accord avec les calculs U-RANS de référence. Il faut pour cela un minimum de neuf instants dans une période ce qui offre un gain en temps de calcul de 5. Ce nombre d'instants est amené à être d'autant plus grand que le ratio de pas angulaire entre les deux roues s'éloigne de un.

Il est à noter que dans la littérature (Gopinath *et al.* [40] notamment), les temps de restitution de la TSM sont généralement comparés à celui d'un calcul U-RANS avec périodicité spatiale seule, obligeant à simuler une grande fraction de la roue voire la roue complète. Les gains sont alors beaucoup plus importants que ceux annoncés ici étant donné que le domaine de calcul du U-RANS est beaucoup plus grand. Les auteurs considèrent que la périodicité spatio-temporelle est un modèle supplémentaire et que même s'il est possible de réaliser un calcul U-RANS avec cette périodicité, la physique est mieux capturée avec un calcul sur la vraie géométrie et une périodicité spatiale.

Cela est particulièrement vrai pour les machines multi-étagées. Van Zante *et al.* [98] démontrent sur un cas de compresseur à cinq roues fortement chargées que les résultats fournis par des calculs U-RANS avec périodicité spatiale seule (moitié de la circonférence) et périodicité spatio-temporelle (un canal par roue) ne sont pas identiques. En effet, l'interaction entre roues ayant la même vitesse de rotation, et donc présentes dans le même référentiel, engendre des variations spatiales dans la direction circonférentielle qui sont stationnaires dans ce référentiel. Or la condition spatio-temporelle ne peut pas capturer ces interactions puisque ces roues ne sont pas en mouvement relatif l'une par rapport à l'autre. L'information est filtrée et une erreur s'accumule tout au long de la machine. Seule une simulation avec périodicité spatiale permet de capturer ces variations spatiales. Les performances globales sont faiblement impactées puisqu'un écart de 1 % est trouvé. En revanche, une analyse des modes spatiaux montre des résultats très différents entre le modèle spatial et le modèle spatio-temporel.

La comparaison entre les simulations TSM et U-RANS dépend donc fortement du modèle de périodicité choisi pour ce dernier. Nous avons fait le choix de comparer avec un calcul U-RANS spatio-temporel car il correspond à ce qui se fait de plus rapide et de plus utilisable pour le concepteur dans un environnement industriel et constitue déjà un grand gain dans l'analyse physique par rapport au modèle stationnaire avec plan de mélange. De plus, la TSM est considérée comme une nouvelle méthode d'intégration temporelle et les temps de restitution doivent être comparés pour une même modélisation (spatio-temporelle) de l'écoulement.

Conclusions et perspectives

Rappel du contexte et des objectifs

Les performances exigées des aéronefs et des moteurs d'avions ne cessant de croître, les concepteurs ne peuvent plus se baser uniquement sur des simulations d'écoulements stationnaires. Les méthodes instationnaires classiques sont cependant encore trop coûteuses pour être utilisées quotidiennement dans l'industrie. Cette étude a restreint le champ d'investigation aux écoulements périodiques en temps. De nombreuses applications d'intérêt industriel sont en effet périodiques. L'objectif principal était de simuler plus efficacement les écoulements générés par un mouvement forcé périodique, et en particulier les écoulements internes aux turbomachines.

Conclusions

Pour cela, une méthode de simulation dédiée aux écoulements instationnaires périodiques en temps dont la fréquence est connue *a priori*, la Time Spetral Method (TSM), a été étudiée. Elle utilise une représentation de Fourier pour tirer partie de la périodicité temporelle. Elle transforme ainsi les équations du modèle U-RANS en un ensemble de calculs d'écoulements stationnaires couplés. Ces problèmes stationnaires, résolus simultanément, bénéficient des techniques classiques d'accélération de convergence comme le pas de temps local et le multi-grille. De plus, des algorithmes implicites ont été développés afin de rendre la méthode plus robuste et accélérer encore la convergence des calculs. Ainsi, la TSM atteint directement un état périodique sans passer par un transitoire instationnaire coûteux en terme de temps de calcul. En contrepartie, son occupation en mémoire est plus importante puisque plusieurs instants de l'écoulement sont résolus simultanément. La méthode a également été adaptée à une formulation lagrangienne/eulérienne arbitraire (ALE) pour des applications en aéroélasticité.

Les premières applications en aérodynamique externe ont donné des résultats encourageants : d'une part, un calcul TSM à trois instants restitue une meilleure physique d'écoulement que les méthodes de linéarisation (LUR) pour un temps de restitution proche. D'autre part, la TSM a un temps de restitution plus faible que le U-RANS pour une physique restituée similaire. La TSM est donc plus efficace que les modèles LUR et U-RANS.

La motivation principale de cette étude consistait à simuler les écoulements internes en turbomachine. La TSM a été adaptée à la périodicité spatiale simple et la périodicité spatio-temporelle. La première a été validée sur une géométrie modifiée du compresseur CME2 et une application de traitement de carter. Les interactions instationnaires ont bien été capturées et les gains de temps de calcul ont également été significatifs. La prise en compte de la périodicité spatio-temporelle, couplée à l'approche ALE, a permis de traiter le cas d'une roue isolée dont les aubes vibrent selon le même mode mais déphasées. La TSM s'est montrée plus robuste que les calculs U-RANS et devient donc d'autant plus efficace que le modèle U-RANS doit passer un long transitoire. Enfin, l'interaction entre deux roues mobiles nécessitait le couplage de deux calculs TSM, un par roue. Ce couplage requiert des interpolations complexes en temps et en espace et a permis de réaliser un calcul rotor/stator sur la vraie géométrie du CME2.

Au final, la TSM parvient à restituer une physique d'écoulement réaliste en un temps de calcul 4 à 10 fois plus court que les méthodes instationnaires classiques. Cette étude a permis de montrer que le nombre d'instants requis par la TSM pour simuler correctement un écoulement dépend des applications. Ainsi en aérodynamique externe, trois ou cinq instants suffisent alors qu'en turbomachine, il en faut au moins sept ou neuf. De plus, pour une application donnée, la convergence n'est pas la même selon la quantité que l'on désire étudier. En turbomachine par exemple, le débit aval converge généralement plus vite que le débit amont qui lui même converge plus vite que le rendement. Il convient donc à chaque domaine d'applications de définir l'usage qui est fait de la TSM. Cette étude l'a déjà réalisé pour des application en aérodynamique externe et interne. La méthode adaptative de Maple *et al.* [64] (cf. § 4.4.1.4) permettrait de s'affranchir de cette étape de maturation. Si les perspectives d'emplois et d'évolutions de la méthode sont nombreuses et prometteuses, elles nécessiteront cependant une validation propre.

Perspectives

Techniques de maillage

La compatibilité de la TSM avec la technique Chimère (décrite § 3.1.1) n'est pas immédiate. Si le mouvement est rigide, *i.e.* les maillages recouvrant ne sont pas mobiles l'un par rapport à l'autre, la TSM peut être appliquée sans problème particulier. Si les maillages recouvrant sont mobiles, comme par exemple le mouvement périodique d'un aileron, alors certains points du domaine de calcul seront masqués dans la structure à certains instants et présent dans le fluide à d'autre instants, ce qui pose de sérieux problèmes à la TSM et son opérateur de couplage temporel. Les avantages procurés par la technique Chimère étant indéniables, cela vaut qu'on s'y intéresse. Soucy et Nadarajah [86] ont développé une compatibilité pour la méthode NLFD présentée § 4.3.1. Custer *et al.* [19] et le Cerfacs notamment y travaillent.

Aérodynamique externe

Les avions ne volent pas dans un flux d'air uniforme et rencontrent en permanence des variations de vitesse et de direction du vent relatif dont certaines peuvent être qualifiées de rafales. Une rafale induit un changement brusque de l'incidence de l'avion. En conséquence, la certification des avions nécessite de connaître la réponse de l'aéronef à certains types précis de rafales de vent (voir Raveh [77], Zaide et Raveh [108]). Comme il est difficile d'expérimenter toutes les rafales pendant les essais en vol, le constructeur a recours à la simulation numérique. La stratégie consiste à calculer la réponse de l'aéronef à certaines rafales harmoniques pour ensuite reconstituer n'importe quelle rafale plus complexe à l'aide de séries de Fourier. La TSM peut très bien fournir une réponse fiable et rapide à cette problématique.

Afin de satisfaire les recommandations de l'ACARE, présentées en introduction, une ancienne technologie est remise au goût du jour : les hélices contra-rotatives non-carénées (ou

CROR pour Counter-Rotating Open Rotor). Par exemple, l'Antonov 70 (Fig. 1(a)) dispose de quatre CROR et a effectué son premier vol en 1994. Le principal avantage de cette configuration réside dans le taux de dilution qui est proche de 30 ou 40 (à comparer à 10 pour les moteurs civils actuels). Les CROR consommeraient ainsi 30 % de carburant en moins que les moteurs actuellement en service. Il s'agit donc d'un bon candidat pour la motorisation des avions court et moyen courrier à l'horizon 2020. En conséquence, il existe de grands projets de recherche autour de cette technologie comme en témoigne les projets de CFM et Rolls-Royce (Fig. 1(b) et (c)). Le premier vient avec les hélices situées à l'arrière du moteur, directement autour de la turbine, et donc en aval du pylône reliant le moteur au fuselage. Le second place les hélices à l'avant du moteur avec les entrées d'air du compresseur situées juste derrière. La TSM présentée dans cette étude ne se limite pas aux interactions rotor/stator. Les équations dérivées précédemment s'appliquent à n'importe quelle vitesse de rotation des roues. À ce titre, elle pourrait être très utile dans le calcul des performances des CROR.

(a) Antonov An-70 (b) Projet CFM (c) Projet Rolls-Royce

Figure 1 – Exemples de CROR.

Aérodynamique interne

La TSM se limite aux fréquences dominantes de l'écoulement à savoir la BPF de la roue opposée et ses harmoniques. Elle ne peut donc pas simuler une large gamme de configurations, notamment les machines multi-étagées. Les prochains développements qui seront mis en œuvre dans *elsA* sont donc ceux présentés § 4.4.2. Les variables de l'écoulement sont projetées sur une base de fonctions harmoniques dont les fréquences ne sont pas nécessairement multiples entre elles. La période globale de l'écoulement, plus petit commun multiple des périodes de base, étant généralement trop longue, l'échantillonnage temporel est réalisé sur une durée plus courte pendant laquelle l'écoulement est en réalité apériodique. Afin de différencier les deux méthodes, la TSM étendue aux multi-fréquentiels est nommée « Harmonique Balance Technique (HBT) ». La HBT va permettre d'étudier des interactions rotor/stator plus complexes entre étages comme le « clocking », qui désigne la position relative de roues tournant à la même vitesse. He *et al.* [49] ont déjà réalisé une étude de ce type en utilisant une méthode similaire dans le domaine fréquentiel.

Aéroélasticité

En aéroélasticité, la TSM a déjà fait ses preuves en mouvement forcé. Il est également possible de l'employer dans une simulation de couplage fort entre le fluide et la structure. Cette dernière peut en effet être résolue par une méthode d'équilibrage harmonique (Kryloff et

Boboliuboff [58]). Les instants considérés par le fluide et par la structure sont identiques ce qui permet de minimiser l'énergie introduite dans le système par une approche décalée classique. Ce couplage peut ainsi servir à la prédiction des cycles limites et de la frontière de flottement. Enfin, les applications en aéroélasticité ne seront plus limitées à une roue isolée car la HBT permettra de capturer la fréquence de vibration de l'aube et la BPF d'une roue adjacente par exemple.

Aéro-acoustique

L'un des problèmes majeurs des turboréacteurs et des CROR est la propagation du bruit. Même carénées, les turbomachines présentes dans un turboréacteur rayonnent du bruit vers l'extérieur. Il s'agit d'une propagation en conduit qui ressort par l'entrée et la sortie du moteur. La directivité est donc particulière. La figure 2 recense les différents types de bruits rencontrés en turbomachine. On y distingue surtout un bruit large bande et un bruit de raies caractéristique lié à la BPF des roues. La TSM capture un spectre discret par nature, elle est toute désignée pour estimer l'intensité et la directivité de ce bruit. Des analogies acoustiques comme Ffowcs Williams et Hawkings [32] permettent d'estimer le bruit généré par un écoulement. Des études concernant la capacité de la TSM à correctement prédire le bruit de raies ont déjà débuté (Sicot *et al.* [82]) et continueront à être développées. Il existe également une approche stochastique, la méthode « Stochastic Noise Generation and Radiation (SNGR) », développée notamment par Bailly *et al.* [4], qui permet d'estimer le bruit large bande à partir du spectre turbulent, *i.e.* les équations de transport de quantités turbulentes, typiquement k et ε. Les comportements de la TSM et de SNGR pourraient également être analysés.

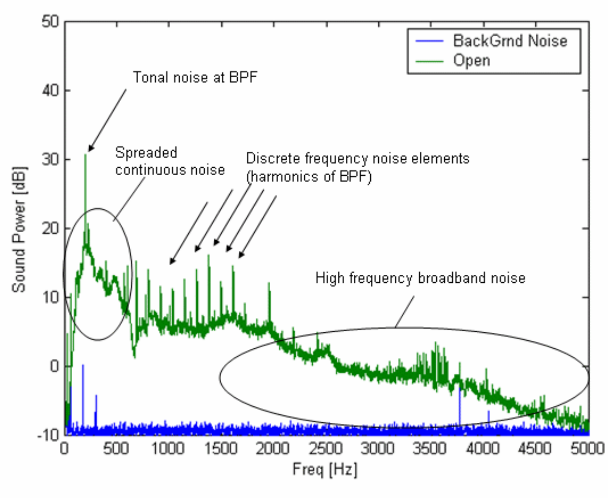


Figure 2 – Types de bruits rencontrés en turbomachines (GFDL).

Bibliographie

[1] P. Argüelles, J. Lumsden, M. Bischoff, D. Ranque, P. Busquin, S. Rasmussen, B. A. C. Droste, P. Reutlinger, R. Evans, R. Robins, W. Kröll, H. Terho, J.-L. Lagardère, A. Wittlöv et A. Lina : European Aeronautics : A Vision for 2020. Advisory Council for Aeronautics Research in Europe, janvier 2001. Cité p. 1

[2] D. Arnaud : *Analyse expérimentale des phénomènes instationnaires dans un compresseur multi-étages à forte charge aérodynamique.* Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2003. Cité p. 165

[3] A. Arnone et R. Pacciani : Rotor-Stator Interaction Analysis Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method. *Journal of Turbomachinery*, 118(4):679–689, octobre 1996. Cité p. 18

[4] C. Bailly, Ph. Lafon et S. Candel : Une approche stochastique pour le modélisation du bruit des écoulements turbulents. *Journal de Physique IV*, 4(2):935–938, 1994. Cité p. 134

[5] M. A. Bakhle et T. S. R. Reddy : Harmonic Balance Computations of Fan Aeroelastic Stability. *In Internation Forum on Aeroelasticity and Structure Dynamic*, Seattle (USA), juin 2009. IFASD-2009-101. Cité p. 104

[6] M. A. Bakhle, T. S. R. Reddy et G. L. Stefko : Comparisons of Flutter Analyses for an Experimental Fan. *In 19th International Symposium on Air-Breathing Engines*, Montreal (Canada), septembre 2009. ISABE-2009-16. Cité p. 104

[7] B. S. Baldwin et H. Lomax : Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent flows. *In 16th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, Huntsville (USA), janvier 1978. AIAA Paper 78-257. Cité p. 14, 35

[8] J. A. Benek, P. G. Buning et J. L. Steger : A 3-D Chimera Grid Embedding Technique. *In 7th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, Cincinnati (USA), 1985. AIAA Paper 85-1523. Cité p. 22

[9] A. Brandt : Multi-Level Adaptive Solutions to Boundary-Value Problems. *Mathematics of Computation*, 31(138):333–390, avril 1977. Cité p. 24

[10] V. Brost, A. Ruprecht et M. Maihöfer : Rotor-Stator Interactions in an Axial Turbine, A Comparison of Transient and Steady State Frozen Rotor Simulations. *In Conference on Case Studies in Hydraulic Systems - CSHS03*, Belgrade (Serbie), 2003. Cité p. 16

[11] S. Buis, A. Piacentini et D. Déclat : PALM : a Computational Framework for Assembling High-Performance Computing Applications. *Concurrency and Computation : Practice and Experience*, 18(2):231–245, février 2008. Cité p. 57

[12] S. Callot : *Analyse des mécanismes macroscopiques produits par les interactions rotor/stator dans les turbomachines.* Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2002. Cité p. 7, 11

[13] L. Cambier et J. Veuillot : Status of the elsA Software for Flow Simulation and Multi-Disciplinary Applications. *In 46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno (USA), janvier 2008. AIAA Paper 2008-0664. Cité p. 27, 155

[14] P. C. Chen : Damping Pertubation Method for Flutter Solution : The g-Method. *AIAA Journal*, 38(9), septembre 2000. Cité p. 98

[15] T. Chen, P. Vasanthakumar et L. He : Analysis of Unsteady Blade Row Interaction Using Nonlinear Harmonic Approach. *Journal of Propulsion and Power*, 17(3):651–658, 2001. Cité p. 36

[16] J. Cortial et C. Farhat : A time-Parallel Implicit Methodology for the Near-Real-Time Solution of Systems of Linear Oscillators. *In* L. Biegler, O. Ghattas, M. Heinkenschloss, D. Keyes et B. van Bloemen Wanders, éditeurs : *Real-Time PDE-Constrained Optimization.* Springer, 2006. Cité p. 48

[17] J. Cortial et C. Farhat : A Time-Parallel Implicit Method for Accelerating the Solution of Nonlinear Structural Dynamics Problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77(4):451–470, janvier 2009. Cité p. 48

[18] V. Couaillier : Effective multidimensional non reflective boundary condition for CFD calculations applied to turboengine aeroacoustics prediction. *In 17th International Symposium on Air Breathing Engine*, Munich (Allemagne), septembre 2005. ISABE Paper 2005-1185. Cité p. 85

[19] C. H. Custer, J. P. Thomas, E. H. Dowell et K. C. Hall : Modeling Nonlinear Unsteady Aerodynamics Using a Harmonic Balance Solution Technique Implemented about OVERFLOW. *In 9th Symposium on overset Composite Grid and Solution Technology*, Penn State University (USA), octobre 2008. Cité p. 56, 75, 132

[20] I. J. Day : Stall and Surge in Axial Flow Compressors. *In VKI Axial Flow Compressors*, volume 1 de *VKI Lecture Series*, pages C1–C21. Von Kármán Institute for Fluid Dynamics, Rhode-St-Genèse (Belgique), 1992. Cité p. 11

[21] J. Delbove : *Contribution aux outils de simulation aéroélastique des aéronefs : prédiction du flottement et déformation statique des voilures.* Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 2005. Cité p. 64, 158

[22] J. D. Denton et U. K. Singh : Time Marching Methods for Turbomachinery Flow Calculation. *In* E. Schmidt, éditeur : *Application of Numerical Methods to Flow Calculations in Turbomachines*, VKI Lecture Series. Von Kármán Institute for Fluid Dynamics, Rhode-St-Genèse (Belgique), 1979. Cité p. 15

[23] G. Dimitriadis : Continuation of High-Order Harmonic Balance Solutions for Nonlinear Aeroelastic Systems. *Journal of Aircraft*, 45(2):523–537, mars-avril 2008. Cité p. 46

[24] J. Donea, A. Huerta, J.-Ph. Ponthot et A. Rodríguez-Ferran : *Encyclopedia of Computational Mechanics*, volume 1, chapitre 14 - Arbitrary Lagrangian–Eulerian Methods. Wiley, octobre 2004. Cité p. 65, 70

[25] G. Dufour, F. Sicot, G. Puigt, C. Liauzun et A. Dugeai : Oscillating-Flap Simulations with the Time-Spectral and Linearized Methods. *soumis à l'AIAA Journal*, janvier 2009. Cité p. 47, 71

[26] K. Ekici et K. C. Hall : Nonlinear Analysis of Unsteady Flows in Multistage Turmachines Using the Harmonique Balance Technique. *AIAA Journal*, 45(5):1047–1057, mai 2007. AIAA Paper 2006-422. Cité p. 45, 109, 112

[27] K. Ekici et K. C. Hall : Nonlinear Frequency-Domain Analysis of Unsteady Flows in Turmachinery with Multiple Excitation Frequencies. *AIAA Journal*, 46(8):1912–1920, août 2008. AIAA Paper 2006-2995. Cité p. 45

[28] J. I. Erdos, E. Alznert et W. McNally : Numerical Solution of Periodic Transonic Flow through a Fan Stage. *AIAA Journal*, 15(11):1559–1568, novembre 1977. Cité p. 18, 95, 96

[29] K. Eriksson, D. Estep, P. Hansbo et C. Johnson : *Computational Differential Equations*. Cambridge University Press and Studentlitteratur, 1996. Cité p. 21

[30] A. Ern : La méthode de galerkine discontinue. *In École de printemps de mécanique des fluides numérique*, Roscoff, juin 2007. Cité p. 21

[31] C. Farhat et M. Chandesris : Time-decomposed Parallel Time-integrators – part I : Theory and Feasability Studies for Fluid, Structure and Fluid-structure Applications. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 58(9):1397–1434, 2003. Cité p. 48

[32] J. E. Ffowcs Williams et D. L. Hawkings : Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, A264(1151):321–342, mai 1969. Cité p. 87, 134

[33] T. Fransson et C. H. Sieverding : Aeroelasticity in axial flow turbomachines. *In VKI Lecture Series*. van Kármán Institute for Fluid Dynamics, 1999. Cité p. 9

[34] G. A. Gerolymos et V. Chapin : Expression généralisée de la périodicité chorochronique dans l'interaction entre aubages de turbomachines. *La Recherche aérospatiale*, 5:69–73, septembre-octobre 1991. Cité p. 18, 108, 109

[35] J. W. Gibbs : Fourier Series. *Nature*, 59(200 et 606), 1899. Cité p. 39

[36] M. B. Giles : Calculation of Unsteady Wake/Rotor Interaction. *Journal of Propulsion and Power*, 4(4):356–362, 1988. Cité p. 96

[37] R. Gilmore et M. B. Steer : Nonlinear Circuit Analysis Using the Method of Harmonic Balance - A review of the Art. Part I - Introductory Concepts. *International Journal on Microwave and Millimeter Wave Computer Aided Engineering*, 1(1), 1991. Cité p. 3, 31, 44

[38] A. Gopinath et A. Jameson : Time Spectral Method for Periodic Unsteady Computations over Two- and Three- Dimensional Bodies. *In 43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno (USA), janvier 2005. AIAA Paper 2005-1220. Cité p. 3, 40, 41, 46, 148, 149

[39] A. Gopinath et A. Jameson : Application of the Time Spectral Method to Periodic Unsteady Vortex Shedding. *In 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno (USA), janvier 2006. AIAA Paper 2006-0449. Cité p. 44, 148

[40] A. Gopinath, E. van der Weide, J. J. Alonso, A. Jameson, K. Ekici et K. C. Hall : Three-Dimensional Unsteady Multi-Stage Turbomachinery Simulations using the Harmonic Balance Technique. *In 45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno (USA), janvier 2007. AIAA Paper 2007-0892. Cité p. 45, 46, 97, 109, 112, 129, 148

[41] N. Gourdain : *Simulation numérique des phénomènes de décollement tournant dans les compresseurs axiaux.* Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2005. Cité p. 17

[42] V. Gravemeier : Current Methods for the Numerical Simulation of Turbulent Flows. *CADFEM Infoplaner*, 1:44–45, 2007. Cité p. 14, 15

[43] K. C. Hall : *A linearized Euler analysis of unsteady flows in turbomachinery (GTL report No.190).* Massachusetts Institut of technology, Cambridge (USA), 1987. Cité p. 31

[44] K. C. Hall, C. B. Lorence et W. S. Clark : Nonreflecting Boundary Conditions for Linearizes Unsteady Aerodynamic Calculations. *In 31st AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno (USA), janvier 1993. AIAA Paper 93-0882. Cité p. 109

[45] K. C. Hall, J. P. Thomas et W. S. Clark : Computation of Unsteady Nonlinear Flows in Cascades using a Harmonic Balance Technique. *AIAA Journal*, 40(5):879–886, mai 2002. Cité p. 3, 39, 46, 104, 148, 150

[46] K. C. Hall, J. P. Thomas, K. Ekici et D. M. Voytovich : Frequency Domain Techniques for Complex and Nonlinear Flows in Turbomachinery. *In 33rd AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit*, Orlando (USA), juin 2003. AIAA Paper 2003-3998. Cité p. 148

[47] L. He : An Euler Solution for Unsteady Flows around Oscillating Blades. *Journal of Turbomachinery*, 112(4):714–722, octobre 1990. Cité p. 97, 101, 114

[48] L. He : Time-Marching Calculations of Unsteady Flows, Blade Row Interaction and Flutter. *In Unsteady Flows in Turbomahines*, VKI Lecture Series, pages 28–75. Von Kármán Institute for Fluid Dynamics, Rhode-St-Genèse (Belgique), 1996. Cité p. 17

[49] L. He, T. Che, R. G. Wells, Y. S. Li et W. Ning : Analysis of Rotor-Rotor and Stator-Stator Interferences in Multi-Stage Turbomachineries. *Journal of Turbomachinery*, 124: 564–571, octobre 2002. Cité p. 38, 133

[50] L. He et W. Ning : Efficient Approach for Analysis of Unsteady Viscous Flows in Turbomachines. *AIAA Journal*, 36(11):2005–2012, novembre 1998. Cité p. 3, 34, 35, 38

[51] M. Hembera, A. Loos, A. Kührmann, F. Danner, H.-P. Kau et E. Johann : Validation of the Non-Linear Harmonic Approach for Quasi-Unsteady Simulations in Turbomachinery. *In ASME Turbo Expo 2009*, Orlando (USA), juin 2009. GT2009-59647. Cité p. 39

[52] C. A. Irwin et P. R. Guyett : The Subcritical Response and Flutter of a Swept Wing Model. Rapport technique Rept. 65186, Royal Aircraft Establishment, 1965. Cité p. 98

[53] A. Jameson : Solution of the Euler Equations For Two Dimensional Transonic Flow by a Multigrid Method. *Applied mathematics and computation*, 13:327–355, avril 1983. Cité p. 24

[54] A. Jameson : Time Dependent Calculations Using Multigrid, with Applications to Unsteady Flows Past Airfoils and Wings. *In 10th Computational Fluid Dynamics Conference*, Honolulu (USA), juin 1991. AIAA Paper 91-1596. Cité p. 25

[55] A. Jameson, W. Schmidt et E. Turkel : Numerical Solutions of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes. *In AIAA 14th Fluid and Plasma Dynamic Conference*, Palo Alto (USA), juin 1981. AIAA Paper 81-1259. Cité p. 60, 84, 155

[56] F. T. Johnson, E. N. Tinoco et N. Jong Yu : Thirty years of development and application of CFD at Boeing Commercial Airplanes, Seattle. *Computers & Fluids*, 34:1115–1151, 2005. Cité p. 1

[57] R. E. Kielb, J. W. Barter, J. P. Thomas et K. C. Hall : Blade Excitation by Aerodynamic Instabilities - A Compressor Blade Study. *In ASME Turbo Expo*, Atlanta (USA), juin 2003. Cité p. 69

[58] N. Kryloff et N. Boboliuboff : *Introduction to Nonlinear Mechanics*. Princeton University Press, Princeton (USA), 1947. Cité p. 2, 31, 134

[59] B. E. Launder, G. J. Reece et W. Rodi : Progress in the Development of a Reynolds-Stress Turbulent Closure. *Journal of Fluid Mechanics*, 68(3):537–566, 1975. Cité p. 14

[60] F. Leboeuf : Écoulements 3D dans les turbomachines. École Centrale de Lyon, 2001. Cours de l'option Propulsion Aéronautique. Cité p. 8, 9, 10

[61] G. Legras, N. Gourdain, F. Sicot et M. Rouméas : Time Spectral Calculation of a Casing Treatment Configuration for a High Pressure Compressor. *In 8th European Turbomachinery Conference*, Graz (Autriche), mars 2009. Cité p. 91, 165

[62] A. Lerat et Z. N. Wu : Stable Conservative Multidomain Treatments for Implicit Euler Solvers. *Journal of Computational Physics*, 123(1):45–64, janvier 1996. Cité p. 16, 83

[63] H. D. Li et L. He : Blade Count and Clocking Effects on Three-Bladerow Interaction in a Transonic Turbine. *Journal of Turbomachinery*, 125(4):632–640, octobre 2003. Cité p. 18

[64] R. C. Maple, P. I. King, P. D. Orkwis et J. M. Wolff : Adaptive Harmonic Balance Method for Nonlinear Time-Periodic Flows. *Journal of Computational Physics*, 193(2):620–641, janvier 2004. Cité p. 44, 132

[65] M. McMullen et A. Jameson : The Computational Efficiency of Non-Linear Frequency Domain Methods. *Journal of Computational Physics*, 212(2):637–661, mars 2006. Cité p. 148

[66] M. McMullen, A. Jameson et J. Alonso : Acceleration of Convergence to a Periodic Steady State in Turbomachinery Flows. *In 39th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno (USA), janvier 2001. AIAA Paper 2001-0152. Cité p. 36, 37, 149

[67] M. McMullen, A. Jameson et J. Alonso : Application of a Non-Linear Frequency Domain Solver to the Euler and Navier-Stokes Equations. *In 40th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno (USA), janvier 2002. AIAA Paper 2002-0120. Cité p. 38, 44

[68] G. J. Michon, H. Miton et N. Ouayahya : Experimental Study of the Unsteady Flows and Turbulence Structure in an Axial Compressor from Design to Rotating Stall Conditions. *In 6th European Turbomachinery Conference*, Lille (France), mars 2005. Cité p. 12, 81

[69] K. W. Morton et D. F. Mayers : *Numerical Solution of Partial Differential Equations, An Introduction*. Cambridge University Press, 2005. Cité p. 21

[70] O. J. Nastov et J. K. White : Time-Mapped Harmonic Balance. *In 36th Design Automation Conference*, pages 641–646, New Orleans (USA), juin 1999. Cité p. 44

[71] W. Ning et L. He : Computation of Unsteady Flows Around Oscillating Blades Using Linear and Nonlinear Harmonic Euler Methods. *Journal of Turbomachinery*, 120(3):508–514, juillet 1998. Cité p. 32, 34, 148

[72] S. A. Orszag : On the Elimination of Aliasing in Finite-Difference Schemes by Filtering High-Wavenumber Components. *Journal Of Atmospheric Sciences*, 28:1974–1974, septembre 1971. Cité p. 112

[73] X. Ottavy : *Mesures par anémométrie laser dans un compresseur axial transsonique. Études des structures instationnaires périodiques.* Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 1999. Cité p. 9, 18

[74] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling et B. P. Flannery : *Numerical Recipes : The Art of Scientific Computing*, chapitre 17 – Integration of Ordinary Differential Equations, pages 955–985. Cambridge University Press, 3ème édition, 2007. Cité p. 23

[75] S. Pyliouras, M. Kegalj, C. Starke et H.-P. Schiffer : Consequences of Unsteady Wake Interaction in Multi-Stage Turbines. *In 19th Internation Symposium on Air-Breathing Engines*, Montreal (Canada), septembre 2009. ISABE-2009-1261. Cité p. 48

[76] M. M. Rai : A Conservative Treatment of Zonal Boundaries for Euler Equation Calculations. *Journal of Computational Physics*, 62(2):472–503, février 1986. Cité p. 16, 83

[77] D. E. Raveh : CFD-Based Models of Aerodynamic Gust Response. *In 47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Strctural Dynamics and Materials Conference*, Newport (USA), mai 2006. AIAA Paper 2006-2022. Cité p. 132

[78] P. L. Roe : The Use of the Riemann Problem in Finite Difference Schemes. *Lecture Notes in Physics*, 141:354–359, 1980. Cité p. 99

[79] Y. Saad : *Iterative Methods for Sparse Linear Systems.* SIAM, 2ème édition, 2003. Cité p. 52, 54, 56, 153

[80] A. Sentker et W. Riess : Experimental Investigation of Turbulent Wake-Blade Interaction in Axial Compressors. *International Jounal of Heat and Fluid Flow*, 21(3):285–290, juin 2000. Cité p. 8

[81] C. E. Shannon : Communication in the Presence of Noise. *Proceeding of the Institute of Radio Engineers*, 37(1):10–21, janvier 1949. Cité p. 40, 46, 112

[82] F. Sicot, G. Dufour et N. Gourdain : Discrete-Frequency Noise Prediction Using a Harmonic Balance Method. *In 19th International Symposium on Air Breathing Engines*, Montréal (Canada), septembre 2009. ISABE Paper 2009-1131. Cité p. 91, 134

[83] F. Sicot, G. Puigt et M. Montagnac : Block-Jacobi Implicit Algorithms for the Time Spectral Method. *AIAA Journal*, 46(12):3080–3089, décembre 2008. Cité p. 51, 56, 147

[84] J. Smagorinsky : General Circulation Experiments With the Primitive Equations. Part I. The Basic Experiment. *Monthly Weather Review*, 91(3):99–164, mars 1963. Cité p. 14

[85] B. R. Smith : The $k-kl$ Turbulence Model and Wall Layer Model for Compressible Flows. *In 21st Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Lasers Conference*, Seattle (USA), juin 1990. Cité p. 99

[86] O. Soucy et S. K. Nadarajah : A NLFD Method for the Simulation of Periodic Unsteady Flows for Overset Meshes. *In 19th AIAA Computational Fluid Dynamics*, San Antonio (USA), juin 2009. AIAA Paper 2009-4971. Cité p. 132

[87] P. R. Spalart : Strategies for Turbulence Modelling and Simulations. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 21(3):252–263, juin 2000. Cité p. 14, 15

[88] P. R. Spalart et S. R. Allmaras : A One-Equation Turbulence Transport Model for Aerodynamic Flows. *In 30th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno (USA), janvier 1992. AIAA Paper 92-0439. Cité p. 14, 60, 85, 155

[89] M. A. Spiker, J. P. Thomas, R. E. Kielb, K. C. Hall et E. H. Dowell : Modeling Cylinder Flow Vortex Shedding with Enforced Motion Using a Harmonic Balance Approach. *In 47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, Newport (USA), mai 2006. AIAA Paper 2006-1965. Cité p. 148

[90] Sriram, A. Gopinath, E. van der Weide, C. Tomlin et A. Jameson : Aerodynamics and Flight Control of Flapping Wing Flight Vehicules : A preliminary Computational Study. *In 43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting nan Exhibit*, Reno (USA), janvier 2005. Cité p. 44

[91] J. L. Steger et R. F. Warming : Flux Vector Splitting of the Inviscid Gas-Dynamic Equations with Applications to Finite Difference Methods. *Journal of Computational Physics*, 40:263–293, avril 1981. Cité p. 52, 151

[92] J. P. Thomas, C. H. Custer, E. H. Dowell et K. C. Hall : Unsteady Flow Computation Using a Harmonic Balance Approach Implemented About the OVERFLOW 2 Flow Solver. *In 19th AIAA Computational Fluid Dynamics*, San Antonio (USA), juin 2009. AIAA Paper 2009-4270. Cité p. 56

[93] J. P. Thomas, E. H. Dowell et K. C. Hall : Modeling Viscous Transonic Limit Cycle Oscillation Behavior Using a Harmonic Balance Approach. *In 43rd AIAA/ASME/ASCE/-AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, Denver (USA), avril 2002. AIAA Paper 2002-1414. Cité p. 69

[94] J. P. Thomas, E. H. Dowell et K. C. Hall : Nonlinear Inviscid Aerodynamic Effects on Transonic Divergence, Flutter, and Limit-Cycle Oscillations. *AIAA Journal*, 40(4):638–646, avril 2002. Cité p. 69, 148

[95] J. P. Thomas, E. H. Dowell et K. C. Hall : Modeling Limit Cycle Oscillation Behavior of the F-16 Fighter Using a Harmonic Balance Approach. *In 45th AIAA/ASME/ASCE/-AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, Palm Springs (USA), avril 2004. AIAA Paper 2004-1696. Cité p. 69

[96] J. P. Thomas, K. C. Hall et E. H. Dowell : A Harmonic Balance Approach for Modeling Nonlinear Aeroelastic Behavior of Wings in Transonic Viscous Flow. *In 44th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit*, Norfolk (USA), avril 2003. AIAA Paper 2003-1924. Cité p. 69

[97] E. van der Weide, A. Gopinath et A. Jameson : Turbomachinery Applications with the Time Spectral Method. *In 35th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit*, Toronto (Canada), juin 2005. AIAA Paper 2005-4905. Cité p. 41, 42, 43, 46, 84, 148, 150

[98] D. Van Zante, J. Chen, M. Hathaway et R Chriss : The Influence of Compressor Blade Row Interaction Modeling on Performance Estimates From Time-Accurate, Multistage, Navier-Stokes Simulations. *Journal of Turbomachery*, 130(1), janvier 2008. Cité p. 129

[99] J. M. Verdon et J. R. Caspar : A Linearized Unsteady Aerodynamic Analysis for Transonic Cascades. *Journal of Fluid Mechanics*, 149:403–429, décembre 1984. Cité p. 31, 148

[100] H. K. Versteeg et W. Malalasekra : *An Introduction to Computational Fluid Dynamics : The Finite Volume Method*. Prentice Hall, 1995. Cité p. 21

[101] S. Vilmin, C. Hirsch, E. Lorrain et M. Swoboda : Unsteady Flow Modeling across the Rotor/Stator Interface using the Nonlinear Harmonic Method. *In ASME Turbo Expo*, Barcelone (Espagne), mai 2006. Cité p. 3, 38, 43, 48, 125

[102] S. Vilmin, E. Lorrain et C. Hirsch : The non-linear harmonic method for rotor/stator interactions applied to thermally perfect gas. *In 8th International Symposium on Experimental and Computational Aerothermodynamics of Internal Flows*, Lyon, France, juillet 2007. Numeca International. Cité p. 87

[103] C. Weber : *Développement de méthodes implicites pour les équations de Navier-Stokes moyénnées et la simulation des grandes échelles : Application à l'aérodynamique externe.* Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1998. Cité p. 52

[104] D. C. Wilcox : *Turbulence Modeling for CFD.* DCW Industries, $2^{\text{ème}}$ édition, 1998. Cité p. 14

[105] I. Wilke et H. P. Kau : A Numerical Investigation of the Influence of Casing Treatments on the Tip Leakage Flow in a HPC Front Stage. *In ASME*, 2002. Cité p. 12, 91

[106] M. A. Woodgate et K. J. Badcock : Implicit Harmonic Balance Solver for Transonic Flow with Forced Motions. *AIAA Journal*, 47(4):893–901, avril 2009. Cité p. 56

[107] S. Yoon et A. Jameson : An LU-SSOR Scheme for the Euler and Navier-Stokes Equations. *In AIAA 25^{th} Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno (USA), janvier 1987. AIAA Paper 87-0600. Cité p. 52, 150

[108] A. Zaide et D. E. Raveh : Numerical Simulation and Reduced-Order Modeling of Airfoil Gust Response. *In 17^{th} AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, Toronto (Canada), juin 2005. AIAA Paper 2005-5128. Cité p. 132

[109] R. J. Zwaan : LANN Wing. Pitching Oscillation. Compendium of Unsteady Aerodynamic Measurements. Addendum No.1. Rapport technique 702, AGARD, 1982. Data Set 9. Cité p. 59, 64, 155

[110] R. J. Zwaan : NACA 64A006 Oscillating Flap. Compendium of Unsteady Aerodynamic Measurements. Addendum No.1. Rapport technique 702, AGARD, 1982. Data Set 9. Cité p. 72

Quatrième partie

Annexes

Annexe A

Article sur l'implicitation de la TSM

L'article [83] sur l'implicitation de la TSM publié dans l'AIAA Journal en décembre 2008, est ici reproduit dans sa version révisée.

Block-Jacobi Implicit Algorithms for the Time Spectral Method

Frédéric SICOT [1], Guillaume PUIGT [2] and Marc MONTAGNAC [3]
CERFACS, CFD/AAM, 42 avenue Coriolis F-31057 Toulouse Cedex 01

Abstract

Many industrial applications involve flows periodic in time. Such flows are not simulated with enough efficiency when using classical unsteady techniques as a transient regime must be by-passed. New techniques, dedicated to time-periodic flows and based on Fourier analysis, have been developed recently. Among these, the Time Spectral Method casts a time-periodic flow computations in several coupled steady computations, corresponding to a uniform sampling of the period. Up to now, the steady states were reached using an explicit pseudo-time algorithm. Thus, very small time steps were needed and the convergence rate slowed down when increasing the number of harmonics. In this paper, a block-Jacobi approach is presented in order to solve the stationary problems with an implicit algorithm. Numerical simulations show on one hand the good quality of the results and on the other hand the interest of the proposed method to reduce the sensitivity of computations to a large number of harmonics.

A.1 Introduction

Even if three-dimensional steady turbulent flow simulations begin to be handled routinely in the aircraft industry, three-dimensional unsteady turbulent flow simulations still require large amounts of computing time, and a substantial acceleration of the calculations is needed in order to reduce design cycles.

Depending on the spatial and time scales to be resolved, numerous nonlinear time-marching methods are available. Direct Numerical Simulations and even Large Eddy Simulations are still too expensive with respect to the best computing resources available today to satisfy industrial requirements. So far, Unsteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes (U-RANS) techniques have proved to be the most efficient ones to meet industrial needs. Efficiency is not an absolute notion since it results from a trade-off

1. Doctoral Candidate
2. Senior Researcher
3. Research Engineer

between the quality of the physics and the time needed to complete the simulation. In industry, U-RANS techniques are generally predictive enough and require relatively short time simulations.

To build an efficient method for unsteady flows, it is interesting to take into consideration all the flow characteristics. As an example, a large range of applications leads to time periodic flows : turbomachinery, pitching wings, helicopter blades, wind turbines... Several dedicated methods have been developed during the last years. They consider flow variables either in the time-domain or in the frequency-domain. The frequency-domain techniques are extensively reviewed in Ref. [46, 65]. Linearized methods [99] form an important group among these methods. They superimpose perturbations over a steady flow and do not really rely on a time marching procedure. Consequently, they are very inexpensive to compute. However, when the flow presents strong shock discontinuities for instance, the linearity assumption is no longer true. Ning and He [71] extend these techniques to take account of the non-linearities, yielding the Non-Linear Harmonic method. This one is limited to only one harmonic of the flow and requires a specific treatment for the time stepping.

In the recent years, a more efficient time-domain method dedicated to time-periodic flows has been developed. Hall *et al.* introduced an Harmonic Balance (HB) method [45] for blade cascades computations. Then Gopinath *et al.* presented the Time Spectral Method (TSM) [38] for external aerodynamic applications. Both methods are essentially the same and allow to capture the fundamental frequency of the flow and a given number of its harmonics. They casts the unsteady governing equations in a set of coupled steady equations corresponding to a uniform sampling of the flow within the time period. These steady equations can then be solved using standard steady RANS methods with convergence acceleration techniques such as local time stepping and multigrid. The convergence of a steady computation is better mastered than the transient needed by an unsteady computation to reach the periodic state. This method proved to be efficient in periodic problem computations such as vortex shedding [39, 89], flutter [94] and turbomachinery applications [46, 97]. Later on, the HB method was extended for multi-stage turbomachinery [40] where several frequencies appear, not necessarily integer multiples of each other. For sake of clarity, the notation TSM is retained in this paper to refer to computations with a single fundamental frequency.

All these references use explicit algorithms such as Runge-Kutta methods to advance the calculations in pseudo-time. This makes the pseudo-time steps relatively small and therefore requires a large number of iterations to reach the steady state of all the instants. Furthermore it has been observed that the convergence rate decays as the number of harmonics is increased [45]. To circumvent this, van der Weide *et al.* [97] use a spectral interpolation of computations with a low number of harmonics to produce good initial conditions for higher harmonics computations. This requires to make several computations and to interpolate between each. An implicit time integration scheme such as backward-Euler could enable much larger time steps and make the TSM even more efficient. For this reason, the goal of the present paper is to derive and implement an implicit version of the TSM.

The following section recalls the formulation of the Time Spectral Method and its stability criteria. Then the new implicit treatment is described and two solving processes are derived. A numerical study is then carried out, followed by an application of a pitching wing in forced harmonic oscillations.

A.2 Time Spectral Method

A.2.1 Governing Equations

The Navier-Stokes equations in Cartesian coordinates are written in semi-discrete form as

$$V\frac{\partial W}{\partial t} + R(W) = 0. \tag{A.1}$$

V is the volume of a cell, W is the vector of conservative variables

$$W = (\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, \rho E)^T,$$

complemented with an arbitrary number of turbulent variables as within the RANS framework. $R(W)$ is the residual vector resulting from spatial discretization of the convective f_{ci} and viscous f_{vi} fluxes

$$R(W) = \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(W),$$

with $f_i = f_{ci} - f_{vi}$ and

$$f_{ci} = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i u_1 + p\delta_{i1} \\ \rho u_i u_2 + p\delta_{i2} \\ \rho u_i u_3 + p\delta_{i3} \\ \rho u_i E + p u_i \end{pmatrix}, \quad f_{vi} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{i1} \\ \tau_{i2} \\ \tau_{i3} \\ u \cdot \tau_i - q_i \end{pmatrix}. \tag{A.2}$$

Here δ denotes the Kronecker symbol. The components of the stress tensor are

$$\tau_{11} = \frac{2}{3}\mu\left(2\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right), \qquad \tau_{12} = \tau_{21} = \mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right),$$
$$\tau_{22} = \frac{2}{3}\mu\left(-\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + 2\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right), \qquad \tau_{13} = \tau_{31} = \mu\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right),$$
$$\tau_{33} = \frac{2}{3}\mu\left(-\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + 2\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right), \qquad \tau_{23} = \tau_{32} = \mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right).$$

The heat flux vector q components are $q_i = -\kappa\, \partial T / \partial x_i$ where T is the temperature and

$$\kappa = C_p\left(\frac{\mu_{lam}}{Pr_{lam}} + \frac{\mu_{turb}}{Pr_{turb}}\right).$$

The total viscosity μ is the sum of the laminar μ_{lam} and turbulent μ_{turb} viscosities. Pr_{lam} and Pr_{turb} are the associated Prandtl number. For an ideal gas, the closure is provided by the equation of state

$$p = (\gamma - 1)\rho\left(E - \frac{u_i u_j}{2}\right).$$

A.2.2 Fourier-Based Time Discretization

If W is periodic with period $T = 2\pi/\omega$, so is $R(W)$ and the Fourier series of Eq. (A.1) is

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik\omega V \hat{W}_k + \hat{R}_k) \exp(ik\omega t) = 0, \tag{A.3}$$

where $\hat{W}_k$ and $\hat{R}_k$ are the Fourier coefficients of W and R corresponding to mode k. The complex exponential family forming an orthogonal basis, the only way for Eq. (A.3) to be true is that the weight of every mode k is zero. An infinite number of steady equations in the frequency domain is obtained as expressed by

$$ik\omega V \hat{W}_k + \hat{R}_k = 0, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{A.4}$$

McMullen *et al.* [66] solve a subset of these equations up to mode N, $-N \leq k \leq N$, yielding the Non-Linear Frequency Domain (NLFD) method.

The Time Spectral Method (TSM) [38] uses a Discrete Inverse Fourier Transform (DIFT) to cast back in the time domain this subset of $2N+1$ equations from Eq. (A.4). The DIFT induces linear relations between Fourier's coefficients $\hat{W}_k$ and a uniform sampling of W within the period

$$W_n = \sum_{k=-N}^{N} \hat{W}_k \exp(i\omega n \Delta t), \qquad 0 \leq n < 2N+1,$$

with $W_n \equiv W(n\Delta t)$ and $\Delta t = T/(2N+1)$. This leads to a time discretization with a new time operator D_t as follows

$$R(W_n) + VD_t(W_n) = 0, \qquad 0 \leq n < 2N+1. \tag{A.5}$$

These steady equations correspond to $2N+1$ instants equally spaced within the period. The new time operator connects all time levels and can be expressed analytically by

$$D_t(W_n) = \sum_{m=-N}^{N} d_m W_{n+m},$$

with

$$d_m = \begin{cases} \frac{\pi}{T}(-1)^{m+1}\csc\left(\frac{\pi m}{2N+1}\right) & , m \neq 0, \\ 0 & , m = 0. \end{cases}$$

A similar derivation can be made for an even number of instants, but it is proved in Ref. [97] that it can lead to an odd-even decoupling and as a consequence, the method can become unstable. Time-dependent boundary conditions could also benefit from such a derivation, but this is not an issue for external aerodynamic applications and has not been done yet.

A pseudo-time derivative τ_n is added to Eqs. (A.5) in order to time march the equations to the steady-state solutions of all instants,

$$V\frac{\partial W_n}{\partial \tau_n} + R(W_n) + VD_t(W_n) = 0, \qquad 0 \leq n < 2N+1. \tag{A.6}$$

The term $VD_t(W_n)$ appears as a source term that represents a high order formulation of the initial time derivative in Eq. (A.1). For stability reasons, the computation of the local time step is modified [97] to take into account this additional source term,

$$\Delta\tau = CFL\frac{V}{\|\lambda\| + \omega NV}. \tag{A.7}$$

An extra term ωNV is added to the spectral radius $\|\lambda\|$ to restrict the time step. Equation (A.7) implies that a high frequency and/or a high number N of harmonics can considerably constrain the time step. Actually, it has been observed [45] that the convergence of the method speeds down for increasing N. All the cited references use explicit schemes, such as Runge-Kutta, to carry out the pseudo-time integration. Their limited stability criteria on CFL numbers is very sensitive to such a restriction. Conversely, implicit schemes are more stable and allow larger CFL numbers, reducing this sensitivity. Such schemes would have the same behavior when the frequency of the unsteadiness increases. The following section describes the backward-Euler algorithm for the TSM.

A.3 Implicit Time Integration

Let us recall the backward-Euler algorithm for the Navier-Stokes equations and the standard solving LU-SSOR [107] (Lower Upper-Symmetric Successive Over Relaxation) method.

A.3.1 Algorithm for Steady Navier-Stokes Equations

The time derivative in Eq. (A.1) is discretized by a first-order scheme

$$V\frac{\Delta W}{\Delta t} = -R(W), \tag{A.8}$$

where $\Delta W = W^{q+1} - W^q$ is the increment of the conservative variables between the iterations q and $q+1$. By considering $R(W)$ at iteration $q+1$, the implicit backward-Euler scheme is derived. As $R(W^{q+1})$ is unknown, it is linearized. Let J be the Jacobian matrix of the residual vector, $J = \partial R\left(W\right)/\partial W$. The linearization of $R(W^{q+1})$ is then

$$R\left(W^{q+1}\right) = R\left(W^q\right) + J\Delta W + \mathcal{O}(\Delta W^2). \tag{A.9}$$

Equations (A.8) and (A.9) lead to the following linear system

$$\left(\frac{V}{\Delta t}I + J\right)\Delta W = -R(W^q).$$

The LU-SSOR method is used to approximate the solution of this system. Formally, the matrix A of the linear system is split into three matrices

$$A\Delta W = \left(\mathcal{L} + \mathcal{D} + \mathcal{U}\right)\Delta W = -R(W^q), \tag{A.10}$$

with $\mathcal{L}$ a lower triangular matrix, $\mathcal{D}$ a diagonal matrix and $\mathcal{U}$ an upper triangular matrix. One LU-SSOR step is composed of the forward and backward sweeps of the iterative SSOR method (Eq. (A.11)), performed one after the other for $s \geq 0$,

$$\begin{cases} (\mathcal{L} + \mathcal{D})\Delta W^{s+1/2} = -R(W^q) - \mathcal{U}\Delta W^s, \\ (\mathcal{U} + \mathcal{D})\Delta W^{s+1} \quad = -R(W^q) - \mathcal{L}\Delta W^{s+1/2}, \end{cases} \tag{A.11}$$

with $\Delta W^0 = 0$. These two sweeps are repeated several times and $W^{q+1} = W^q + \Delta W^{s_{\max}}$, $s_{\max}$ corresponding to the maximum number of LU-SSOR steps.

Convective fluxes are written with a first order Steger and Warming [91] flux vector splitting for the residual linearization to end up with a diagonally dominant implicit matrix, which ensures that the method is convergent. Viscous terms are also linearized and preserve this diagonal dominance. Artificial dissipation is added for stability issues. The boundary conditions could be linearized in a same manner as the residual operator. As the scalar LU-SSOR is used in this paper, this point is not required to get convergence. The relaxation parameter is set to unity as it gives the best performances. This is equivalent to remove over-relaxation and to use LU-SGS (Symmetric Gauss-Seidel). Nevertheless, in the following sections, we keep the LU-SSOR designation but, for a sake of simplicity, the derived equations do not mention the relaxation parameter. This method has proved its efficiency in an industrial context for several years.

A.3.2 Extension for the Time Spectral Method

To introduce an implicit algorithm in the TSM, the first approach is to linearize only the residual $R(W_n)$ of Eq. (A.6) but not the source term $VD_t(W_n)$. This leads to the augmented system

$$\begin{pmatrix} \boxed{\frac{V}{\Delta\tau_0}I + J_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{\frac{V}{\Delta\tau_1}I + J_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{\frac{V}{\Delta\tau_{2N}}I + J_{2N}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta W_0 \\ \Delta W_1 \\ \vdots \\ \Delta W_{2N} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R_{TSM}(W_0^q) \\ R_{TSM}(W_1^q) \\ \vdots \\ R_{TSM}(W_{2N}^q) \end{pmatrix}, \tag{A.12}$$

with $R_{TSM}(W_n^q) = R(W_n^q) + VD_t(W_n^q)$ the right-hand side of the TSM equations, and J_n the Jacobian of the standard residual operator at instant n, $J_n = \partial R(W_n)/\partial W_n$. The augmented matrix is block diagonal and a LU-SSOR algorithm can be applied independently on each instant n. In other words,

$2N+1$ steady flows are computed and they are only coupled through the explicit residuals. This is clearly an advantage since this approach has no impact on message passing and does not need any new development on the implicit side. However, it will be shown in §A.4 that convergence is not achieved easily with this technique and the present paper proposes another alternative.

A.3.3 Full Implicitation Method for the Time Spectral Method

In order to improve the performances, the source term of the TSM needs to be taken into account. The TSM equations with W considered at iteration $q+1$ read

$$V\frac{\Delta W_n}{\Delta \tau_n} = -\left(R\left(W_n^{q+1}\right) + VD_t\left(W_n^{q+1}\right)\right), \quad 0 \le n < 2N+1. \tag{A.13}$$

As the operator D_t is linear, applying it on W_n at iteration $q+1$ gives

$$D_t\left(W_n^{q+1}\right) = D_t(W_n^q) + D_t(\Delta W_n). \tag{A.14}$$

In the same manner as the TSM new time operator D_t couples together the conservative variables at all instants, Eq. (A.14) leads to a coupling of the increments ΔW at all instants. Equation (A.13) turns into

$$\left(\frac{V}{\Delta \tau_n} I + J_n\right)\Delta W_n + VD_t(\Delta W_n) = -R_{TSM}(W_n^q), \quad 0 \le n < 2N+1.$$

As $d_0 = 0$, the diagonal terms are identical to the diagonal terms of Eq. (A.12). The matrix of the system becomes

$$A^\star = \begin{pmatrix} \boxed{\frac{V}{\Delta\tau_0}I + J_0} & Vd_1 I & \dots & Vd_N I & Vd_{-N} I & \dots & Vd_{-1} I \\ Vd_{-1} I & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & Vd_1 I & \ddots & \ddots & \vdots \\ Vd_{-N} I & \dots & Vd_{-1} I & \boxed{\frac{V}{\Delta\tau_N}I + J_N} & Vd_1 I & \dots & Vd_N I \\ \vdots & \ddots & \ddots & Vd_{-1} I & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & Vd_1 I \\ Vd_1 I & \dots & Vd_N I & Vd_{-N} I & \dots & Vd_{-1} I & \boxed{\frac{V}{\Delta\tau_{2N}}I + J_{2N}} \end{pmatrix}.$$

As $d_{-m} = -d_m$, the sum of the d coefficients vanishes, $\sum_{m=-N}^{N} d_m = 0$, and as A is diagonally dominant, so is A^*.

The new matrix A^* is not block-sparse anymore and couples all the increments ΔW_n of all the instants n. This probably explains why the adapted LU-SSOR scheme of §A.3.2 fails to converge for a high number of harmonics as shown §A.4 : the linearization error grows as the number of harmonics increases and so the convergence rate decays.

A^* could be decomposed as a sum of three matrices $A^\star = \mathcal{L}^\star + \mathcal{D}^\star + \mathcal{U}^\star$ with $\mathcal{L}^\star$ a lower block triangular matrix, $\mathcal{D}^\star$ a block diagonal matrix and $\mathcal{U}^\star$ an upper block triangular matrix. Then a classical SSOR algorithm could be applied on the whole system but it would necessitate to go all over the blocks and thus would break down code efficiency in term of CPU requirement. To remove this drawback, two solving algorithms based on the block-Jacobi method are now presented.

A.3.4 Block-Jacobi Strategies for Full Implicit TSM

Applied to the TSM, the iterative block-Jacobi method [79] allows to move the implicit coupling term $VD_t(\Delta W_n)$ to the right-hand side and yields $2N+1$ independent linear systems. A Jacobi step l reads

$$\left(\frac{V}{\Delta\tau_n}I + J_n\right)\Delta W_n^{l+1} = -R_{TSM}(W_n^q) - VD_t\left(\Delta W_n^l\right), \quad 0 \leq n < 2N+1, \tag{A.15}$$

with $l \geq 0$, $\Delta W_n^0 = 0$ and at the end of the l_{max} block-Jacobi iterations, the increments ΔW_n allow to compute W at the next iteration : $W_n^{q+1} = W_n^q + \Delta W_n^{l_{max}}$. For every block-Jacobi step, a linear system has to be solved. This system could be solved with any direct or iterative method. The classical SSOR technique is actually used as it allows minimum efforts to be adapted from the LU-SSOR method.

A.3.4.1 Block-Jacobi-SSOR (BJ-SSOR) Strategy

Each equation of the block-Jacobi system Eq. (A.15) could be solved with an iterative SSOR technique, classically decomposed in a forward sweep

$$(\mathcal{L}_n + \mathcal{D}_n)X^{s+1/2} = -\left(R_{TSM}(W_n^q) + VD_t\left(\Delta W_n^l\right)\right) - \mathcal{U}_n X^s, \tag{A.16}$$

followed by a backward sweep

$$(\mathcal{D}_n + \mathcal{U}_n)X^{s+1} = -\left(R_{TSM}(W_n^q) + VD_t\left(\Delta W_n^l\right)\right) - \mathcal{L}_n X^{s+1/2}, \tag{A.17}$$

for $s \geq 0$ with $X^0 = \Delta W_n^l$. At the end of the SSOR iterations, $X^{s_{max}}$ is updated into the block-Jacobi steps : $\Delta W_n^{l+1} = X^{s_{max}}$, s_{max} being the number of SSOR forward and backward sweeps inside a block-Jacobi step. It should be noticed that $\mathcal{L}_n$, $\mathcal{D}_n$ and $\mathcal{U}_n$ refer to Eq. (A.10), where the splitting of the implicit matrix was obtained for one instant n. The block-Jacobi method imposes the implicit coupling term $D_t\left(\Delta W_n^l\right)$ to be updated at each step l. In other words, the implicit coupling term is computed every $2s_{max}$ sweeps and frozen over the following $2s_{max}-1$ sweeps. As $\Delta W_n^0 = 0$, it remains null during all the sweeps in the first block-Jacobi step and consequently at least two steps are needed to ensure the coupling of the increments of all instants, $l_{max} \geq 2$. If $l_{max} = 1$, no implicit coupling occurs and Eq. (A.12) is recovered. The solving algorithm uses two nested loops as described by algorithm 3.

Algorithm 3 Block-Jacobi-SSOR Algorithm for the Time Spectral Method

Require : W_n^q, $l_{max} \geq 2$, $s_{max} \geq 1$
  $\Delta W_n^0 = 0$
  for $l = 0$ to $l_{max} - 1$ **do**
    compute $D_t\left(\Delta W_n^l\right)$
    $X^0 = \Delta W_n^l$
    for $s = 0$ to $s_{max} - 1$ **do**
      solve Eq. (A.16) {*Forward sweep*}
      solve Eq. (A.17) {*Backward sweep*}
    end for
    $\Delta W_n^{l+1} = X^{s_{max}}$
  end for
Ensure : $W_n^{q+1} = W_n^q + \Delta W_n^{l_{max}}$

To reinforce the influence of the implicit coupling, the next method is proposed.

A.3.4.2 Block-Jacobi-SOR (BJ-SOR) Strategy

The system Eq. (A.15) could also be solved in a special way with alternate SOR techniques. Only a loop is needed and the imposed constraint is to have an even number l_{max} of block-Jacobi steps to balance forward and backward sweeps. Indeed, when l is even, the system is solved with only one forward SOR sweep Eq. (A.16) and when l is odd, the system is solved with only one backward SOR sweep Eq. (A.17). Algorithm 4 describes this strategy.

Algorithm 4 Block-Jacobi-SOR Algorithm for the Time Spectral Method.

Require : W_n^q, l_{max} even
  $\Delta W_n^0 = 0$
  for $l = 0$ to $l_{max} - 1$ **do**
    compute $D_t\left(\Delta W_n^l\right)$
    if l is even **then** {*Forward sweep*}
      $X^s = \Delta W_n^l$, solve Eq. (A.16), $\Delta W_n^{l+1} = X^{s+1/2}$
    else {*l is odd, Backward sweep*}
      $X^{s+1/2} = \Delta W_n^l$, solve Eq. (A.17), $\Delta W_n^{l+1} = X^{s+1}$
    end if
  end for
Ensure : $W_n^{q+1} = W_n^q + \Delta W_n^{l_{max}}$

The implicit coupling term $VD_t(\Delta W_n)$ is computed before every sweep (but the first one as $\Delta W_n^0 = 0$) and thus this strategy ensures the strongest coupling. If $s_{max} = 2$ in the BJ-SSOR method for instance, the implicit coupling term is computed before the fifth (forward) sweep and frozen over the three following sweeps. Table A.1 enables the comparison between the two methods in terms of SOR sweeps.

Table A.1 – Implicit coupling term update. Values of the loop indexes l and s before each sweep, and if the implicit coupling term is updated.

Number	BJ-SSOR $s_{max} = 2$			BJ-SOR	
of sweeps	l	s	update	l	update
1	0	0	no	0	no
2	0	0	no	1	yes
3	0	1	no	2	yes
4	0	1	no	3	yes
5	1	0	yes	4	yes
6	1	0	no	5	yes
7	1	1	no	6	yes
8	1	1	no	7	yes
			⋮		

The LU-SSOR and the new block-Jacobi methods are now compared. The influence of the number of block-Jacobi iterations on convergence rate is also studied.

A.4 Validation of the Implicit TSM

The TSM technique has been implemented in the parallel structured multiblock solver *elsA* [13]. The code capability is wide as it can simulate steady and unsteady, internal and external flows, in a relative or fixed motion. The solver uses a conservative cell-centered finite volume approach for the spatial discretization. Several spatial and time integration schemes are available. In this paper, the second order JST centered scheme [55] is used for convective terms and a central second order scheme for diffusive terms. In combination with local time stepping, a V-cycle multigrid technique with two levels of coarse grids is used to accelerate the convergence of the steady computations. The Spalart-Allmaras [88] turbulence model is used in all the simulations.

The new implicit algorithm has been validated with the flow simulation around the transonic LANN wing [109] in a forced harmonic pitching movement at frequency $f = 24$ Hz. The angle of attack α oscillates as $\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_m \sin(2\pi f t)$ with $\alpha_0 = 0.6°$ and $\alpha_m = 0.25°$. The flow conditions are $M_\infty = 0.822$ and $\mathrm{Re} = 5.43 \cdot 10^6$. Experimental data are available for the time-averaged and the first harmonic values of the wall pressure coefficient C_p at different wing cross sections.

The numerical simulations are conducted on a mesh composed of 1,122,816 cells shown figure A.1. The grid extent is shown figure A.2 where B denotes the wing span.

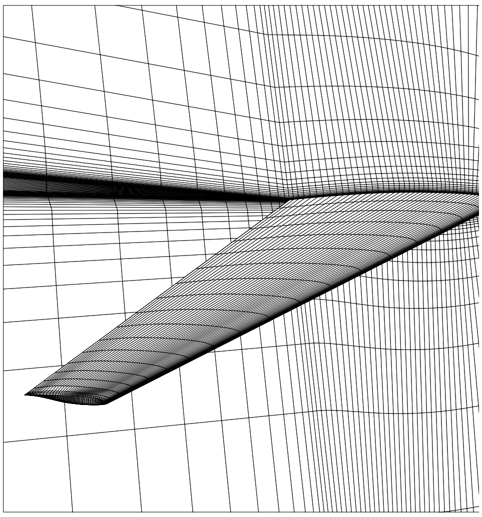
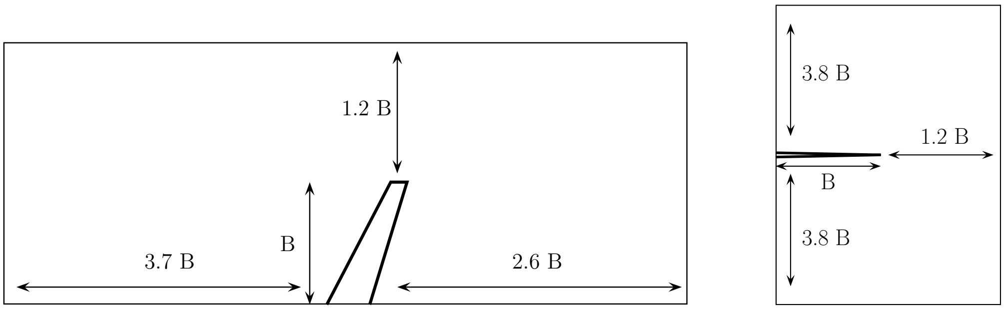


Figure A.1 – Navier-Stokes mesh of the LANN wing (for a better readability, the mesh is coarsened twice in every direction).

A.4.1 Numerical Study

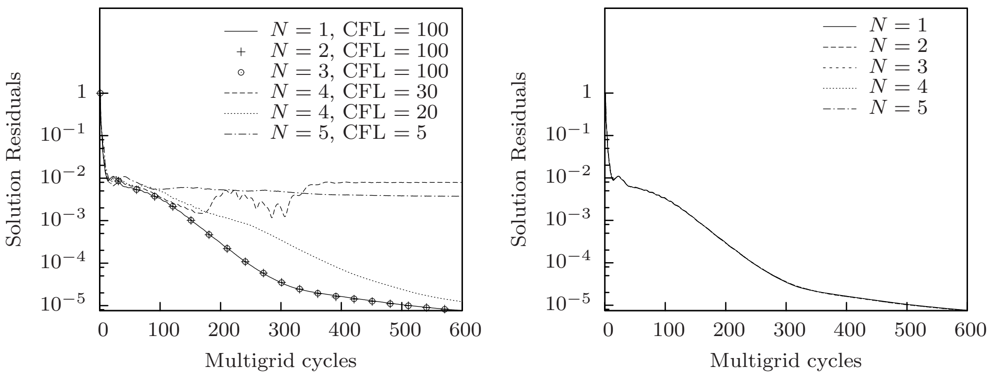
First, a numerical study of the different parameters is conducted. The convergence curves for the first approach described in §A.3.2 are given in figure A.3(a). The solution residual is defined as the root mean square of the residual operator $R(W)$ on all the mesh cells, averaged by the number of instants. The curves indicate the residual on the density residual ρ and are normalized by the residual at first iteration to enable comparison. It is observed that the CFL needs to be decreased in order to converge high harmonic computations. For $N = 4$, the CFL must be decreased to 20 (dotted line) as with 30 the computation does not converge (dashed line). The five-harmonic computation needs a few thousand iterations at CFL = 5 to lose five orders of magnitude : the convergence rate is very slow. The first block-Jacobi strategy used is the BJ-SOR §A.3.4.2 as it should ensure the best coupling. The results with $l_{\max} = 4$ are presented in figure A.3(b). The benefits of the full implicitation are clear as all the computations are now performed at CFL = 100. Furthermore almost no differences are found between



(a) Top view : upstream, downstream and spanwise grid boundaries

(b) Front view : upper, lower and spanwise grid boundaries

Figure A.2 – Grid extent (not to scale).



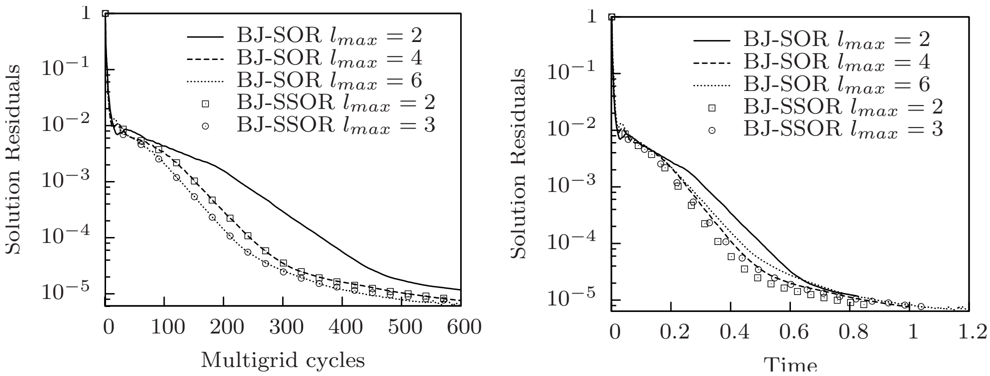
(a) Standard LU-SSOR

(b) BJ-SOR (all CFL = 100)

Figure A.3 – Convergence of the computations.

the normalized convergence curves. Not all test cases show such a good matching, but it is observed that the convergence rate is nearly the same for any number of harmonics.

Up to now, results have been obtained using all in all four SOR sweeps, leading finally to the first forward sweep without implicit coupling ($\Delta W = 0$ initially) and the three other sweeps with implicit coupling (cf. table A.1). The influence of the derived strategies is shown in figure A.4 for the most difficult case $N = 5$. It is observed that the BJ-SOR strategy with $l_{\max} = 2$ (with only the backward sweep ensuring the implicit coupling) is sufficient to obtain convergence at CFL = 100. Thanks to the three coupling sweeps, the BJ-SOR method with $l_{\max} = 4$ substantially speeds up the convergence with respect to the number of multigrid cycles (figure A.4(a)). The nondimensional time of computation (figure A.4(b)) remains mostly in favor of the BJ-SOR method. The best convergence rate in term of multigrid cycles is obtained with the block-Jacobi-SOR strategy with $l_{\max} = 6$ but this advantage is lost when considering the time spent. The extra CPU cost induced by the two supplementary sweeps is not worth the gain in convergence rate.



(a) Convergence curves with respect of the number of multigrid cycles

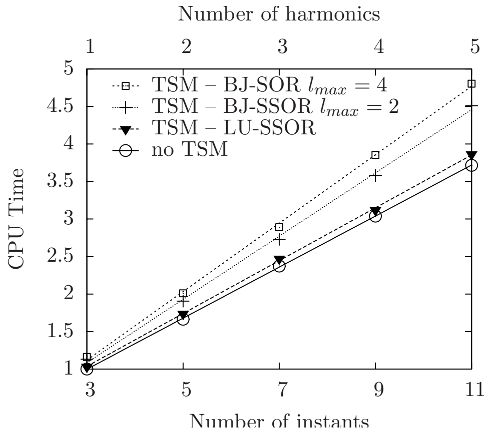
(b) Convergence curves with respect of a nondimensional CPU time

Figure A.4 – Effect of the number of modified LU-SSOR steps on convergence (all CFL = 100).

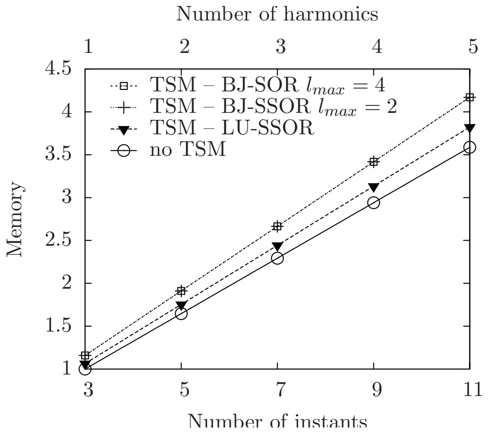
Results from the block-Jacobi-SSOR algorithm described in §A.3.4.1 are represented by marks in figure A.4. As $\Delta W_n = 0$ for the first block-Jacobi step, at least two steps are needed to ensure the coupling of increments (see table A.1). As shown previously with the BJ-SOR method, six sweeps are already expensive. To ensure an implicit coupling as often as possible with this few numbers of sweeps, s_{max} is set to one for the BJ-SSOR algorithm. Even though the coupling occurs less often, the convergence rate is almost the same for the BJ-SOR method with $l_{\max} = 4$ as for the BJ-SSOR method with $l_{\max} = 2$, and slightly slowed down with two additional sweeps for each method (resp. $l_{\max} = 6$ and $l_{\max} = 3$) with respect to the number of multigrid cycles. As the term $D_t(\Delta W_n)$ is only computed every two sweeps, the CPU time required by the BJ-SSOR method is notably reduced compared to the BJ-SOR approach with the same number of sweeps.

The CPU and memory costs of the implicitation are not negligible as shown in figure A.5. The lines show the trend and do not necessarily pass exactly through the data points. All the computations are performed on a parallel computer which shows a variation of up to 5 % in CPU time so that this statistic is averaged over four runs of simulation. They are all performed with four sweeps, either $l_{\max} = 4$ for the BJ-SOR method or $l_{\max} = 2$ for the BJ-SSOR method. All the curves are normalized by the cost of three uncoupled steady computations. The circles indicate the CPU time and memory consumption required for $2N + 1$ uncoupled steady computations. The downward triangles denote the TSM with the first approach of Eq. (A.12) with standard LU-SSOR. The complexity of the computation of D_t is quadratic with respect to the number of instants but it is only involved in a small part of the global calculations and the whole time remains linear with respect to the number of instants. Finally, the first approach adds penalties of about 3.5 % in CPU time and 6.5 % in memory. When considering the

BJ-SOR method (squares), D_t is applied several times over the conservative variable increment ΔW_n inside the SOR sweeps. Nevertheless, the CPU time remains linear. The extra cost is significant as the CPU time is increased by 30 % and the memory by 10 % compared to the LU-SSOR method. With the BJ-SSOR method (plus signs), the implicit coupling term is less often computed so that the extra CPU cost is reduced to 20 %. The memory consumption remains identical as the same information is stored though not computed at the same moment.



(a) CPU cost



(b) Memory cost

Figure A.5 – Costs of the different implicitation strategies.

Finally the block-Jacobi-SSOR scheme enables a fast convergence rate of the computations at a cost of about one fifth more CPU time and 10 % more memory requirements compared to the LU-SSOR method. Nevertheless, the time steps allowed are much larger and the TSM is far less sensitive to either high frequencies or an important number of harmonics than with explicit schemes. It can thus be concluded that the extra numerical cost of the implicitation is greatly counterbalanced by the larger time step enabled.

A.4.2 Pitching Wing

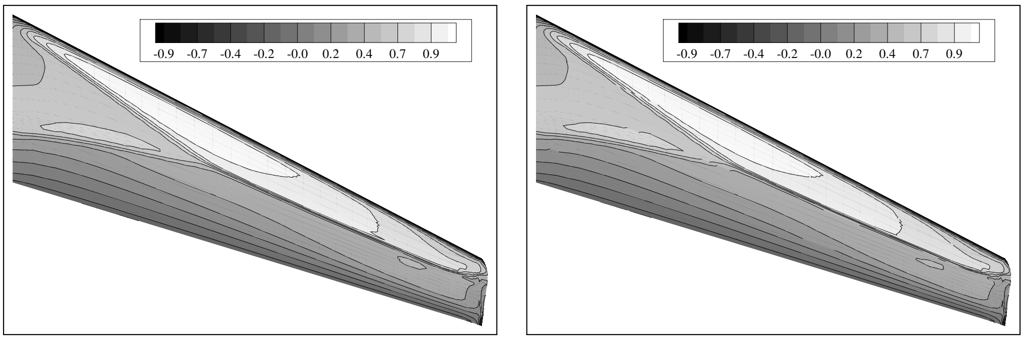
The quality of the presented implicit Time Spectral Method is now studied. The BJ-SSOR method with 300 multigrid cycles and $l_{\max} = 2$ is retained in the following simulations of the LANN wing in forced harmonic oscillations. The Time Spectral Method is compared to a reference U-RANS computation [21] on the same mesh shown in figure A.1. A dual-time stepping backward-difference-formula scheme advances the equations in time with 50 inner iterations that take advantage of the same acceleration techniques as for the previous TSM computations. Indeed, an implicit backward-Euler time integration method is used for the inner iterations. The resulting linear system is solved with a scalar LU-SSOR method. Four periods of the flow are discretized by 30 time steps each, leading to 6,000 multigrid cycles.

The TSM computations can be carried out in two ways : in a wing-relative or an absolute reference frame. For the first one, the mesh remains rigid around the wing and the variation of incidence is induced by different far-field boundary conditions applied at each instant. In this case, the inertial force has to be taken into account through a source term of the Navier-Stokes equations. In an absolute reference frame, the incidence variation is produced by deforming the mesh around the wing skin while the far-field boundary conditions remain fixed. In an arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation, the deformation velocity of the mesh is introduced in the computation of the fluxes Eq. (A.2) and as the cell volume V also varies in time, the TSM operator is applied on VW leading to the following semi-discrete equation

$$V_n \frac{\partial W_n}{\partial \tau_n} + R(W_n) + D_t(V_n W_n) = 0, \qquad 0 \leq n < 2N+1.$$

Both methods lead to very close results and cannot be discriminated.

An instantaneous snapshot of the pressure coefficient C_p is presented for U-RANS and TSM in figure A.6 at $\alpha = 0.6°$ for increasing angle of attack. A λ-shock is clearly visible near the wing root.



(a) U-RANS (b) TSM

Figure A.6 – LANN Wing upper surface. Instantaneous pressure coefficient at $\alpha = 0.6°$ for increasing α.

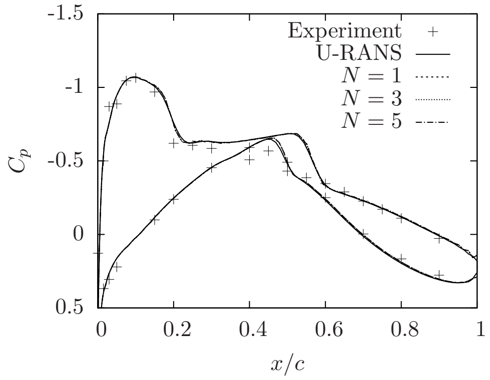
The Fourier analysis is conducted on six sections at 20.0 %, 32.5 %, 47.5 %, 65.0 %, 82.5 % and 95.0 % of the wing span. The time-averaged part is presented in figure A.7. A one-harmonic TSM computation is sufficient to match the U-RANS computation almost everywhere but at the shock location, where the solution slightly fluctuates. With higher harmonics ($N = 3$ and $N = 5$), TSM solutions match well the reference U-RANS simulation. Both kinds of simulation give solutions that match the experimental data quite well, although the shock on the upper surface is predicted downstream the experimental location.

The real and imaginary parts of the first harmonic of the pressure coefficient are presented in figures A.8 and A.9. The differences are more pronounced and it appears that one harmonic is not sufficient to match the U-RANS computation as it shows a small phase lag and some over- and under-shoots around the shock area. Three harmonics remove these drawbacks while some peaks are still sharp. Five harmonics better lessen the irregularities at the peaks.

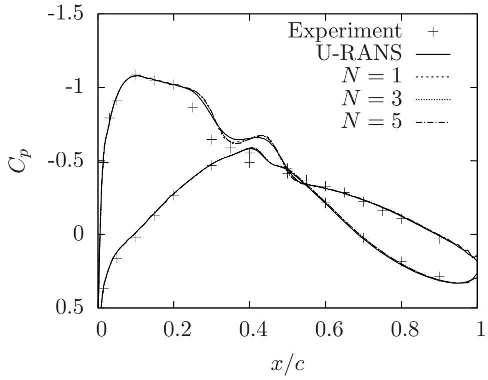
This point emphasizes the need for an accurate and efficient implicit formulation since all authors using an explicit time step algorithm mention the difficulty to get convergence with a higher number of harmonics. Overall, it can be concluded that a three-harmonic TSM computation is sufficient to match the U-RANS computation with engineering accuracy. In this case, the TSM is about 2.5 times faster than the reference U-RANS computation (see figure A.10).

A.5 Conclusion and Future Work

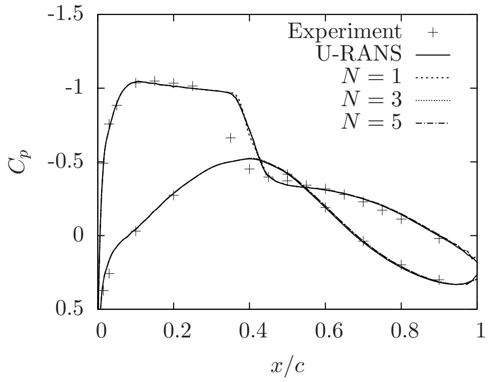
The Time Spectral Method is dedicated to simulate time-periodic flows with a better efficiency than classical time-marching methods, *i.e.* a quality of physics close to good U-RANS computations with a faster convergence rate. Up to now, the coupled steady computations have only been solved with explicit time marching, yielding in small time steps, further decreased by the stability criteria which restricts the time step for high frequencies and for a large number of harmonics. In an industrial context, it was therefore necessary to propose an alternative to the explicit time marching. Based on the LU-SSOR decomposition, new block-Jacobi implicit approaches have been derived to reduce the sensitivity of the



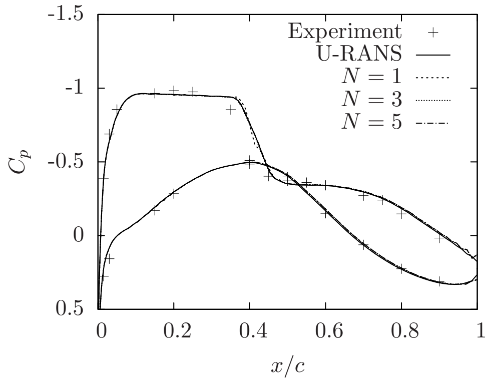
(a) 20.0 % of wing span



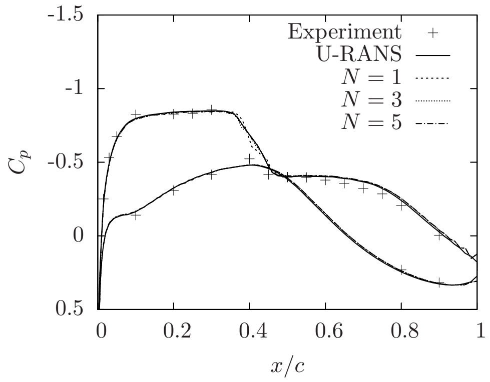
(b) 32.5 % of wing span



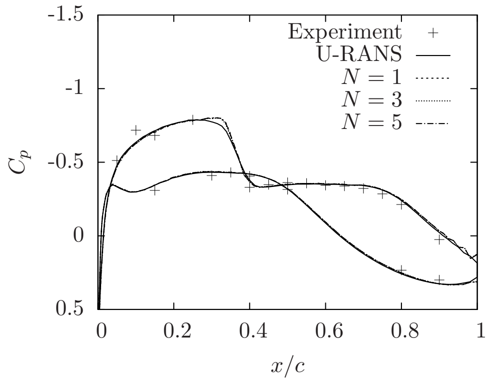
(c) 47.5 % of wing span



(d) 65.0 % of wing span

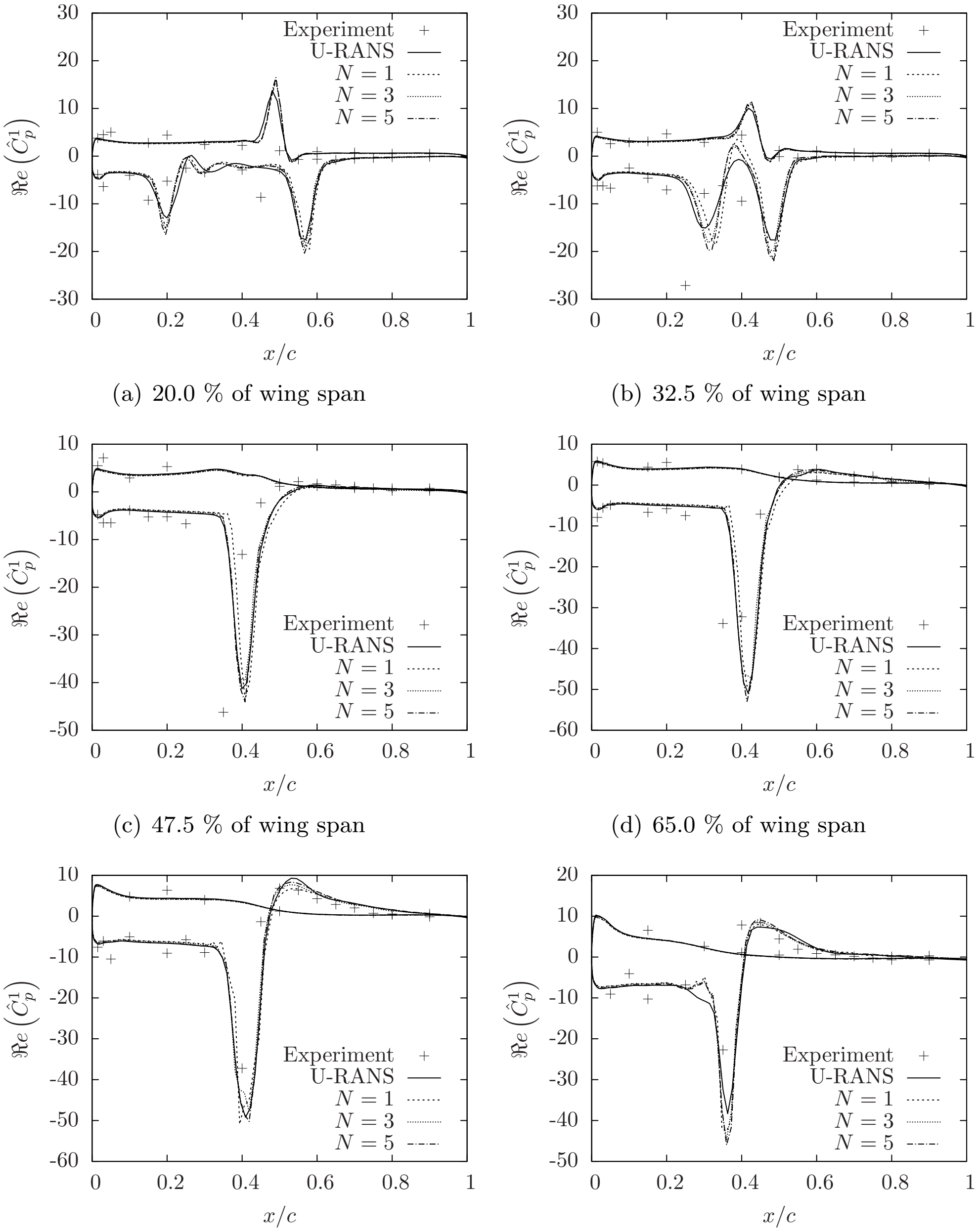


(e) 82.5 % of wing span



(f) 95.0 % of wing span

Figure A.7 – Time average of the wall pressure coefficient C_p.



(a) 20.0 % of wing span

(b) 32.5 % of wing span

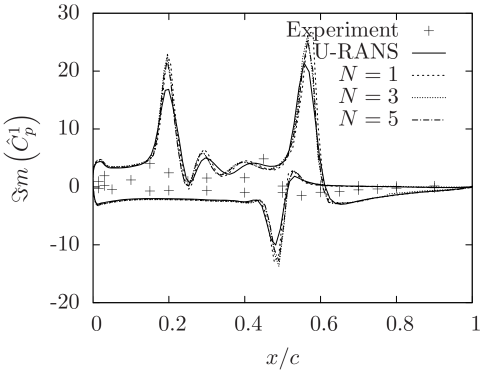
(c) 47.5 % of wing span

(d) 65.0 % of wing span

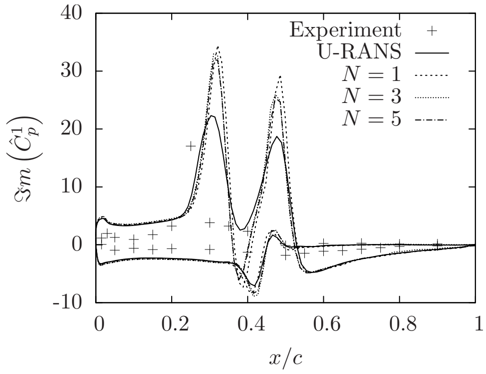
(e) 82.5 % of wing span

(f) 95.0 % of wing span

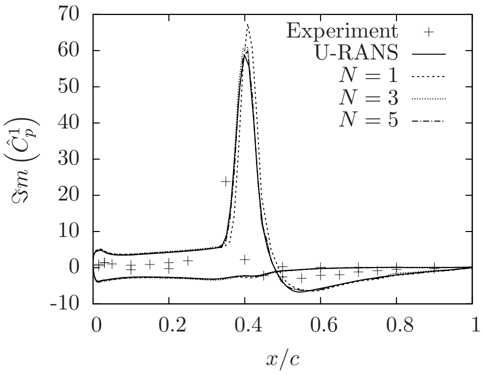
Figure A.8 – Real part of the first harmonic of C_p.



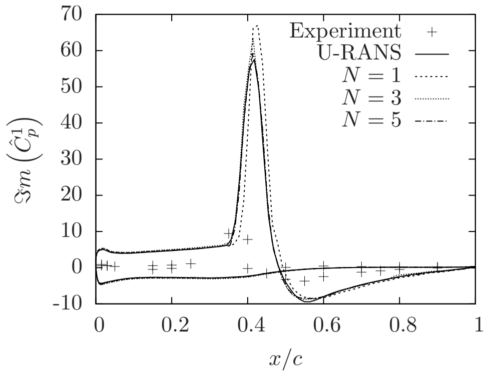
(a) 20.0 % of wing span



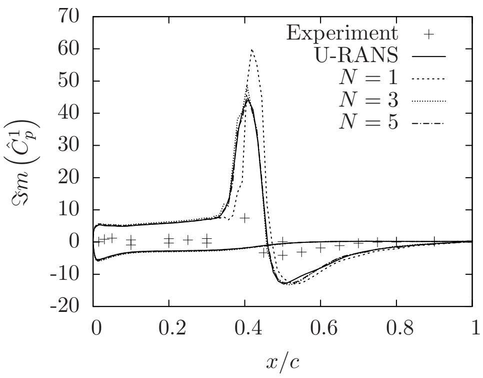
(b) 32.5 % of wing span



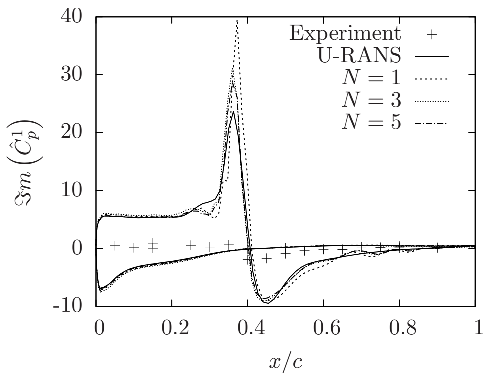
(c) 47.5 % of wing span



(d) 65.0 % of wing span



(e) 82.5 % of wing span



(f) 95.0 % of wing span

Figure A.9 – Imaginary part of the first harmonic of C_p.

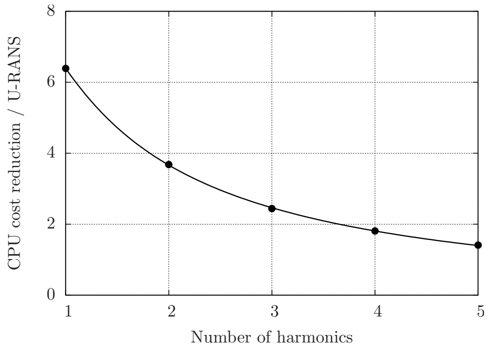


Figure A.10 – CPU cost reduction of TSM compared to the reference U-RANS computation.

method to high frequencies issues. Several solving processes have been tested to retain the most efficient approach. Finally, the BJ-SSOR approach enables better performances and faster convergence.

Our current effort concerns the extension of the Time Spectral Method to turbomachinery. The frequencies met in these applications are much higher than in pitching wing flows and the present implicit treatments should ensure convergence. Even though the BJ-SOR approach does not offer the best CPU performances, it will still be considered for turbomachine applications as it ensures the strongest coupling.

Acknowledgments

This work has benefited from the generous support of the *Direction des Programmes Aéronautiques Civils* (french civil aviation agency) as part of the *Analyse Instationnaire des Turbomachines en aÉrodynamique et aCoustique* (AITEC) program. The authors would also like to thank SNECMA for its active sponsoring. And finally, ONERA, the french aerospace lab and owner of the *elsA* solver, is greatly acknowledged for its scientific support.

Annexe B

Article TSM et traitement de carter

Voici le papier présenté par Legras *et al.* [61] à l'ETC8. Une application de traitement de carter est simulé par la méthode TSM. Il s'agit de la machine CREATE (Compresseur de Recherche pour l'Étude des effets Aérodynamique et Thermique) basé au Laboratoire de Mécanique des Fluide et Acoustique à l'École Centrale de Lyon (voir Arnaud [2]). Le nombres de fentes axiales rajouté autour du rotor est un multiple du nombre d'aubes autorisant une périodicité spatiale simple.

TIME SPECTRAL CALCULATION OF A CASING TREATMENT CONFIGURATION FOR A HIGH PRESSURE COMPRESSOR

G. Legras[1], *N. Gourdain*[2], *F. Sicot*[2], *M. Roumeas*[3]

[1] Aerodynamics Team / Methods and Tools Development Department, SNECMA – SAFRAN GROUP, Rond Point René Ravaud 77550, Moissy-Cramayel, France
[2] Computational Fluid Dynamics Team, CERFACS,
42 av. Gaspard Coriolis 31057, Toulouse, France
[3] Aerodynamics & Turbomachinery Research & Expertise Group, LIEBHERR-AEROSPACE 408, avenue des Etats-Unis, BP 52010, 31016 Toulouse Cedex 2, France

legras@cerfacs.fr / gourdain@cerfacs.fr / sicot@cerfacs.fr / mathieu.roumeas@liebherr.com

ABSTRACT

The accurate and reliable prediction of transonic high pressure compressor with slot-type casing treatments needs costly unsteady simulations. In order to reduce the CPU-time to engineering requirements, the Time Spectral Method dedicated to periodic flow analysis is investigated. This approach is based on an unsteady representation of the flow variables in time Fourier series. This leads to a harmonic balance form of the Navier-Stokes equations which casts a time periodic unsteady problem to a set of several coupled steady calculations solved with conventional RANS methods.

A validation of the TSM is done by comparisons with the classical Unsteady RANS approach. The objectives are to assess its capability to estimate the slot impact on the compressor performances and to compute correctly the strongly non-linear flows due to the casing treatment. In comparison to the Unsteady RANS approach, results obtained with the TSM show an encouraging agreement with only a few numbers of harmonics applied, leading to a reduction of the CPU-time.

NOMENCLATURE

D_t	Spectral time - derivative operator
h	Radial position
E	Energy
H	Compressor span
N	Number of Harmonic
P_{ref}	Reference pressure
Pt_1	Upstream stagnation pressure
Ps_{BC}	Static pressure for the boundary condition
Q	Massflow
Q_{pe}	Massflow at peak efficiency
Q_{stall}	Massflow at stall inception
T	Time period of the rotor ($2\pi/\omega$)
T_{ref}	Reference temperature
Tt_1	Upstream stagnation temperature
V	Volume of a cell
$V_{x\,y,z}$	Components of the relative velocity
W_n	Vector of the conservative and turbulent variables
ρ	Density
η	Isentropic efficiency
λ	Throttle parameter; spectral radius
ω	Rotational speed of the rotor
τ_n	Pseudo-time
Π	Total - total pressure ratio
CFD	Computational Fluid Dynamics
CFL	Courant-Friedrichs-Levy number
CPU	Central Processor Unit
CT	Casing Treatment
DTS	Dual Time Stepping
HPC	High-Pressure Compressor
OR	Operating Range
RANS	Reynolds Averaged Navier-Stokes
SW	Smooth Wall casing
TSM	Time Spectral Method
URANS	Unsteady RANS

INTRODUCTION

To ensure and control a stable operating range for the compressor is a major issue for gas turbine engine industries, due to the difficulties to predict accurately the surge line position at the design stage. As a consequence, designers have to define a surge margin that leads to a decrease of the nominal point efficiency. For High Pressure Compressors (HPC), one of the main difficulties encountered to stabilize the compression system is related to the control of flow in the tip region of rotor blades. Today, it is well-established that the tip leakage vortex is responsible for strong aerodynamic losses and leads, under certain conditions, to a loss of stability with phenomena like rotating stall and surge. These aerodynamic instabilities have been studied for 50 years but the basic mechanisms are not yet fully understood. In order to control the flow in the tip leakage region, Casing Treatment (CT) consisting of slots implemented directly in the casing is a promising way to explore. Over the past decades, various shapes of CT have been investigated both numerically and experimentally with a majority focused on the application to transonic compressors. Some modern CT concepts are based on circumferential casing grooves (Shabbir and Adamczyk (2004), Müller *et al.* (2007)) or slot-type CT (Wilke and Kau (2005), Gourdain *et al.* (2009)). Hathaway (2002) proposed a new method based on casing bleed and injection. This self-recirculating CT concept leads to a significant extension of the stable operating range without penalty for the efficiency. As a general trend, a CT allows a higher range of operability, a higher pressure capability, but its usefulness is often impaired by the reduction in compressor efficiency. An extensive overview of what has been learned from the numerous investigations of passive endwall technologies is provided in Hathaway's lecture notes (Hathaway, (2006)). However, two main difficulties still remain with this technology. The first one is that the flow inside CT and its interaction with the blade passage are essentially unsteady, which requires costly unsteady simulations. The second one is that there is no design guideline for a specific CT which meets the individual aerodynamics requirements of a compressor, mainly due to the lack of knowledge about the mechanisms induced by slots. The second point could be partially overcome if the calculation time was reduced.

To numerically model the time-periodic nonlinear flowfield in compressors with slot-type CT, unsteady RANS calculations are the most common approach. It is effective but not efficient for periodic flows since a large number of time steps must be by-passed before a periodic solution is reached. In order to facilitate simulation for the design optimization of CT, Ning and Xu (2008) have proposed a quasi-steady model for the slot-type CT flows, based on the understanding of the unsteady flow physics of the rotor-CT combination. The form of the model equations is the same as the standard Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS) equations of fluid turbomachinery, leading to a considerable saving in computer resources. Unfortunately, a limitation of the model is the hypothesis that the interaction between the CT and blade passage flow is "continuous", thus the unsteadiness is supposed to be weak. Indeed, the model is valid only when the number of slots is much larger than the number of rotor blades. Regarding the literature, many modern CT concepts are non-axisymmetric in nature and impose to capture the fundamental unsteadiness induced by the interaction between the CT, tip leakage and blade passage, which can affect the rotor performances substantially (Wilke and Kau (2005)). To simulate these effects it is thus required to consider a more flexible method. Recently, Gopinath *et al.* (2005) proposed a new approach, the Time Spectral Method (TSM), which is dedicated to time-periodic-flow problems and is able to reduce significantly the CPU time compared to the URANS approach. This method is a new time-domain algorithm which simulates the true geometry based on a representation in time Fourier series of the flow variables. The unsteady Navier-Sokes equations are cast into a set of steady equations coupled by a source term, which can be viewed as a spectral time-derivate operator. A pseudo-time derivate is added to the steady equations so that conventional pseudo-time marching RANS techniques can be used. This method has been successfully applied to turbomachinery problem such as flutter analysis (Hall *et al.* (2002)) and rotor-stator combination (Gopinath *et al.* (2005)).

The present contribution focuses on two aspects: the capability of the TSM to compute correctly the flow in a transonic HPC with slot-type CT configuration and the CPU-time saving compared to the URANS approach (reference case). The outline of the paper is as follows. In a first part, a general formulation of the TSM method and its stability criteria are explained. In a second section, a brief description of the compressor facility and the slot-type CT geometry is introduced. The meshing strategy and the numerical parameters retained are also described. In a third section, CT configuration computed with the URANS and TSM approaches are presented. Results are analyzed with a particular interest for the impact on the compressor performances and the basic mechanisms linked to the slots at different operating points. Moreover, comparisons between the TSM and the URANS approaches are discussed in order to assess the minimum number of harmonics needed to describe the impact of the slots with engineering accuracy. Finally, a last section concludes on the TSM performances compared to the URANS approach in terms of CPU time restitution and allocated memory.

PRESENTATION OF THE TIME SPECTRAL METHOD

The TSM method allows the calculation of time periodic and non-linear flows with a known frequency ($T = 2\pi/\omega$). A general formulation of the TSM method can be found in the reference Sicot *et al.* (2008). The present section recalls the important changes induced by this formulation on the Navier-Stokes equations and its stability criteria.

The Fourier method is used for the time discretization of the Navier-Stokes equations, leading to spectral accuracy. When the spectral equations are transformed back to the physical domain, the time derivative appears as a high order central difference formula coupling *2N+1* time levels equally spread over the period, where *N* represents the number of harmonics. This new time operator D_t coupling all the instants can be expressed as:

$$D_t(W_n) = \sum_{m=-N}^{N} d_m W_{n+m} , \qquad \text{with } d_m = \begin{cases} \dfrac{\pi}{T}(-1)^{m+1}\csc\left(\dfrac{\pi m}{2N+1}\right) & , m \neq 0, \\ 0 & , m = 0, \end{cases} \tag{1}$$

where W_n is the vector of the conservative $(\rho, \rho V_x, \rho V_y, \rho V_z, \rho E)^T$ and turbulent variables.

A derivative in pseudo-time τ_n is added to the equations in order to time march all the instants to the steady state solutions. Thus, the equations can be solved with conventional pseudo time-marching RANS techniques such as local time stepping and multigrid acceleration. The new equations can be expressed in semi-discrete form as:

$$V\frac{dW_n}{d\tau_n} + R(W_n) + VD_t(W_n) = 0 , \qquad 0 \leq n < 2N+1 , \tag{2}$$

where $R(W_n)$ is the residual vector resulting from spatial discretization of the convective and viscous fluxes and source terms. *V* represents the control volume of a grid cell which is constant in time. The term $VD_t(W_n)$ appears as a source term that represents a high-order formulation of the initial time derivate in the Navier-Stokes semi-discrete form equations. For stability reasons, the computation of the local time step is modified to take into account this additional source term:

$$\Delta\tau = CFL\frac{V}{\|\lambda\| + \omega NV} . \tag{3}$$

The extra term ωNV is added to the spectral radius $\|\lambda\|$ to restrict the time step. Eq. (3) implies that a high frequency and/or a high number *N* of harmonics can considerably constrain the time step, slowing down the convergence of the method for increasing *N*. In order to enhance the method, an implicit algorithm has been implemented by Sicot *et al.* (2008) to reach higher CFL values.

INVESTIGATED COMPRESSOR AND CFD METHOD USED

Description of the compressor and the slot-type casing treatment

The present numerical investigation is performed on a conventional single rotor of a tip critical highly loaded transonic HPC. In order to increase the stable operating range of the compressor, a slot-type CT largely based on the design proposed by Wilke *et al.* (2005) is applied (Figure 1). The present slots are built equally spaced around the sector of one rotor blade passage and are parallel to the rotation axis of the rotor. The CT is inclined opposite to the blade rotation which improves significantly stall range and compressor performances according to the study of Takata and Tsukada (1977). The slot shape is designed as a semi-circle in order to improve flow circulation inside the treatment by avoiding unnecessary stagnation zones. The axial position extends from slightly upstream the leading edge to the mid-chord, which has been showed by Wilke *et al.* (2003) to optimize the CT efficiency by manipulating the upstream tip leakage flow. For industrial configuration reasons, the number of slots within one passage is not mentioned.

Meshing Strategy

The geometrical configuration with casing treatment allows the discretization of a single blade passage in order to save computation time. Thus, the rotor passage is modeled with a block-structured topology (Figure 2). Basic H and O blocks are used to mesh the blade passage with 85 grid points in the span-wise direction which include 25 grid points in the tip gap. For the blade-to-blade direction, 65 grid points are used. The tip region is discretized with an O-H type mesh. An O-H type mesh for the slots is used. For the simulations with the CT, a sliding mesh condition with non-matching points is applied at the interface between the slots and the rotor passage. The non-rotating grids of the casing slots are linked to a very thin base that is connected with the rotor passage through a sliding interface. Compared with the Chimera technique, interpolation coefficients are computed only for 2D interfaces, which induce less CPU and memory requirements. Moreover, this boundary condition is conservative in the case of a plane interface between blocks, which is roughly the case here. A preliminary study on the smooth wall (SW) case has shown that the results with and without the thin base mesh are similar, with insignificant differences in compressor performances. In this present study, the mesh was clustered towards the solid boundaries in order to meet the resolution requirement of $y^+ \leq 2$. A preliminary study has shown the grid capability to compute mesh independent results for steady calculations. So far, no detail grid refinement studies have been carried out for the unsteady case due to massive time requirements. However, the authors believe that this meshing is suitable for unsteady simulations as well. Finally, the total number of mesh points for the SW case is approximately $1.2\ 10^6$ nodes and $1.6\ 10^6$ for the CT configuration.

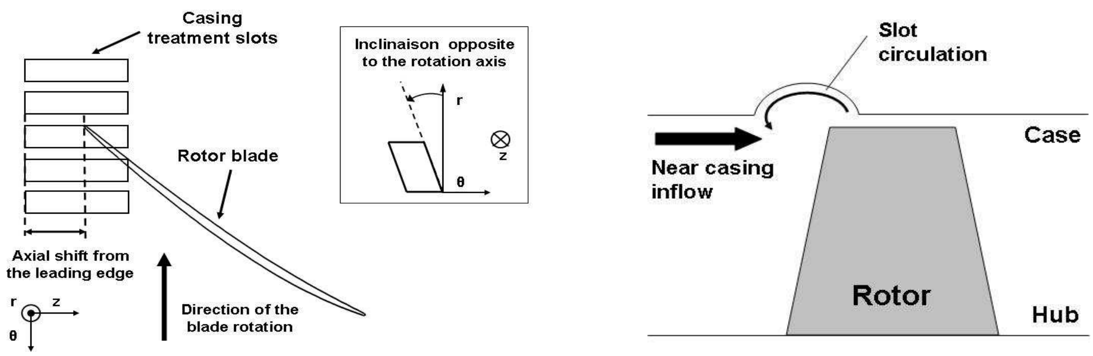


Figure 1. Illustrations of the simulated casing treatment.

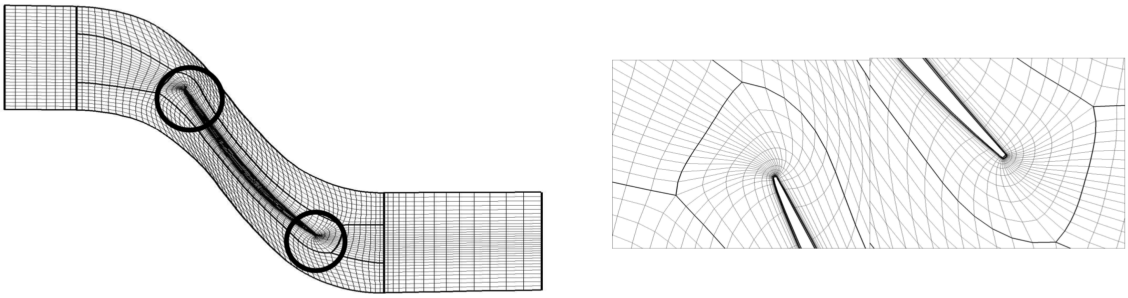


Figure 2. Multi-block structured mesh and details near the leading edge and trailing edge.

Numerical Method

All results presented in this paper are performed with the elsA software developed by ONERA and CERFACS (Cambier and Veuillot (2008)). This code solves the RANS equations using a cell centered approach on multi-block structured meshes in the reference frame of each row. The CT configuration is simulated with the TSM and URANS approach (reference case). In the present study, the numerical parameters have been chosen after a previous campaign of tests (results not shown) whose aim was to analyse the robustness of the TSM method with different convective flux schemes and time integration methods. Based on the observations, the optimized combination retained for all simulations is as follow. The convective fluxes are discretized with a 2nd order centered Jameson scheme (Jameson *et al.* (1981)).The 2nd and 4th order viscosity coefficients are applied to stabilize the numerical scheme, while an upwind Roe scheme with Harten's entropy fix discretizes the additional turbulence transport equations. The time marching algorithm is a backward Euler scheme based on a LU decomposition and the SSOR resolution. For the TSM calculations, the convergence is accelerated using a standard geometrical multigrid algorithm. Concerning the URANS computation, a second order Dual Time Stepping (DTS) is used in order to define greater time steps than with a full explicit integration. For this study, computations are done with 250 physical time steps for one rotor blade passage. To reach a converged state, the number of sub-iterations for the inner loop is equal to 5 leading to a decrease of two orders for the inner loop residuals. The numbers of time steps and sub-iterations are assumed to be sufficient to capture correctly physical structures near the blade tip. For this study, the turbulent viscosity is computed with the two-equation model proposed by Wilcox (1988) based on a *k-ω* formulation. Moreover, the compressor flow is assumed to be fully turbulent.

Concerning the boundary conditions, a condition of spatial periodicity is applied for the lateral boundaries. At solid boundaries, an adiabatic wall condition is imposed. A condition of axial injection is applied at the inlet. To model the outlet duct, a throttle condition given by Eq.(4) is coupled with a simplified radial equilibrium. Then the characteristic of the compressor is described from the choked point to the stall inception point, simply by increasing the value of the throttle parameter λ. One advantage of this boundary condition is the possibility to simulate the peak of pressure ratio and operating points with lower mass flow.

$$Ps_{BC} = P_{ref} + \lambda Q^2 \tag{4}$$

VALIDATION AND ASSESSMENT

In this section, results of the CT configuration computed using the TSM are compared with those obtained with the URANS approach. For this test case, simulation with values of $N = 1$, 2, 3 and 4 harmonics (respectively 3, 5, 7 and 9 time intervals per blade passing) are performed to assess the minimum number of harmonic needed to describe correctly the CT case. Note that the $N = 1$ case resolves only the rotor blade passing frequency. To validate the method, comparisons are discussed on the main aspect of the impact induced by slots. On a first part, compressor performances are evaluated with a particular interest on the stable operating range predicted. The second part deals with flow details analysis. Thus, time-averaged solutions are compared, through which the mean-mechanisms of interaction between CT and the blade passage are expected to be observed. Furthermore, instantaneous solutions are considered in order to conclude on the TSM capacity to capture all the important unsteady flow mechanisms essential for understanding the influence of slots.

The coupled flow through the rotor blade passage and the treatment region is simulated for different operating points at design speed. The characteristic covers the range between a point near choke and the last numerically stable point, namely, the near stall point. In order to save CPU-time for the URANS and TSM computations, the steady-state solution from the SW configuration (not presented here) is taken as an initial flowfield. However, in order to properly compare the results, it may be useful to have fixed rate, which is the operation of the machine under normal temperature and pressure. The Eq.(5) is used to correct the massflow.

$$Q_{corrected} = Q\frac{\sqrt{Tt_1/T_{ref}}}{Pt_1/P_{ref}}, \tag{5}$$

When resolving a periodic problem with the TSM approach, one has to avoid simulating the same geometrical problem for each instants considered. Typically, this problem can occur for a configuration with the same number of slots (equally spread in the circumferential direction) as time intervals solved. In this case, all instants correspond exactly to the same geometrical configuration leading to a purely steady problem. This can be avoided with another approach that does not consider equally spaced time instant for a period (not applied here).

Compressor maps

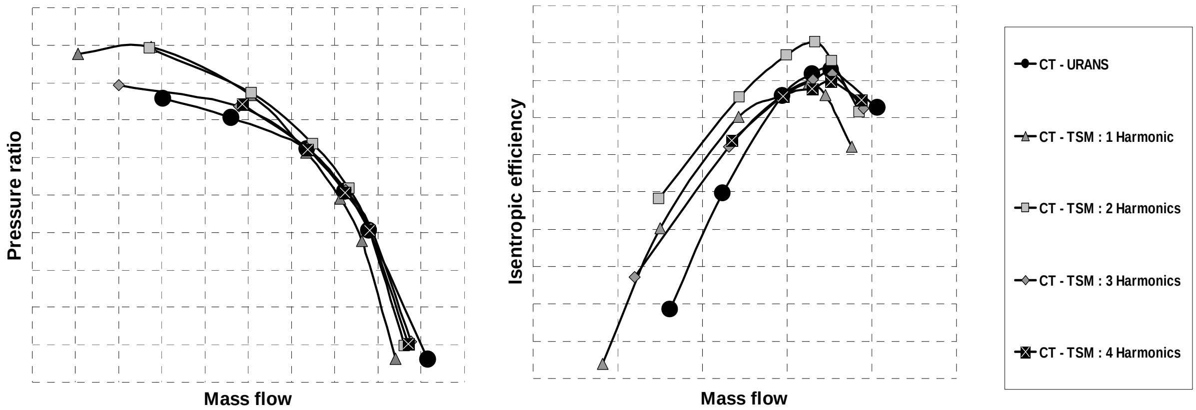
Figure 3 presents total pressure ratio and isentropic efficiency maps. It compares the results of the CT configuration obtained by the URANS and TSM approaches. To give an overview of the TSM numerical results, Table 1 presents a comparison of the performances with the URANS approach. Therefore the individual relative stall margin ΔOR, from peak efficiency operating conditions has been calculated according to Eq.(6):

$$\Delta OR = \frac{Q_{pe} - Q_{stall}}{Q_{pe}}, \tag{6}$$

where ΔOR is the relative stall margin, Q_{pe} is the mass flow rate at peak efficiency and Q_{stall} stands for the mass flow rate at stall inception.

In Figure 3, it is seen that TSM cases are able to identify the same operating range except for the $N = 1$ case which lowers the stall mass flow, thus over predicting the operating range by about 30% (Table 1). For the pressure ratio characteristics (Figure 3.a.), all the results using the TSM match up to the URANS solution from the near choke condition to the URANS peak efficiency operating point. Near the URANS stall condition, a difference between the TSM and URANS approaches clearly appears depending on the number of harmonics considered. Only the $N \geq 3$ results are relevant, while some discrepancies are observed for both $N = 1$ and $N = 2$ cases which deliver higher total pressure ratio with a maximum delta by about 1.3%. These differences are magnified on the isentropic efficiency characteristics. In Figure 3.b. the efficiency predicted by $N = 1$ and $N = 2$ cases show different trend compared to URANS, with an increase of the CT efficiency between the URANS peak efficiency condition to the near stall point. Moreover, the maximum efficiency respectively dropped by 0.34% and rose by 0.8%. Fortunately, the $N \geq 3$

results are conclusive with insignificant differences compared to the URANS characteristics. These observations suggest that physical phenomena related to CT are correctly captured for a minimum harmonic number of 3.



a) Pressure ratio **b) Isentropic efficiency**

Figure 3. Comparisons of the compressor maps obtained with the URANS and the TSM approaches.

Number of harmonic(s)	$\Delta\Pi_{max}$ [%]	$\Delta\eta_{max}$ [%]	$\Delta OR/\Delta OR_{URANS}$ [-]
1	+ 1.32	- 0.34	1.3
2	+ 1.28	+ 0.76	0.98
3	+0.3	-0.10	1.2
4	-	-0.32	-

Table 1. Performances of the TSM method compared to the URANS approach.

Flow details analysis of CT configuration

The mechanisms induced by slots are very similar to the case studied by Wilke *et al.* (2005). The CT configuration is basically designed to damp the growth of the blocage zone at the blade leading edge (which appears in the SW case) by bleeding fluid into slots. This leakage fluid is transported in the upstream direction and is re-injected into the main flow in front of the blade row. This phenomenon is driven by the pressure gradient between the up- and downstream areas in the blade passage. Moreover, the shock system is significantly modified by this mechanism compared to the SW case, leading to a shift downstream in the passage of the front blade passage shock.

The main objective of this section is to explain the differences on the performances prediction of the CT configuration between the TSM and the URANS approaches. Thus, the URANS peak efficiency point conditions have been retained for the flow analysis. At this operating point, the previous section has shown conclusive results on the pressure ratio but some discrepancies concerning the compressor efficiency. In order to analyze the quality of the TSM prediction, Figure 4.a. and Figure 4.b. show respectively the time-averaged axial velocity and the instantaneous radial velocity distributions in the tip wall region (h/H=95%). The white lines represent the shock line.

For the URANS reference case, the time-mean impact of the slots is clearly underlined in Figure 4.a. A stripe of low axial velocity upstream the blade leading edge characterizes the time mean blowing effect of the slots. Likewise, a region of high velocity is observed in the blade passage near the leading edge due to the bleeding effect. This increase of the axial momentum in the region leads to a downstream shift of the front blade passage shock. Moreover, the tip leakage vortex interacts with the blade passage shock at mid-distance between the pressure and suction sides. A strong area of low velocity then appears downstream of the shock. The URANS instantaneous distribution demonstrates that the influence of the CT on the flowfield is mainly unsteady (Figure 4.b). The previous flow region featured by re-injection to the blade passage is accurately described by zones of negative radial velocity.

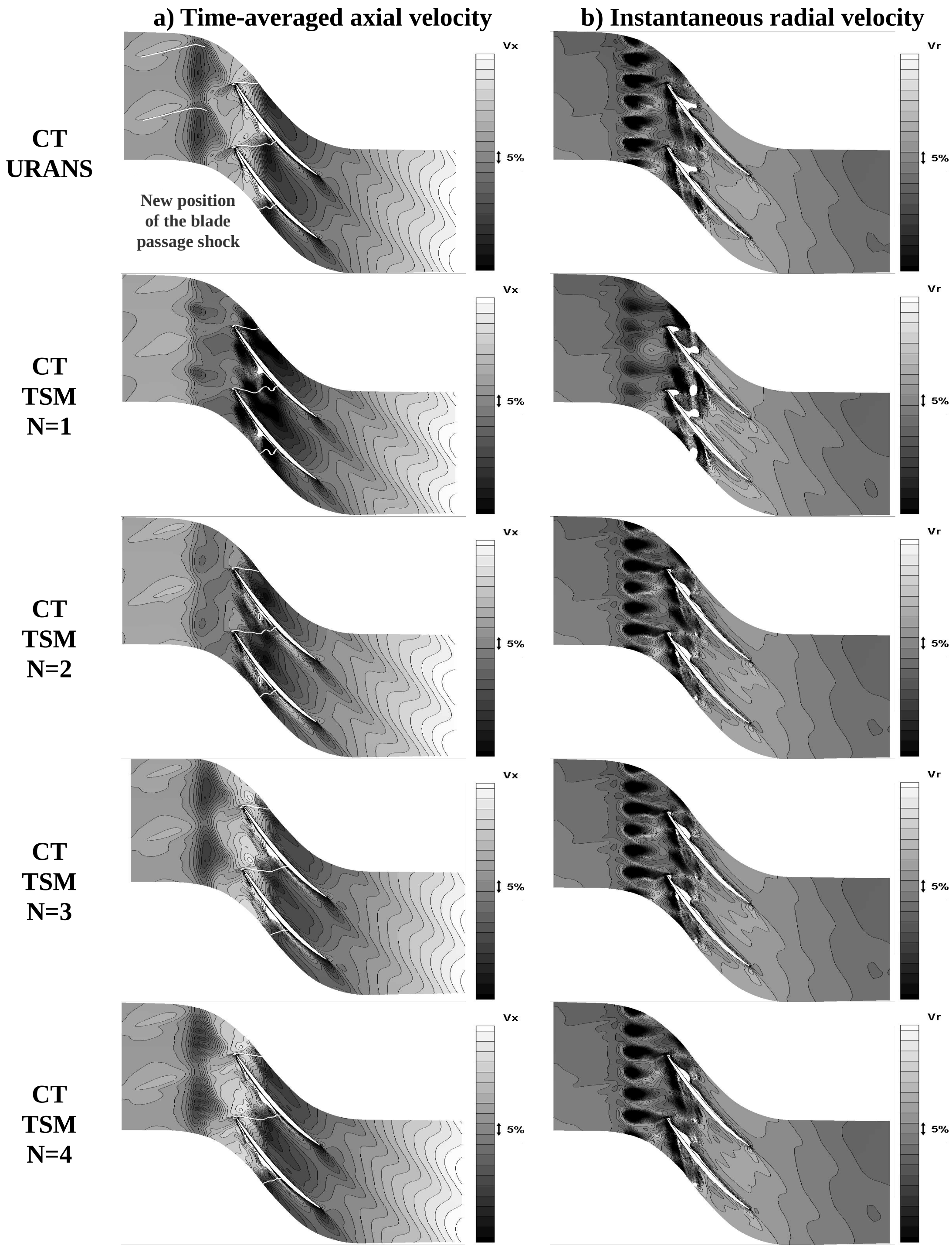


Figure 4. Time mean axial velocity and instantaneous radial velocity flowfield at the blade tip region (h/H=95%) for the URANS peak efficiency point.

Concerning the TSM approach, the fidelity with the URANS results clearly appears to depend on the number of harmonics considered. The $N=1$ and 2 cases are able to predict a time-averaged impact of slots with a lower level of magnitude. This observation suggests a reduction of the CT influence on the tip region. In fact, Figure 4.a shows a decrease of the axial velocity in the previous bleeding region by about 30% compared to URANS prediction. This confirms the reduction of the bleeding effect, though a decrease of the recirculation magnitude. As a consequence, the intensity of the re-injection is lower, which is confirmed by the region of over-predicted axial velocity upstream the leading edge (by about 15-20% compared to the URANS solutions). However, the position of the passage shock is correctly predicted. Moreover, the instantaneous results (Figure 4.b) demonstrate a difficulty to capture correctly the unsteadiness induced by slots in the tip region. These observations on the $N=1$ and $N=2$ cases explain the discrepancies observed on the efficiency characteristics. For the $N\geq 3$ cases, the time-averaged results are predicted quite well, with negligible differences compared to the URANS solution. In contrast to previous cases, the $N\geq 3$ cases predict remarkably well the global CT impact with insignificant differences (Figure 4.a). This is confirmed by the instantaneous distribution which demonstrate the capability to capture with a high level of accuracy the unsteadiness induced by slots. Furthermore, a minimum number of 3 harmonics is sufficient to capture the frequency of the unsteadiness.

Performances evaluation of the TSM method

To reach a decrease of 2 orders of magnitude, more iterations are required to converge with an increasing harmonic number. The difficulty to converge is mainly due to the constraint on the time step (Eq (3)). Figure 5 illustrates the evolution of the maximum CFL number depending on the harmonic number. The current curve tends to severely decrease, thus revealing the limitation on the application of the TSM for high number of harmonics with the current implementation.

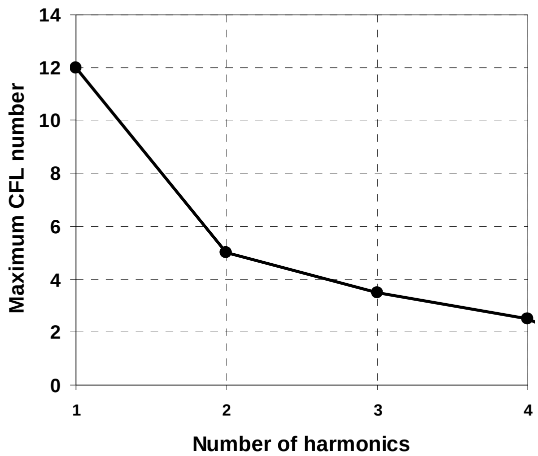
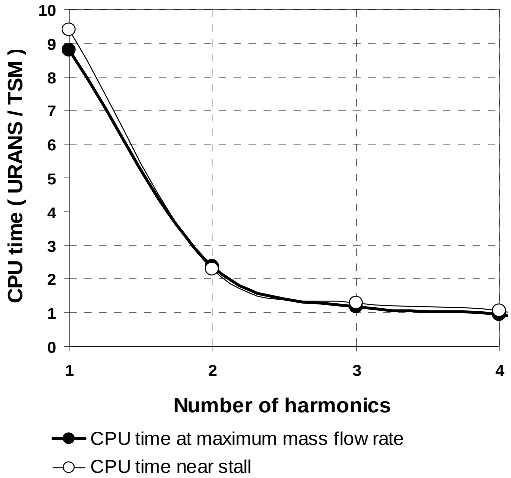
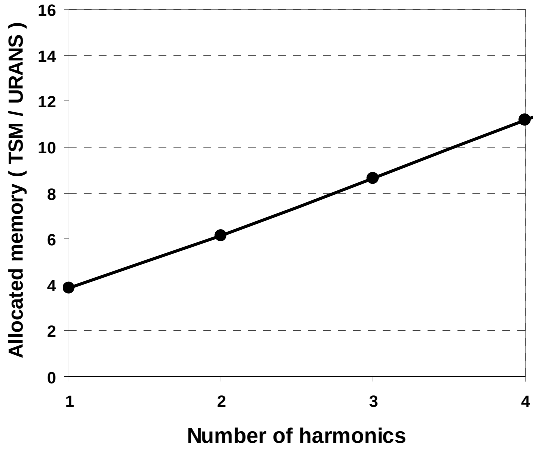


Figure 5. Evolution of the maximum CFL number depending on the number of harmonics.

In order to compare the effectiveness between TSM and URANS approaches, Figure 6 shows respectively the time benefit (Figure 6.a.) for the near choke point and the near stall point and the allocated memory (Figure 6.b.). The TSM leads to a saving of a factor 9 in CPU-time for the N=1 case. This factor decreases with higher number of harmonics and finally reduces to 1.3 with N=3 compared to the URANS approach. However, results in Figure 6.b. indicate a linear growth of the allocated memory which is approximately proportional to *(2N+1)+1*, with *N* number of harmonics solved. Since the TSM method implemented in the code solves all the *2N+1* instants simultaneously, it requires the allocation of *2N+1* instants in the memory. For example for N=1, the code allocates in the memory 3 times the configuration while for URANS it allocates once the configuration. The adding factor *"+1"* in the formula *"(2N+1)+1"* refers to some memory dedicated to the multigrid algorithm used in the TSM method which is not applied to the URANS calculations. If the multigrid algorithm were not applied, the allocated memory factor would be approximately *(2N+1).*





a) Time restitution **b) Allocated memory**

Figure 6. Performances evaluation of the TSM method compared to the URANS approach.

CONCLUSIONS

In this paper, the Time Spectral Method has been validated for modeling a configuration of transonic HPC with slot-type casing treatment. The objectives were to find for this type of configuration a flexible method capable to correctly predict the strongly non-linear flows induced by slots, and to reduce significantly the CPU-time to engineering requirements.

Comparisons with the URANS approach reveal that TSM is computationally efficient. Results demonstrate that a convergence step on the harmonic number is required to achieve the same engineering accuracy than URANS approach. In the present study, a relatively small number of time intervals has been used to have a correct description of the flowfield, leading to a saving of 30% in CPU-time with N=3. One has to take into account that the TSM application comes with a growth of the allocated memory which is approximately proportional to (*2N+1)+1*, where *N* is the number of instants solved.

Results demonstrate that the method is able to correctly predict the performances and the effects of unsteadiness induced by slots. The TSM is suitable for configurations with slot-type casing treatments since the simulation cost can be largely reduced and can facilitate the design optimization. A CPU-time reduction could then be provided by the application of a phase-lagged periodicity condition between casing treatment and the rotor blade. In fact, the case considering the blade passing frequency N=1 harmonic number would be sufficient since the phase-lagged condition permits the direct calculation of the blade/slot passing frequency. A gain in CPU-time of a factor of 10 could be expected.

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors would like to thank Snecma, SAFRAN group, for its permission to publish this paper.

REFERENCES

Cambier L., Veuillot J.-P., (2008), “Status of the elsA Software for Flow Simulation and Multidisciplinary Applications”, 46th AIAA Aerospace Science Meeting and Exhibit, Reno, paper 2008-664, USA.

Gopinath A.K., Van der Weide E., Alonso J., Jameson A., (2007), “Three-Dimensional Unsteady Multi-stage Turbomachinery Simulations using the Harmonic Balance Technique”, 45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, AIAA Paper 2007-0892, Reno, Nevada.

Gourdain. N. and Leboeuf F., (2009) “Unsteady Simulation of an Axial Compressor Stage with Casing and Blade Passive Treatments”, ASME Journal of Turbomachinery, in press.

Hall K. C., J. P. Thomas, and W. S. Clark, (2002), “Computation of Unsteady Nonlinear Flows in Cascades using a Harmonic Balance Technique”, AIAA Journal, vol. 40 No.5, pp. 879-886.

Hathaway M.D., (2002), “Self-Recirculating Casing Treatment Concept for Enhanced Compressor Performance”, ASME Turbo Expo, paper GT2002-30368, Amsterdam, The Netherlands.

Hathaway M.D., (2006), “Passive Endwall Treatments for Enhancing Stability”, in the Proceedings of the Von Karman Institute Lecture Series 2006-06 *Advances in Axial Compressor Aerodynamics*.

Jameson A., Schmidt W., Turkel E., (1981), “Numerical Solution of the Euler Equations by Finite Volume Methods using Runge-Kutta Time Stepping Schemes”, AIAA paper 81-1259, 14th Fluid and Plasma Dynamics Conference, Palo Alto, USA.

Müller M. W., Schiffer H.-P., Hah C., (2007), “Effect of Circumferential Grooves on the Aerodynamic Performance of an Axial Single-Stage Transonic Compressor”, ASME Turbo Expo 2007, paper GT2007-27365, Montreal, Canada.

Ning F., Xu L., (2008), “Aerodynamics of Compressor Casing Treatment Part II: A Quasi-Steady Model for Casing Treatment Flows”, ASME Turbo Expo 2008, paper GT2008-51542, Berlin, Germany.

Shabbir A., Adamczyk J. J., (2004), “Flow Mechanism for Stall Margin Improvement due to Cirucumferential Casing Grooves on Axial Compressors”, ASME Turbo Expo 2004, paper GT2004-53903, Vienna, Austria.

Sicot F., Puigt G., Montagnac M., (2008), “Block-Jacobi Implicit Algorithms for the Time Spectral Method”, AIAA Journal, vol.46 no.12, pp. 3080-3089,

Takata H., Tsukada Y., (1977), “Study on the Mechanism of Stall Margin Improvement of Casing Treatment”, ASME Journal of Engineering for Power, pp. 121-133.

Wilcox D., (2008), “Reassesment of the Scale Determining Equation for Advanced Turbulence Models”, AIAA Journal, vol. 26, pp. 1299-1310.

Wilke I., Kau H.-P., (2003), “A Numerical Investigation of the Influence of Casing Treatments on the Tip Leakage Flow in a HPC Front Stage”, ASME Turbo Expo 2003, paper GT2003-38481, Atlanta, USA.

Wilke I., Kau H.-P., (2005), “Numerically Aided Design of a High-Efficient Casing Treatment for a Transonic Compressor”, ASME Turbo Expo 2005, paper GT2005-68993, Reno-Tahoe, USA.

Annexe C

Personnels HDR à l'ECL

Voici la liste des personnels de l'École Centrale de Lyon (ECL) habilitées à diriger des recherches (HDR) au 16 juin 2009.

Ecole Centrale de Lyon

Direction de la Recherche

Liste des personnes Habilitées à Diriger des Recherches en poste à l'Ecole Centrale de Lyon

Nom-Prénom	Corps grade	Laboratoire ou à défaut département ECL	Etablissement
AURIOL Philippe	professeur	AMPERE	ECL
BEROUAL Abderrahmane	professeur	AMPERE	ECL
BURET François	maître de conférences	AMPERE	ECL
JAFFREZIC-RENAULT Nicole	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
KRÄHENBÜHL Laurent	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
MARTELET Claude	professeur	AMPERE	ECL
NICOLAS Alain	professeur	AMPERE	ECL
NICOLAS Laurent	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
SIMONET Pascal	chargé de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
THOMAS Gérard	professeur	AMPERE	ECL
VOLLAIRE Christian	maître de conférences	AMPERE	ECL
		Nbre Ampère 11	

HELLOUIN Yves	maître de conférences	DER EEA	ECL
LE HELLEY Michel	professeur	DER EEA	ECL
		Nbre DER EEA 2	

GUIRALDENQ Pierre	professeur émérite	DER STMS	ECL
VINCENT Léo	professeur	DER STMS	ECL
		Nbre DER STMS 2	

LOHEAC Jean-Pierre	maître de conférences	ICJ	ECL
MAITRE Jean-François	professeur émérite	ICJ	ECL
MARION Martine	professeur	ICJ	ECL
MOUSSAOUI Mohand	professeur	ICJ	ECL
MUSY François	maître de conférences	ICJ	ECL
ROUY MIRONESCU Elisabeth	professeur	ICJ	ECL
ZINE Abdel-Malek	maître de conférences	ICJ	ECL
		Nbre ICJ 7	

DAVID Bertrand	professeur	ICTT	ECL
		Nbre ICTT 1	

CALLARD Anne-Ségolène	maître de conférences	INL	ECL
CLOAREC Jean-Pierre	maître de conférences	INL	ECL
GAFFIOT Frédéric	professeur	INL	ECL
GAGNAIRE Alain	maître de conférences	INL	ECL
GARRIGUES Michel	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
GENDRY Michel	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
GRENET Geneviève	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
HOLLINGER Guy	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL

JOSEPH Jacques	*professeur*	INL	ECL
KRAWCZYK Stanislas	*directeur de recherche*	INL	CNRS/ECL
LETARTRE Xavier	*chargé de recherche*	INL	CNRS/ECL
MARTIN Jean-René	*professeur émérite*	INL	ECL
O'CONNOR Ian	*maître de conférences*	INL	ECL
PHANER-GOUTORBE Magali	*professeur*	INL	ECL
ROBACH Yves	*professeur*	INL	ECL
SAINT-GIRONS Guillaume	*chargé de recherche*	INL	CNRS/ECL
SEASSAL Christian	*chargé de recherche*	INL	CNRS/ECL
SOUTEYRAND Eliane	*directeur de recherche*	INL	CNRS/ECL
TARDY Jacques	*directeur de recherche*	INL	CNRS/ECL
VIKTOROVITCH Pierre	*directeur de recherche*	INL	CNRS/ECL

Nbre INL 20

CHEN Liming	*professeur*	LIRIS	ECL

Nbre LIRIS 1

BAILLY Christophe	*professeur*	LMFA	ECL
BERTOGLIO Jean-Pierre	*directeur de recherche*	LMFA	CNRS/ECL
BLANC-BENON Philippe	*directeur de recherche*	LMFA	CNRS/ECL
BOGEY Christophe	*chargé de recherche*	LMFA	CNRS/ECL
CAMBON Claude	*directeur de recherche*	LMFA	CNRS/ECL
CARRIERE Philippe	*chargé de recherche*	LMFA	CNRS/ECL
CHAMPOUSSIN J-Claude	*professeur émérite*	LMFA	ECL
COMTE-BELLOT genevièvre	*professeur émérite*	LMFA	ECL
FERRAND Pascal	*directeur de recherche*	LMFA	CNRS/ECL
GALLAND Marie-Annick	*maître de conférences*	LMFA	ECL
GODEFERD Fabien	*chargé de recherche*	LMFA	CNRS/ECL
GOROKHOVSKI Mikhail	*professeur*	LMFA	ECL
HENRY Daniel	*directeur de recherche*	LMFA	CNRS/ECL
JEANDEL Denis	*professeur*	LMFA	ECL
JUVE Daniel	*professeur*	LMFA	ECL
LE RIBAULT Catherine	*chargée de recherche*	LMFA	CNRS/ECL
LEBOEUF Francis	*professeur*	LMFA	ECL
PERKINS Richard	*professeur*	LMFA	ECL
ROGER Michel	*professeur*	LMFA	ECL
SCOTT Julian	*professeur*	LMFA	ECL
SHAO Liang	*chargé de recherche*	LMFA	CNRS/ECL
SIMOENS Serge	*chargé de recherche*	LMFA	CNRS/ECL
TREBINJAC Isabelle	*maître de conférences*	LMFA	ECL

Nbre LMFA 23

BENAYOUN Stéphane	*professeur*	LTDS	ECL
CAMBOU Bernard	*professeur*	LTDS	ECL
COQUILLET Bernard	*maître de conférences*	LTDS	ECL
DANESCU Alexandre	*maître de conférences*	LTDS	ECL
FOUVRY Siegfrid	*chargé de recherche*	LTDS	CNRS/ECL
GEORGES Jean-Marie	*professeur émérite*	LTDS	ECL
GUERRET Chrystelle	*chargé de recherche*	LTDS	CNRS/ECL
HERTZ Dominique	*past*	LTDS	ECL
ICHCHOU Mohamed	*maître de conférences*	LTDS	ECL
JEZEQUEL Louis	*professeur*	LTDS	ECL
JUVE Denyse	*ingénieur de recherche*	LTDS	ECL
KAPSA Philippe	*directeur de recherche*	LTDS	CNRS/ECL
LE BOT Alain	*chargé de recherche*	LTDS	CNRS/ECL

LOUBET Jean-Luc	*directeur de recherche*	LTDS	CNRS/ECL
MARTIN Jean-Michel	*professeur*	LTDS	ECL
MATHIA Thomas	*directeur de recherche*	LTDS	CNRS/ECL
MAZUYER Denis	*professeur*	LTDS	ECL
PERRET-LIAUDET Joël	*maître de conférences*	LTDS	ECL
SALVIA Michelle	*maître de conférences*	LTDS	ECL
SIDOROFF François	*professeur*	LTDS	ECL
SINOU Jean-Jacques	*maître de conférences*	LTDS	ECL
STREMSDOERFER Guy	*professeur*	LTDS	ECL
THOUVEREZ Fabrice	*professeur*	LTDS	ECL
TREHEUX Daniel	*professeur*	LTDS	ECL
VANNES André-Bernard	*professeur émérite*	LTDS	ECL
		Nbre LTDS 25	
	Total HdR ECL	91	

Annexe D

GNU Free Documentation License

L'utilisation d'images couvertes par la « GNU Free Documentation License (GFDL) » oblige à la reproduire ici.

Preamble

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document "free" in the sense of freedom : to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondarily, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of "copyleft", which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation : a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals ; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

1. APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The "**Document**", below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as "**you**". You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.

A "**Modified Version**" of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A "**Secondary Section**" is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document's overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The "**Invariant Sections**" are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.

The "**Cover Texts**" are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A "**Transparent**" copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not "Transparent" is called "**Opaque**".

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.

The "**Title Page**" means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, "Title Page" means the text near the most prominent appearance of the work's title, preceding the beginning of the body of the text.

The "**publisher**" means any person or entity that distributes copies of the Document to the public.

A section "**Entitled XYZ**" means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as "**Acknowledgements**", "**Dedications**", "**Endorsements**", or "**History**".) To "**Preserve the Title**" of such a section when you modify the Document means that it remains a section "Entitled XYZ" according to this definition.

The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties : any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

2. VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

3. COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts : Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

4. MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version :

A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.
B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.
C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.
D. Preserve all the copyright notices of the Document.
E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.
F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.
G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.
H. Include an unaltered copy of this License.
I. Preserve the section Entitled “History”, Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled “History” in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.
J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the “History” section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.
K. For any section Entitled “Acknowledgements” or “Dedications”, Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.
L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.
M. Delete any section Entitled “Endorsements”. Such a section may not be included in the Modified Version.

N. Do not retitle any existing section to be Entitled “Endorsements” or to conflict in title with any Invariant Section.

O. Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section Entitled “Endorsements”, provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties—for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another ; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

5. COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections Entitled “History” in the various original documents, forming one section Entitled “History” ; likewise combine any sections Entitled “Acknowledgements”, and any sections Entitled “Dedications”. You must delete all sections Entitled “Endorsements”.

6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an “aggregate” if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation's users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

8. TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled “Acknowledgements”, “Dedications”, or “History”, the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

9. TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided under this License. Any attempt otherwise to copy, modify, sublicense, or distribute it is void, and will automatically terminate your rights under this License.

However, if you cease all violation of this License, then your license from a particular copyright holder is reinstated (a) provisionally, unless and until the copyright holder explicitly and finally terminates your license, and (b) permanently, if the copyright holder fails to notify you of the violation by some reasonable means prior to 60 days after the cessation.

Moreover, your license from a particular copyright holder is reinstated permanently if the copyright holder notifies you of the violation by some reasonable means, this is the first time you have received notice of violation of this License (for any work) from that copyright holder, and you cure the violation prior to 30 days after your receipt of the notice.

Termination of your rights under this section does not terminate the licenses of parties who have received copies or rights from you under this License. If your rights have been terminated and not permanently reinstated, receipt of a copy of some or all of the same material does not give you any rights to use it.

10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See http ://www.gnu.org/copyleft/.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License “or any later version” applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document specifies that a proxy can decide which future versions of this License can be used, that proxy’s public statement of acceptance of a version permanently authorizes you to choose that version for the Document.

11. RELICENSING

“Massive Multiauthor Collaboration Site” (or “MMC Site”) means any World Wide Web server that publishes copyrightable works and also provides prominent facilities for anybody to edit those works. A public wiki that anybody can edit is an example of such a server. A “Massive Multiauthor Collaboration” (or “MMC”) contained in the site means any set of copyrightable works thus published on the MMC site.

“CC-BY-SA” means the Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 license published by Creative Commons Corporation, a not-for-profit corporation with a principal place of business in San Francisco, California, as well as future copyleft versions of that license published by that same organization.

“Incorporate” means to publish or republish a Document, in whole or in part, as part of another Document.

An MMC is “eligible for relicensing” if it is licensed under this License, and if all works that were first published under this License somewhere other than this MMC, and subsequently incorporated in whole or in part into the MMC, (1) had no cover texts or invariant sections, and (2) were thus incorporated prior to November 1, 2008.

The operator of an MMC Site may republish an MMC contained in the site under CC-BY-SA on the same site at any time before August 1, 2009, provided the MMC is eligible for relicensing.

ADDENDUM : How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page :

> Copyright © YEAR YOUR NAME. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation ; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".

If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the "with ... Texts." line with this :

> with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST.

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.

Résumé

De nombreuses applications industrielles impliquent des écoulements périodiques en temps. La détermination d'une frontière de flottement d'une aile ou les écoulements rencontrés dans les compresseurs de moteurs d'avions constituent quelques exemples. Les méthodes instationnaires classiques de simulation ne sont pas assez efficaces puisque l'état périodique n'est atteint qu'après un long transitoire. De nouvelles méthodes dédiées à ce type d'écoulements ont été étudiées récemment. Ces méthodes, dites d'équilibrage harmonique, permettent de simuler un écoulement périodique en temps à l'aide de plusieurs calculs stationnaires couplés. L'efficacité de ces méthodes permet d'obtenir un degré de précision suffisant pour l'ingénieur beaucoup plus rapidement que les méthodes classiques.

Cette thèse se propose de mettre en œuvre l'une de ces méthodes, la Time Spectral Method (TSM), dans le solveur *elsA* de l'Onera. Elle est étendue à une formulation prenant en compte les déformations de maillage pour des applications en aéroélasticité et des algorithmes implicites sont également développés afin d'améliorer la robustesse. La TSM est d'abord validée avec succès sur des applications d'aérodynamique externe. L'extension aux turbomachines nécessite des interpolations temporelles et spatiales complexes pour réduire le domaine de calcul à un seul canal par roue quelque soit la géométrie. Des applications d'interactions rotor/stator et d'aéroélasticité sont présentées.

Mots clés : équilibrage harmonique, turbomachine, interaction rotor/stator, aéroélasticité

Abstract

Many industrial applications involve flows periodic in time. Flutter prediction or turbomachinery flows are some examples. Such flows are not simulated with enough efficiency when using classical unsteady techniques as a transient regime must be by-passed. New techniques, dedicated to time-periodic flows and based on Fourier analysis, have been developed recently. These methods, called harmonic balance, cast a time-periodic flow computation in several coupled steady computations, corresponding to a uniform sampling of the period. Their efficiency allow to get a precision good enough for engineering but much faster than classical nonlinear time-marching algorithms.

The present study aims at imlementing one of these, the Time Spectral Method, in the ONERA solveur elsA. It is extended to an arbitrary lagrangian/eulerian formulation to take into mesh deformation for aeroelasticity applications. New implicit algorithms are developped to improve robustness. The TSM is successfully validated on external aerodynamic applications. Turbomachinery flows necessitate complex space and time interpolations ro reduce the computational domain to a single blade passage per row regardless of its geometry. Some applications in rotor/stator interactions and aeroelasticity are presented.

Key words : harmonic balance, turbomachinery, rotor/stator interaction, aeroelasticity