

Acoustique/*Acoustics*

## Estimation numérique du bruit rayonné par une turbulence homogène et isotrope

Alicja WITKOWSKA et Daniel JUVÉ

**Résumé** – L'analogie aéroacoustique de Lighthill est combinée avec un code de simulation de turbulence homogène et isotrope (du type "Simulation des Grandes Échelles" dans un cube) afin d'évaluer le bruit rayonné en champ lointain. Les résultats numériques montrent que, puisqu'il s'agit ici du bruit d'une sous partie d'un domaine de turbulence, l'utilisation d'une variante de l'analogie non appropriée [formulation (1)] conduit à une importante surestimation du bruit rayonné. Par contre, les résultats obtenus à l'aide de la formulation (3) sont en bon accord avec le modèle théorique de Proudman.

### Numerical estimation of noise generated by homogeneous and isotropic turbulence

**Abstract** – Lighthill's acoustic analogy is combined with a numerical simulation of homogeneous and isotropic turbulence (Large Eddy Simulation in a cube) in order to evaluate the farfield noise. Numerical results show that, since we compute the noise of a subdomain of the entire source field, one of the analogy forms [equation (1)] largely overestimates noise generation. On the other hand, results obtained with the form 3 are in good agreement with Proudman's model.

**Abridged English Version** – In 1952, Lighthill posed the problem of estimating the sound radiated by a finite region of turbulent flow surrounded by a fluid at rest. He expressed the acoustic pressure at a point  $\vec{x}$  as a function of the velocity  $\vec{u}$  in the volume of turbulence  $V$ . Two exact expressions of pressure exist [equation (1) and (2)], where  $\rho_0$  is the fluid density,  $\vec{r} = \vec{x} - \vec{y}$ , and the expressions inside the brackets [...] are evaluated at the retarded time  $t - (r/c_0)$ . Under the assumptions of geometric and acoustic farfield the pressure is given by equation (3), where  $c_0$  is the ambient sound speed. If, in addition, the volume  $V$  is compact, retarded times can be neglected and we obtain equation (4).

In order to obtain the turbulent velocities within  $V$ , we used a pseudo-spectral Large Eddy Simulation (LES) code for an incompressible fluid, developed by Bertoglio (1986). The code has periodical boundary conditions and an experimental spectrum of grid turbulence as initial spectrum. The computations presented in this paper were done with  $16^3$  nodes, but similar results were obtained with  $32^3$  nodes. The initial turbulent Mach number,  $M_0 = u_0/c_0$ , with  $u_0$  the initial rms velocity, was approximately 0.01. This code was previously proved to be correct (compared with an experiment for decaying turbulence).

The combination of Lighthill's theory and LES code results in an important problem. As a matter of fact, Lighthill's theory was developed for an entire, finite volume of turbulence surrounded by a medium at rest, whereas the volume  $V$  simulated by the LES code is only a truncated part of the turbulent medium. The truncation can be formally represented by the Heaviside function  $H(f)$ , where  $f(\vec{y}) = 0$  is the equation of the limiting surface  $\Sigma$ , hence  $H = 1$  inside the turbulent volume  $V$  and  $H = 0$  outside. By using the properties of this function, in a similar way to Ffowcs Williams (Crighton *et al.*, 1992), it can be shown that for a truncated volume of turbulence expressions (1) and (2) (which become respectively 5 and 6) are not equivalent, and are linked by equation (7). The formulation (1) for the truncated volume implicitly contains surface integrals, linked to the velocity and momentum flux through

Note présentée par Geneviève COMTE-BELLOT.

the surface of truncation. These surface integrals have the form of dipoles and monopoles and therefore do not represent the contribution of the turbulent volume to noise generation. The volume noise is given by the formulation (2), which has the form of a quadrupole. Thus only formulations (2), and (3) and (4) (easier to employ) are likely to give the correct result. On the other hand formulation (1) will, for low Mach numbers, largely overestimate the noise generation, since it contains monopole and dipole terms.

For the numerical calculations we used  $I = \langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle / \rho_0 c_0$  as the expression of acoustic intensity, where the brackets  $\langle \dots \rangle$  denote the statistical mean, and the pressure  $p$  was obtained with formulations (1) and (3). We did not draw here the intensity obtained with the formulation (4), but we have checked that it is identical to the intensity computed with (3) (the turbulence volume is compact). The mean was evaluated over 50 different realizations of the turbulent field, and the point  $\vec{x}$  was situated at 200 times the size of the turbulent box. We used as reference Proudman's model (Proudman, 1952), according to which the acoustic power per unit mass is given by  $P = \alpha M^5 \epsilon$ , where  $M$  is the turbulent Mach number,  $\epsilon$  the dissipation, and  $\alpha$  depends on spectrum. Proudman found  $\alpha = 38$  for Heisenberg's spectrum; we computed  $\alpha = 10$  for the truncated von Karman spectrum of the LES code.

All the acoustic intensities are plotted on figure 1 as a function of nondimensional time  $t(l_0/u_0)$ , where  $l_0$  is the initial integral length scale and  $u_0$  the initial rms velocity. The figure shows that:

1) The intensity obtained with formulation (3) (solid line) is close to Proudman's predictions. The difference of 6 dB between the two curves may be due to the hypothesis of quasi-normality employed by Proudman.

2) The intensity obtained with formulation (1) (dashed line) is more than 40 dB larger than Proudman's prediction. In order to show that the overestimation is due to the monopole and dipole terms in the surface integrals, we added the integrals to the expression (3). The intensity is then 2-3 dB higher than when computed with formulation (1). The slight difference is probably due to the extreme sensitivity of equation 1 to correct evaluation of retarded times (Crighton, 1988).

Moreover, by changing the value of the initial rms velocity (4 different values of  $u_0$ ), we found that the intensity obtained with formulation (3) follows the  $u_0^8$  law characteristic of quadrupole radiation, whereas the intensity obtained with 1 follows a  $u_0^{6.5}$  law.

In conclusion, numerical results confirm that expression (2), (3) or (4) but not expression (1) should be used to compute the volume contribution to the noise. Because he wrongly used the expression (1), Béchara (1991) found an acoustic intensity 50 dB larger than Proudman's prediction (with  $\alpha = 38$ ). Sarkar (1993) used the expression 3 and obtained an intensity approximately 10 dB below Proudman's model ( $\alpha = 38$ ), just as we did. However, he justified his choice by the sensitivity of the expression (1) to retarded times, and did not mention the surface integrals, although we showed them to be the principal sources of overestimation.

---

1. INTRODUCTION. – En 1952, Lighthill a développé une théorie permettant d'estimer le bruit rayonné par un volume fini de turbulence entouré d'un fluide au repos, en fonction des vitesses instantanées au sein de ce volume. Récemment de nombreux codes de simulation de la turbulence permettant de calculer les vitesses instantanées ont été développés. Il semble donc intéressant de combiner l'analogie de Lighthill et la simulation numérique des termes sources afin d'évaluer le bruit créé par la turbulence. Cependant une telle approche ne va pas sans poser un certain nombre de problèmes délicats, qui

peuvent être à l'origine d'importantes erreurs, s'ils ne sont pas traités de façon convenable (Crighton, 1988). La présente Note est tout particulièrement consacrée aux problèmes liés aux frontières du domaine de turbulence.

2. LA THÉORIE DE Lighthill. — En réarrangeant de façon judicieuse les équations de Navier-Stokes, Lighthill exprime la pression acoustique créée au point d'écoute  $\vec{x}$ , par un volume fini de turbulence  $V$ , en fonction des vitesses instantanées  $\vec{u}$ , qui jouent le rôle de termes sources. Lorsque le tenseur de Lighthill est réduit à sa forme classique  $\rho_0 u_i u_j$ , la pression acoustique peut s'écrire :

$$(1) \quad p(\vec{x}, t) = \frac{\rho_0}{4\pi} \int_{\infty} \left[ \frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial y_i \partial y_j} \right] \frac{1}{r} dV(\vec{y})$$

ou

$$(2) \quad p(\vec{x}, t) = \frac{\rho_0}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\infty} [u_i u_j] \frac{1}{r} dV(\vec{y}).$$

où  $\rho_0$  représente la densité du fluide,  $\vec{r} = \vec{x} - \vec{y}$  et les termes entre parenthèses [...] sont calculés au temps retardé  $t - (r/c_0)$ . Le domaine d'intégration, qui est en théorie infini, se réduit en pratique au volume de turbulence  $V$ . Avec l'hypothèse de champ lointain géométrique ( $r \gg D$ ) et de champ lointain acoustique ( $r \gg \lambda$ ), où  $D$  est la plus grande dimension caractéristique du volume  $V$  et  $\lambda$  la longueur d'onde du son émis, l'expression devient :

$$(3) \quad p(\vec{x}, t) = \frac{\rho_0}{4\pi c_0^2} \frac{x_i x_j}{x^3} \int_{\infty} \left[ \frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial t^2} \right] dV(\vec{y}).$$

où  $c_0$  est la célérité du son. Si, en outre, la condition de compacité ( $\lambda \gg D$ ) est satisfaite, on obtient :

$$(4) \quad p(\vec{x}, t) = \frac{\rho_0}{4\pi c_0^2} \frac{x_i x_j}{x^3} \left[ \int_{\infty} \frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial t^2} dV(\vec{y}) \right].$$

Dans nos calculs nous avons utilisé les formulations (1), (3) et (4), la formulation (2) étant plus difficile à exploiter.

3. LE CODE DE SIMULATION UTILISÉ. — Afin de connaître les vitesses instantanées, et par là les termes sources, un code simulant la décroissance d'une turbulence homogène et isotrope a été utilisé. Le code consiste en une résolution des équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible, dans un cube avec des conditions de périodicité aux limites. Il s'agit d'un code de simulation des grandes échelles de type pseudo-spectral développé et validé (par comparaison avec les expériences de turbulence de grille) par Bertoglio (1986). Les calculs présentés dans cette Note ont été effectués avec un maillage de  $16^3$  nœuds, résolution faible mais suffisante pour illustrer notre propos. D'ailleurs, des résultats similaires ont été obtenus avec un maillage de  $32^3$ . Le champ initial de vitesses est tiré, en chaque point du volume, de manière aléatoire à partir d'un spectre expérimental de turbulence de grille. Le nombre de Mach turbulent initial  $M_0 = u_0/c_0$ , où  $u_0$  est la vitesse efficace initiale, est de 0,01 environ.

4. COMBINAISON DE L'ANALOGIE DE Lighthill ET DU CODE DE SIMULATION. — La combinaison de la théorie de Lighthill et du code de simulation pose de prime abord un problème

essentiel. En effet, la théorie de Lighthill a été établie pour un champ turbulent fini situé dans un milieu au repos. Or, les codes numériques ne simulent, en général, qu'une partie tronquée du champ turbulent (en particulier, le code LES décrit plus haut ne simule qu'un cube). Cette troncature du domaine de turbulence peut être représentée de façon formelle à l'aide de la fonction de Heaviside  $H(f)$ , où  $f(\vec{y}) = 0$  est l'équation de la surface  $\Sigma$  limitant le volume de turbulence  $V$ . Ainsi  $H = 1$  à l'intérieur de  $V$  et  $H = 0$  à l'extérieur. Grâce à cette fonction on peut montrer que les expressions (1) et (2), bien qu'équivalentes pour un volume fini de turbulence situé dans un milieu au repos, sont très différentes pour un volume tronqué. En effet l'expression (1) devient, pour le volume tronqué :

$$(5) \quad p(\vec{x}, t) = \frac{\rho_0}{4\pi} \int_{\infty} \left[ \frac{\partial^2 \{u_i u_j\}}{\partial y_i \partial y_j} \right] \frac{1}{r} H(f) dV(\vec{y})$$

Alors que l'expression (2) s'écrit :

$$(6) \quad p(\vec{x}, t) = \frac{\rho_0}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\infty} [u_i u_j] \frac{1}{r} H(f) dV(\vec{y})$$

Dans l'expression (1) c'est le champ de dérivées de la vitesse par rapport à la variable d'intégration qui est tronqué, dans l'expression (2), c'est le champ de vitesses. La relation entre les deux formulations peut être obtenue en utilisant les propriétés de la fonction de Heaviside (cf. Ffowcs-Williams dans Crighton *et al.*, 1992) :

$$(7) \quad \int_{\infty} \left[ \frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial y_i \partial y_j} \right] \frac{1}{r} H(f) dV = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\infty} [u_i u_j] \frac{1}{r} H(f) dV \\ + \int_{\Sigma} \left[ \frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial y_j} \right] \frac{1}{r} n_i d\Sigma + \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\Sigma} [u_i u_j] \frac{1}{r} n_i d\Sigma$$

où  $n_i$  est la normale extérieure à la surface de troncature  $\Sigma$ .

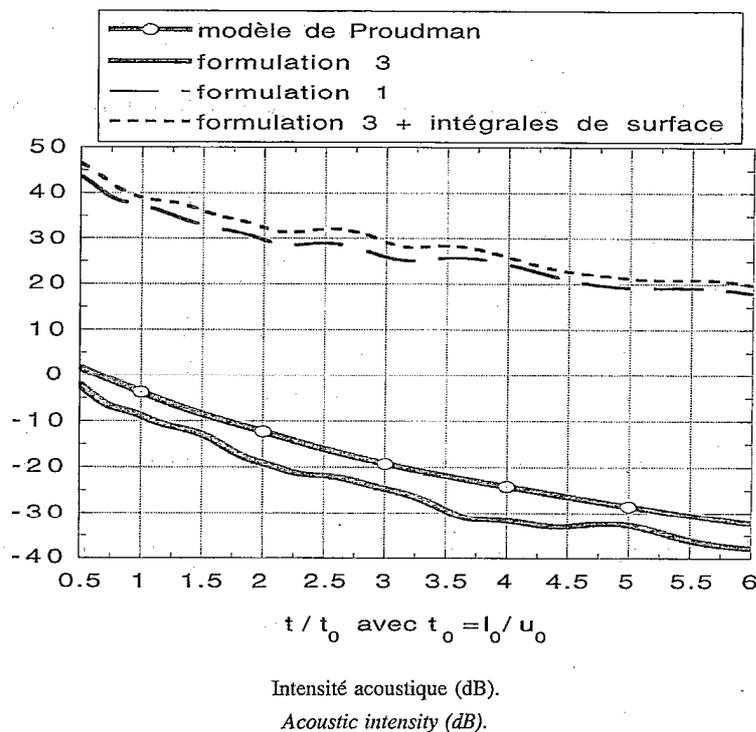
Pour un volume tronqué de turbulence l'expression (1) s'écrit donc comme la somme de la formulation (2) et de deux intégrales de surface. Ces intégrales sont liées aux flux de la vitesse et de la quantité de mouvement à travers la surface de troncature, qui induisent des contributions monopolaires et dipolaires. L'intégrande de la formulation 1 ne peut donc pas être considérée comme définissant une densité volumique de sources. Par contre, l'expression (2) pour le volume tronqué possède une forme quadripolaire, et c'est elle qui représente, selon nous, la contribution volumique du bruit d'écoulement.

Quant aux expressions (3) et (4), elles s'obtiennent à partir de la formulation (2) par une transformation de l'intégrande seule. Dans la mesure où les hypothèses de champ lointain et de compacité sont satisfaites, elles représentent donc aussi la contribution volumique du bruit.

Pour évaluer le bruit du volume tronqué de turbulence, on est donc conduit à utiliser la formulation (2) ou, ce qui est bien plus simple, les formulations (3) et (4). L'utilisation de la formulation (1), à cause de la présence des termes monopolaires et dipolaires, risque, pour des nombres de Mach faibles, de conduire à une importante surestimation du bruit rayonné.

5. LES RÉSULTATS NUMÉRIQUES. – Afin de vérifier les idées énoncées ci-dessus, nous avons évalué l'intensité acoustique à partir des différentes formulations de la pression acoustique. Le calcul a été fait à une distance de 200 fois la dimension du cube de turbulence. Le pas de temps a été choisi de façon à ce que les temps retardés soient bien pris en

compte, à savoir  $\Delta t = \Delta d / c_0$ , où  $\Delta d$  est la dimension de la maille. Nous avons utilisé l'expression  $I = \langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle / \rho_0 c_0$  pour l'intensité, les crochets (...) désignant la moyenne statistique. Pour évaluer ces moyennes nous avons calculé la pression acoustique pour une cinquantaine de réalisations du champ turbulent. Le choix des moyennes statistiques et non des moyennes temporelles, pourtant moins coûteuses, est motivé par la forte instationnarité du phénomène étudié.



Sur la figure nous avons représenté les intensités acoustiques calculées avec les expressions (1) et (3) ainsi que l'intensité obtenue en ajoutant les intégrales de surface à l'expression (3). Nous n'avons pas représenté l'intensité calculée à l'aide de la formulation (4) car elle est identique à celle calculée avec (3) (le volume de turbulence est compact). Enfin, nous avons tracé l'intensité donnée par le modèle analytique de Proudman (1952). Ce modèle permet d'exprimer la puissance acoustique rayonnée par unité de masse d'une turbulence homogène et isotrope sous la forme  $P = \alpha M^5 \epsilon$ , où  $M$  est le nombre de Mach turbulent,  $\epsilon$  la dissipation, et  $\alpha$  un coefficient qui dépend du spectre de la turbulence. Proudman montre que  $\alpha$  vaut 38 pour le spectre de Heisenberg. Calculé pour le spectre utilisé dans la simulation (spectre de von Karman tronqué),  $\alpha$  se révèle voisin de 10. Toutes les intensités ont été représentées en fonction d'un temps adimensionnel  $t/(l_0/u_0)$ ,  $l_0$  étant l'échelle intégrale initiale.

Les résultats représentés sur la figure nous amènent à deux conclusions principales :

- 1) L'intensité obtenue avec la formulation (3) est proche des prévisions de Proudman. L'écart de 6 dB environ entre les deux résultats est sans doute dû à l'hypothèse de quasinessentialité utilisée par Proudman, qui est très discutable.
- 2) L'intensité obtenue avec la formulation (1) est nettement supérieure aux prévisions de Proudman (environ 45 dB d'écart). Afin de montrer que la surestimation est effectivement

due aux intégrales de surface présentes implicitement dans la formulation (1), nous les avons ajoutées à la formulation (3). L'intensité ainsi obtenue est proche de celle calculée avec la formulation (1) la légère différence pouvant être due à la sensibilité de la formulation (1) à l'évaluation précise des temps retardés (Crighton, 1988).

De plus, en faisant légèrement varier la vitesse quadratique moyenne initiale de la turbulence (4 valeurs différentes de  $u_0$ ) nous avons pu constater que si l'intensité calculée par la formulation (3) suivait bien la loi en  $u_0^8$  caractéristique d'un rayonnement quadripolaire, l'intensité obtenue avec l'expression (1) suivait une loi en  $u_0^{6.5}$ . Cette loi est due à la présence simultanée des termes monopolaires, dipolaires et quadripolaires dans l'expression (1).

6. CONCLUSION. – Nous avons montré, à l'aide d'un développement théorique suivi de résultats numériques, que, dans le cas du calcul de bruit rayonné par une sous-partie d'un volume de turbulence, l'utilisation d'une variante de l'analogie de Lighthill non adaptée [formulation (1)] conduit à une importante surestimation du bruit rayonné. C'est pour cette raison que W. Béchara (Béchara, 1991), en utilisant de façon erronée la formulation (1), obtient une intensité de 50 dB supérieure à celle donnée par le modèle de Proudman (avec  $\alpha = 38$ ).

Par contre l'utilisation d'une formulation adaptée [formulation (3)] conduit à des résultats satisfaisants, dans la mesure où l'intensité obtenue est proche de celle donnée par le modèle de Proudman, et qu'elle suit la loi en  $u^8$  caractéristique du rayonnement quadripolaire. D'ailleurs Sarkar (Sarkar, 1993), qui utilise cette formulation obtient, comme nous, une intensité de quelques 10 dB inférieure à celle de Proudman (toujours avec  $\alpha = 38$ ). Cependant, Sarkar justifie son choix de formulation par la grande sensibilité de l'expression (1) aux temps retardés et non par la présence des intégrales de surface, qui sont pourtant, ici, la principale source d'erreurs.

Note remise le 31 janvier 1994, acceptée le 10 février 1994.

#### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- W. BECHARA, Modélisation du bruit d'écoulements turbulents libres, *Thèse de Doctorat*, École Centrale de Paris, 1992.  
 J. P. BERTOGLIO, Étude d'une turbulence anisotrope; modélisation de sous-maille et approche statistique, *Thèse de Doctorat d'État es Sciences*, Université Claude-Bernard, Lyon I, 1986.  
 D. G. CRIGHTON, *Computational Acoustics: Algorithms and Applications*, D. LEE, R. L. STERNBERG et M. H. SCHULTZ éd., Elsevier Science Publishers BV, 1988, p. 3-20.  
 D. G. CRIGHTON, A. P. DOWLING, J. E. FLOWCS WILLIAMS, M. HECKL et F. G. LEPPINGTON, *Modern Methods in Analytical Acoustics*, Lecture notes, Springer-Verlag, 1992, p. 46-79.  
 M. J. LIGHTHILL, On sound generated aerodynamically I. General Theory, *Proc. Roy. Soc.*, A 221, 1952, p. 564-587.  
 I. PROUDMAN, The generation of noise by isotropic turbulence, *Proc. Roy. Soc.*, A 214, 1952, p. 119-132.  
 S. SARKAR et M. Y. HUSSAINI, *Computational aeroacoustics*, HARDIN et HUSSAINI éd., Springer-Verlag, 1993, p. 335-351.