



École doctorale n°162 : Mécanique, Énergétique, Génie Civil et Acoustique

Doctorat LMFA THÈSE N° d'ordre : 2017LYSEC06 pour obtenir le grade de docteur délivré par L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON Spécialité doctorale Aéroacoustique

Présentée et soutenue publiquement par Pierre Yser Directeur de thèse : Christophe Bailly Le 26 janvier 2017

Sujet de la thèse :

Simulation numérique aéroacoustique d'écoulements par une approche LES d'ordre élevé en éléments finis non structurés

Numerical simulation of aeroacoutic flows with a high order LES model and an unstructured finite element code

Jury :

M. Christophe BAILLY	Professeur - École Centrale de Lyon	Directeur de thèse
M. Sébastien BARRÉ	Ingénieur - Dassault Aviation	Examinateur
M. Paola CINNELLA	Professeur - Arts et Métiers ParisTech	Rapporteur
M. Jan Delfs	Professeur - DLR Braunschweig	Rapporteur
M. Eric Manoha	Ingénieur recherche - ONERA	Examinateur
M. Pierre Sagaut	Professeur - Aix-Marseille Université	Examinateur
M. Christian Tenaud	Directeur de recherche - CNRS	Examinateur

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique École Centrale de Lyon UMR CNRS 5509, 69134 Écully CEDEX

Remerciements

Avoir réalisé cette thèse fait partie des mes expériences les plus enrichissantes. Chaque jour a apporté son lot de désillusions, de passions et de découvertes. Je souhaite exprimer toute ma gratitude à ceux qui m'ont accompagné et soutenu de différentes manières durant ces trois années.

Je tiens tout d'abord à remercier de tout cœur Christophe Bailly, mon directeur de thèse, qui a accepté d'encadrer mes travaux malgré le secret gravitant autour du code numérique AETHER de Dassault Aviation. J'ai pu profité de son appétence pour la connaissance et la nouveauté, et cet enthousiasme m'a enrichi d'un point de vue scientifique. Il a su répondre à chaque fois précisément et avec bienveillance aux questions que je me posais en mécanique des fluides. Il m'a donné l'opportunité de réaliser ce projet et m'a offert la liberté intellectuelle d'explorer une branche de la *terra incognita* scientifique. Son expertise et ses idées à profusion dans le domaine numérique, de l'acoustique et de la turbulence, ont été un atout indéniable qu'il a su distillé judicieusement pour ouvrir de nouvelles pistes d'exploration. Malgré ses responsabilités, il a donc été réellement présent et a toujours trouvé du temps, pendant des journées durant, pour échanger sur le contenu de mes travaux. Sans tous cela, cette expérience de 3 ans n'aurait pu être aussi fructifiante et formatrice.

> Un scientifique est heureux, non pas en se satisfaisant de ses accomplissements mais en étant constamment dans la recherche de nouvelles connaissances.

Max Planck

Je remercie également le laboratoire LMFA de l'école Centrale de Lyon qui m'a accueilli royalement durant mes courts passages en son sein. Je souhaite une bonne continuation à ses membres et aux doctorants. Je sais déjà que certains sont sortis couronnés de succès et je ne doute pas que de nouveaux enjeux prometteurs seront relevés haut la main par les équipes du laboratoire.

Cette thèse n'aurait toutefois pas pu voir le jour sans la collaboration de Dassault Aviation et de l'ANRT qui ont conjointement accepté de subventionner et de faire confiance à ce projet.

Cela m'amène à remercier l'inspirateur initial de ces travaux, Sébastien Barré. En étant mon maître de stage de fin d'étude, il a été d'une pédagogie rarement égalée pour me familiariser avec les méthodes acoustiques et les écoulements instationnaires. Cela m'a permis d'aborder sereinement et avec plein d'idées en tête, les problèmes animant cette thèse. Je me souviendrai des longues discussions "spectrales" dans le bureau des acousticiens afin de comprendre et de percer les mystères de certains phénomènes rencontrés. Continuant son rôle de soutien intellectuel durant toute ma thèse, son aide et sa dévotion ont toujours été importantes pour me motiver et redonner de l'intérêt au questionnement scientifique. Il a été d'une finesse et d'une justesse remarquable dans la relecture de mes rapports, et en particulier de ce manuscrit.

Qu'importe à quel point ta théorie soit belle, que tu sois intelligent. Si elle est en désaccord avec l'expérience, c'est qu'elle est fausse.

Richard Feynman

Je remercie également Franck Dagrau pour son encadrement exemplaire et sa connaissance des modèles instationnaires. Sans lui je n'aurais pu progresser aussi rapidement sur ces sujets. Il a su m'orienter vers la conceptualisation simple de mes travaux, point très important dans le domaine industriel et sans quoi les apports applicatifs de cette thèse n'auraient pu êtres aussi intéressants.

Par ailleurs, sans le support inconditionnel de Frédéric Chalot, je n'aurais pas eu la chance d'apprendre autant sur les éléments finis mais aussi sur la manière de les comprendre et de correctement les utilisés. Ce détenteur des clefs du code d'AETHER a été de très bon conseil sur toute l'implémentation de mes méthodes et a su me fournir les astuces et les outils vitaux pour rapidement tester et comprendre l'utilisation des méthodes numériques intationnaires de Dassault Aviation.

La vérité sera toujours à trouver dans la simplicité, et non dans la complexité et la confusion des objets.

Isaac Newton

Je tiens à remercier Philippe Perrier et Christian Lucius, responsables du pôle technique DTIAE, pour avoir accepter et soutenu ce projet. Grâce à eux mon histoire quotidienne au sein du service AERAV puis MMO s'est écoulée à l'intérieur d'une pépinière permettant d'incuber, dans les meilleurs conditions sociales et techniques, les résultats de cette thèse. Je souhaiterais exprimer particulièrement ma gratitude à Michel Mallet qui fut plus qu'un référent hiérarchique mais aussi un homme assoiffé de savoir qui a su m'apporter de brillants conseils et questionnements techniques malgré son intense activité professionnelle. Un immense merci aussi à Jean-Marc Lombard qui, avec bienveillance, m'a épargné les affres administratives par un management irréprochable, permettant ainsi d'adapter au sein du service un petit coin de paradis propice à ma réflexion. J'y ai pu apprendre un intérêt de l'Open Space ... apporter une convivialité et une proximité nécessaire à faire fructifier les idées et à donner un sens plus qu'intellectuel au travail quotidien. J'en profite alors pour remercier toutes les personnes qui m'ont soutenu humainement et techniquement durant ces trois années : Aloïs Bissuel mon brillant co-thésard et les différents stagiaires plus intéressants les uns que les autres; Laurent Daumas, Nicolas Forestier, les membres du boquet acoustique Nicolas Réau, Floriane Rey et Vincent Fleury; Flavien Billard, Stéphane Lemaire, Zdenek Johan, Bony Quach, Tran Dac, Yves Marenghi, Jean-Max Hassholder, les mailleurs Alain Naim, Jean-Pierre Figeac et Nicolas Flandrin etc ... Ainsi que les thèses précédemment réalisées ayant servies de base pour ces travaux : Pierre-Elie Normand, Vincent Levasseur et Stéphane Galdeano.

Je souhaite aussi remercier les membres de ma famille, mes parents, grands parents et mon frère pour leur soutien moral. Un grand merci à mon oncle pour avoir toujours su me stimuler intellectuellement. Enfin, une reconnaissance éternelle à Coralie, depuis peu ma femme, qui m'a encouragé à persévérer dans un sujet qui me passionne.

Comme il est très difficile de décrire la complexité des interactions spectrales propres à la turbulence, il m'est impossible d'écrire une liste exhaustive des personnes ayant participé à l'élaboration de ces travaux. Je manquerais de pages pour parfaitement remercier chacun et chacune ayant contribué intellectuellement et émotionnellement au bon déroulement de cette thèse.

A toutes ces personnes un immense merci.

Quand je rencontrerai Dieu, je Lui poserai deux questions : Pourquoi la relativité ? Et pourquoi la turbulence ? Je pense réellement qu'il aura une réponse pour la première.

Werner Heisenberg

Nomenclature

Mathématique :

 Ω : volume du domaine de calcul.

 Γ : frontière de Ω .

 $\underline{\mathbf{x}} = (x, y, z)$: coordonnées dans le domaine Ω .

 Ω^e : domaine de calcul réduit à l'élément.

 Ω^n : domaine de calcul sur la tranche n du temps.

 Ω^{ref} : domaine de calcul isoparamétrique de référence.

 $\underline{\boldsymbol{\xi}} = (\boldsymbol{\xi}, \eta, \boldsymbol{\zeta})$: coordonnées dans le domaine $\Omega^{\text{ref.}}$

I: domaine temporel.

 $I_n = [t_n, t_{n+1}]$: domaine temporel discrétisé.

 $\mathcal{F}[\underline{\Phi}](\underline{\mathbf{k}})$ ou $\underline{\widehat{\Phi}}$: transformée de Fourier de $\underline{\Phi}$ qui sera définie par

$$\widehat{\underline{\Phi}}(\underline{\mathbf{k}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\Phi}(\underline{\mathbf{x}}) e^{-2i\pi \underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{x}}} d\underline{\mathbf{x}}$$

 δ : fonction de Dirac.

div () : divergence vectorielle.

grad () : gradient vectoriel.

<u>rot</u>() : rotationnel vectoriel.

div() : divergence tensorielle.

grad(): gradient tensoriel.

 $\overline{:: do}$ uble produit contracté de deux matrices $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$ et définit par le scalaire

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}: \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \sum_{i} \sum_{j} A_{ij} B_{ij}$$

 \otimes : produit tensoriel de deux vecteurs <u>a</u> et <u>b</u> et définit par la matrice

$$[\underline{\mathbf{a}} \otimes \underline{\mathbf{b}}]_{ij} = a_i b_j$$

diag [] : matrice diagonale carrée définit par les coefficients en argument.

 \mathbf{tr} [] : scalaire correspondant à la trace de la matrice en argument, *i.e.* sommant les termes diagonaux.

Éléments finis :

 \mathcal{V} : espace des fonctions d'essai.

 $\mathcal W:$ espace des fonctions de pondération.

 \mathcal{P}_k : espace des fonctions d'interpolation d'ordre k.

 $\underline{\mathbf{U}}$: vecteur des variables conservatives.

 $\underline{\mathbf{V}}$: vecteur des variables entropiques.

 $\underline{\mathbf{W}}$: vecteur des fonctions de test ou de pondération.

 N_a : fonction de forme associée aux nœuds a.

 $\underline{\underline{\tau}}$: matrice d'échelle de temps intrinsèque.

 $\underline{\mathcal{L}}$: opérateur de Navier Stokes.

 $\underline{\mathcal{R}}, \underline{\mathcal{M}}$: résidu et matrice tangente associés à la résolution du problème non linéaire. $\underline{\mathcal{F}}_i$: vecteur des flux d'Euler.

 $\underline{\mathcal{F}^{\text{diff}}}_i$: vecteur de diffusion.

 $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{i}, \ \left[\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{i}\right]_{kl} = A_{i}\left(k,l\right):$ i^{ème} matrice jacobienne des flux Euler.

 $\underline{\underline{\widetilde{A}}}_{i}_{i}, \ \underline{[\underline{\widetilde{A}}}_{i}]_{kl} = \widetilde{A}_{i}(k,l) : i^{\text{ème}} \text{ matrice jacobienne des flux Euler en formulation entropique.}$

 $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{ij}, \left[\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{ij}\right]_{kl} = K_{ij}(k,l)$: matrice de diffusivité.

 $\underline{\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}}_{ij}, \ [\underline{\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}}_{ij}]_{kl} = \widetilde{K}_{ij}(k,l)$: matrice de diffusivité en variable entropique.

 $\underline{\underline{\widetilde{A}}}_{0}, [\underline{\underline{\widetilde{A}}}_{0}]_{kl} = \widetilde{A}_{0}(k, l)$: matrice de changement de variable entre les variables entropiques et conservatives.

 n_p : nombre de nœuds du problème.

 n_{el} : nombre d'éléments du problème.

 n_{en} : nombre de nœuds de l'élément.

 n_{dl} : nombre de variables du problème.

 n_{int} : nombre de points d'intégration du problème.

Écoulement :

 ρ : masse volumique (densité).

m : masse.

 $\underline{\mathbf{u}} = (u, v, w)$: vecteur vitesse.

 $\underline{\mathbf{w}} = (w_x, w_y, w_z)$: vecteur vorticité.

p: pression.

T : température.

 $E_t(e_t)$: énergie totale (valeur massique).

S(s) : entropie (valeur massique).

H(h): enthalpie (valeur massique).

 $E_i(e_i)$: énergie interne (valeur massique).

 $E_c(e_c)$: énergie cinétique (valeur massique).

 $C_v(c_v)$: chaleur spécifique à volume constant (valeur massique).

 $C_p(c_p)$: chaleur spécifique à pression constante (valeur massique).

 γ : rapport des chaleurs spécifiques ($\gamma_{air} = c_p/c_v = 1.4$).

r: coefficient des gaz parfaits ($r_{air} = 287.04 \text{ K.m}^2 \text{.s}^{-2}$).

 R_e : nombre de Reynolds.

M : nombre de Mach.

 c_0 : vitesse du son.

 η : échelle de Kolmogorov.

 C_k : constante de Kolmogorov.

 $\lambda,\,\mu:$ coefficients de Lamé-Stokes.

 ν : viscosité cinématique moléculaire.

 μ : viscosité dynamique moléculaire ou potentiel chimique.

 ζ : viscosité de volume.

 $\mathbf{q}^{\mathbf{T}}$: vecteur flux de chaleur.

 $\underline{\epsilon}$: dissipation visqueuse.

 $\underline{\sigma}$: tenseur des contraintes.

 $\underline{\mathbf{D}}$: tenseur des taux de déformation.

 $\underline{\mathbf{S}}$: partie symétrique de $\underline{\mathbf{D}}$.

 $\underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}}$: partie déviatrice de la partie symétrique du tenseur des taux de déformation $\underline{\mathbf{S}}$.

 $\underline{\Omega}$: partie anti-symétrique de $\underline{\mathbf{D}}$.

Simulation des grandes échelles :

 $\overline{\Phi}$: partie moyenne du champ.

 $\underline{\Phi}^*$: fluctuation du champ.

 $\underline{\widetilde{\Phi}}$: champ filtrée par moyenne de Favre.

 $\underline{\Phi}^{R}$: champ résolu.

 $\underline{\Phi}$: champ des grandes échelles résolues.

 $\underline{\Phi}''$: champ des petites échelles résolues.

 $\underline{\Phi}'$: champ des petites échelles (échelles de sous-mailles).

 $\underline{\mathbf{G}}$: noyau du filtre réel analytique.

 Δ_m et Δ_f : coupure spatiale respectivement du maillage et du filtre.

Sigles :

RANS : Reynolds Averaged Navier-Stokes.
LES (SGE) : Large Eddy Simulation (Simulation aux grandes échelles).
DNS : Direct Numerical Simulation.
VMS : Variational Multi-Scale.
SUPG : Streamline Upwind Petrov-Galerkin.
GLS (GMC) : Galerkin Least-Squares (Galerkine Moindres Carrés).

Exposant :

e : valeur définie sur l'élément.

Indice :

a : valeur définie aux nœuds.

 $i: i^{ime}$ composante d'un vecteur.

Introduction

Contexte et motivations

Dans le domaine de l'aéronautique, la simulation numérique est un moyen efficace pour réduire les coûts et les temps de conception des nouveaux avions. Depuis les années 70, la simulation numérique prend de plus en plus d'importance grâce à l'amélioration des puissances et capacités de calcul.

Les aérodynamiciens ont l'opportunité d'avoir à disposition un système d'équation appelé équations de Navier-Stokes qui régit précisément l'écoulement aérien autour des avions. Toutefois, cela n'enlève en rien à la difficulté de comprendre et de calculer numériquement ce type d'équations car les écoulements qu'elles décrivent peuvent présenter une gamme spatiotemporelle de fréquences très vaste. Ainsi il n'est pas possible de réaliser des simulations directes *Direct Numerical Simulation* (DNS) de la mécanique des fluides sur des cas complexes. Les puissances de calcul sont encore trop faibles pour espérer déterminer sans modélisation les problèmes aérodynamiques dans les contextes industriels aéronautiques : hauts Mach, régimes turbulents, *etc* ... Pour palier à cette lacune, les chercheurs et ingénieurs ont développé des méthodes alternatives permettant de réduire le besoin en capacité machine au prix de simplifications des équations de Navier-Stokes et de certaines modélisations plus ou moins physiques des phénomènes. Ainsi en fonction des caractéristiques prédominantes de l'étude, tels termes ou tels autres sont négligés dans les équations.

Pour l'étude aéronautique, peu nombreux sont ces termes des équations de Navier-Stokes qu'il est possible de négliger dans les problématiques actuelles. Les contraintes rencontrées sont celles des tailles de maillages et des temps de calcul *i.e.* respectivement de la discrétisation spatiale et temporelle. Ainsi, l'idée qui prédomine aujourd'hui est le filtrage mathématique spatial et/ou temporel des équations de Navier-Stokes. En effet, cette méthode permet de ne pas se préoccuper de la simulation des structures qui sont trop petites à mailler en positionnant judicieusement la fréquence de coupure spatiale ou temporelle du filtre. Toutefois, ne pas discrétiser les petites structures de l'écoulement doit être corrigé avec un effort de modélisation de leurs effets, qui seraient négligés sinon. Mathématiquement, le filtrage des équations de Navier-Stokes introduit toujours des termes supplémentaires qui posent dès lors un problème de fermeture.

La simulation *Reynolds Averaged Navier-Stokes* (RANS) est depuis longtemps une méthode pratique pour connaitre les caractéristiques de vol d'un avion. Cette méthode consiste à appliquer une moyenne temporelle aux équations de Navier-Stokes permettant ainsi de récupérer uniquement la composante stationnaire du champs modélisé. Pour plus d'information se reporter par exemple à Pope [122] parmi une très vaste étendue bibliographique. L'évacuation de l'évolution temporelle de l'écoulement permet de réduire drastiquement le coût de résolution du problème. Les puissances de calcul d'aujourd'hui permettent de faire cette simulation sur avion complet. Mais le caractère stationnaire des résultats issus des équations de Navier-Stokes filtrées temporellement devient incompatible avec les nouveaux enjeux du secteur : contrôle fluidique des écoulements, super-manœuvrabilité, diminution de la consommation des moteurs *etc* ... et surtout avec un des sujets animant cette thèse : l'**acoustique**. Le caractère instationnaire de ces problématiques rend cette méthode difficile à employer en acoustique. Il n'est pas possible de capturer directement les fluctuations de pression donnant naissance au bruit avec une méthode stationnaire.

Aujourd'hui, les moyens de réduction du bruit s'appuient essentiellement sur des approches semi-empiriques. Les méthodes semi-empiriques actuellement utilisées dans l'industrie sont alimentées par des bases de données expérimentales et d'essais en vol. Par ailleurs une méthode régulièrement utilisée en turbomachine est la modélisation des sources acoustiques à partir des données du champs moyen à partir de l'analogie de Goldstein [53] par exemple, voir une application avec Daroukh *et al* [24] et Sanjosé *et al* [132]. Cette approche très utile dans des écoulements complexes comme peuvent rencontrer les motoristes, se paie au prix d'une simplification des sources acoustiques. La source acoustique doit donc être bien identifiée car il s'agit de modéliser son lien avec le champ moyen. Mais au final, ces modèles simplifient les interactions rendant par exemple plus complexe et moins directe l'étude acoustique du bruit rotor-stator. De ce fait, les évaluations de configurations existantes sont très rapides mais difficiles à étendre à des designs innovants. Le coût de conception reste donc toujours élevé et est un frein à la conception d'avions d'affaires plus silencieux et à la pérennité de telles méthodes.

Malgré les progrès accomplis en matière de réduction de bruit, l'aéro-acoustique reste un sujet essentiel du fait d'une réglementation de plus en plus sévère visant à limiter les nuisances sonores aux voisinages des aéroports. Le bruit de cellule correspondant au bruit d'origine aérodynamique produit principalement par l'écoulement autour de la voilure et des trains d'atterrissage, est devenu un contributeur important et est malheureusement créé par un écoulement turbulent autour de ces corps. Il est donc vital d'utiliser des méthodes de prédiction et de compréhension de ces phénomènes pour développer des concepts innovants de voilures et de trains à moindre bruit afin de pouvoir atteindre les objectifs environnementaux fixés par l'Advisory Council for Aeronautics Research in Europe (ACARE) [41] à l'horizon 2020, en ligne avec le Grenelle de l'environnement.

Afin de pouvoir concevoir ces cellules avions innovantes visant à réduire le bruit et à optimiser l'acoustique, il est impératif de mettre en place une nouvelle approche de modélisation et de prédiction du bruit aérodynamique. Celle-ci doit être générique pour pouvoir s'appliquer à différents types de configurations sans être limitée par l'existence d'une base de données expérimentales dédiée, ou à un jeu de constantes prédéfinies et de validité limitée. Une des approches possibles [109] consiste à calculer l'écoulement autour de la configuration par résolution des équations de Navier-Stokes compressibles instationnaires en incluant le champ acoustique proche. Puis il est propagé en champ lointain à l'aide d'une analogie acoustique, par exemple l'analogie de Curle [22] ou FW-H [40] ou encore d'une méthode d'extrapolation, par exemple une surface de Kirchhoff [83]. Ce processus s'avère très générique et relativement peu dépendant d'hypothèses sur les phénomènes sources ou sur la configuration étudiée. Il permet également de tenir compte des effets d'interaction entre les champs aérodynamiques et acoustiques. Les applications récentes de cette méthodologie bien qu'encore cantonnées à des configurations simplifiées ou de tailles restreintes, s'avèrent très prometteuses. Ces éléments ont conduit le réseau Initiative de Recherche pour l'Optimisation acoustiQUe en Aéronautique (IROQUA) [36] support sur la thématique acoustique du Réseau Thématique Environnement en Aéronautique du CORAC, à identifier ce type d'approche avancée comme un axe de travail et d'intérêt majeur pour l'aéroacoustique en aéronautique.

Par ailleurs, le congrès international de l'AIAA/CEAS d'aéroacoustique propose depuis quelques années un workshop réunissant les industriels et académiques sur des sujets complexes de résolutions numériques et expérimentales de bruits aérodynamiques. Ce colloque nommé *Benchmark for Aircraft Noise Computations* (BANC) regroupe par exemple l'ONERA, le DLR, la NASA, le JAXA ainsi que Airbus et depuis peu Dassault Aviation. Ce colloque propose des résultats expérimentaux sur des cas tels que des trains d'atterrissage et des profils hypersustentés afin de valider les codes de calculs et pouvoir comprendre les sources majoritaires à l'origine du bruit de cellule [20, 108, 114, 146, 156].

Dans le contexte ultra compétitif du secteur des avions d'affaires et grâce aux incitations gouvernementales, Dassault Aviation doit trouver des méthodes numériques fiables pour la conception acoustique et l'optimisation vis à vis des autres disciplines techniques. Ces objectifs peuvent sembler contradictoires. Mais grâce à la simulation numérique, il est possible de créer des avions technologiquement très compétitifs et toujours plus silencieux.

Cette thèse CIFRE s'inscrit dans l'amélioration des méthodes de simulation numérique telles qu'employées par Dassault Aviation dans une visée d'applications acoustiques. Pour cela, le caractère instationnaire d'une telle méthode est un critère essentiel afin de comprendre les phénomènes physiques qui intéressent par exemple les avionneurs. La méthode de Simulation aux Grandes Échelles ou *Large Eddy Simulation* (SGE) est une candidate intéressante mais reste aujourd'hui encore coûteuse pour le domaine industriel si elle n'est pas couplée avec d'autres approches.

Point de départ de la thèse

La simulation SGE est une méthode très prometteuse afin de modéliser les écoulements instationnaires. Cette approche filtre numériquement les équations de Navier-Stokes, menant alors à un filtrage couplé entre espace et temps des équations. Pour plus d'information sur le filtrage numérique en Computational Fluid Dynamics (CFD) et sur la SGE en général se reporter à Sagaut [128]. Le filtrage spatial de la SGE permet d'évacuer les hauts nombres d'onde de la simulation qui nécessiteraient sinon un maillage trop fin pour être capturés. Cependant mathématiquement et physiquement, il est nécessaire de modéliser l'interaction qu'ont ces échelles détruites avec le champs résolu. Depuis un demi-siècle, de nombreuses méthodes ont cherché à modéliser les inévitables termes émergents du filtrage numérique des équations de Navier-Stokes afin de pouvoir fermer ce système. Les modèles visant à fermer les équations SGE sont couramment appelés modèles de sous-maille à cause des échelles qu'ils représentent. De grandes familles de fermeture ont vu le jour comme les modèles fonctionnels et structuraux. Les premiers consistent à décrire par des fonctions analytiques explicites le comportement des échelles de sous-maille. Les deuxièmes cherchent à exprimer les effets manquants de la simulation grâce à des expressions dépendantes implicitement du champs résolu. Les modèles structuraux font partie de la base de cette thèse. Avec le temps et l'augmentation des moyens de simulation les modèles structuraux se sont complexifiés mais les plus utilisés conservent le même concept. Il est possible de citer le modèle de Smagorinsky [137] permettant d'établir une relation simple entre le tenseur de sous-maille et le champs résolu, jusqu'au modèle de Smagorinsky dynamique [49] permettant d'introduire un nouveau niveau de filtrage afin de calculer dynamiquement en espace et temps la constante de la version classique de ce modèle. Par soucis de simplification, ces méthodes imposent une relation de parallélisme entre le tenseur des déformations des échelles de sous-maille et du champs résolu, ce qui peut conduire à oublier le caractère multi-échelles des écoulements turbulents représentés théoriquement par la cascade de Kolmogorov et sa zone inertielle. Mais aussi le caractère parfois local des interactions entre échelles. C'est d'ailleurs en cela que réside la difficulté de la simulation numérique de ce type d'écoulement. Par ailleurs, cet effort de modélisation s'oppose depuis longtemps à un besoin de performance qui mène à préférer supposer que les dissipations numériques introduites implicitement par le maillage et les erreurs de résolution soient suffisantes pour modéliser les effets de sous-maille. Ces méthodes sont connues sous le nom de Monotone Integrated Large Eddy Simulation (MILES) ou Implicit Large Eddy Simulation (ILES) et introduitent par Grinstein et Fureby [43, 44, 55]. Cependant de telles approches sont beaucoup trop dépendantes des méthodes numériques et de la stabilisation utilisée. Comment les erreurs numériques fortement dépendantes des schémas et du maillage (spécialement dans les cas non structurés) peuvent-elles assurer le bon transfert d'énergie dans le volume et surtout à la paroi? Mais surtout comment peuvent-elles assurer la bonne forme fonctionnelle de ce transfert? Typiquement Levasseur [100] montre que dans le contexte de cette thèse, la stabilisation et le modèle de sous-maille ont des constructions et des rôles spectraux différents ne pouvant pas se remplacer mutuellement. La stabilisation ne permet pas par exemple de récupérer la pente en -5/3 de la fameuse turbulence homogène et isotrope (THI).

La SGE commence aujourd'hui à être utilisée dans le domaine industriel pour faire face au caractère instationnaire des enjeux aérodynamiques et aéroacoustiques. Bien que le coût numérique des deux modèles structuraux présentés ci-dessus soit relativement faible, il n'en reste pas moins que la pure utilisation de la SGE est encore rédhibitoire face aux problèmatiques de proche paroi. En effet, les modèles SGE ont beau avoir été adaptés afin d'avoir le comportement correct en proche paroi (voir méthodes Wall Adaptative Large Eddy Simulation (WALES) [60, 116, 123, 131]), il n'en reste pas moins que la précision en maillage requise est trop importante. En effet, les modèles SGE nécessitent de définir la modélisation sur une fenêtre spectrale précise appelée zone inertielle. Or la présence de paroi repousse cette dernière vers de très hauts nombres d'onde imposant des maillages très fins afin de capturer les structures nécessaires à la bonne restitution de l'écoulement. Ainsi des modèles hybrides ont émergés. Ils utilisent la performance des RANS éprouvés en proche paroi et des modèles SGE prometteurs en dehors. Ils permettent ainsi l'utilisation d'une méthode intermédiaire pertinente entre RANS et DNS pour la simulation de problèmes complexes des écoulements turbulents. Les approches les plus utilisées sont basées sur les travaux de Spalart et al [140, 148, 149] et se regroupent sous la dénomination de Detached Eddy Simulation (DES). Le principe est de faire dégénérer les équations Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes (URANS) utilisées proche paroi vers des modèles classiques de SGE loin de celle-ci. Par exemple dans le cas du modèle DES de Spalart-Allmaras, la dégénérescence se produit lors de l'égalisation du terme de production et de destruction loin de la paroi menant à l'expression d'une viscosité de sous-maille. Le terme URANS peut sembler contradictoire mais il consiste à rajouter un terme en gradient D/Dt aux équations RANS permettant d'introduire la notion de fluctuations temporelles dans l'écoulement simulé. Cependant, la dégénérescence des équations URANS contraint l'utilisation de modèles SGE qui sont connus aujourd'hui pour être perfectibles car sur-diffusif dans le volume. C'est typiquement le cas du modèle DES Spalart-Allmaras qui converge alors vers l'équivalent d'un modèle de Smagorinsky. Les modèles DES ont donc été complexifiés afin de corriger les effets négatifs issus par exemple des maillages, typiquement la qrey area où se mélange indistinctement les modèles URANS et SGE, et des modèles de sous-maille qui en résultent loin de la paroi. Une amélioration devenue standard et nommée Detached Delayed Eddy Simulation (DDES) [139, 150] modifie la distance à la paroi responsable de la dégénérescence des équations en protégeant la couche limite par une fonction dédiée. Cela permet une transition plus nette entre la zone SGE et URANS permettant d'éviter les problèmes néfastes de la grey area. D'autres améliorations consistent encore à modifier l'expression de la taille de barre afin de favoriser une transition plus rapide vers une turbulence établie des modèles DES/DDES, par exemple aux bords de fuites voir [136]. Les méthodologies de la DES/DDES sont regroupées sous le terme de Zonal Detached Eddy Simulation (ZDES) introduite par Deck [27]. La ZDES présente différents modes qui regroupent la DES, la DDES et une approche zonale. Le mode 1 est intrinsèquement équivalent à la DES et le mode 2 à la DDES. Chacun de ces modes présentent différentes implémentations du calcul de la taille de barre telles que Δ_{Vol} , Δ_{max} ou encore Δ_w . Concrètement les modes 1 et 2 visent à utiliser les grandeurs définies par le maillage telle que la taille de maille Δ_m afin de les rendre plus ou moins indépendantes de la topologie de celui-ci et finalement d'adapter le coefficient scalaire de viscosité turbulente ν_t des modèles classiques de sous-maille. Ce constat permet de

conclure que les modèles de sous-maille utilisés aujourd'hui présentent un problème intrinsèque à leur construction qui nécessite de les adaptés aux écoulements étudiés. Cependant plus que de simplement regrouper sous la même dénomination les approches types DES, la ZDES et son mode 3 proposent une nouvelle manière de concevoir la simulation SGE. Le mode 3 consiste à définir strictement des zones de maillage où la SGE et le URANS sont appliqués séparément. Ce mode présente des résultats pertinents dans des problèmes complexes car il permet une économie importante ou du moins une utilisation plus intelligente des mailles. Cependant, de nombreux problèmes en terme de topologie de maillage mais aussi en terme de génération synthétique de turbulence aux interfaces URANS vers SGE sont à prévoir. Ce dernier problème présente encore aujourd'hui des soucis pour les simulations aéro-acoustiques car les termes de production génèrent des ondes numériques plus intenses que les fluctuations de pression acoustique. Par ailleurs avec une telle méthode, l'utilisateur est tributaire de la connaissance *a priori* de l'écoulement à étudier rendant ainsi le mode 3 difficile à utiliser pour des configurations innovantes en industrie.

Une nouvelle approche, les approches hybrides couplées fortement [159], a donc été proposée afin de tirer les meilleures performances de chacun des modèles et ne pas être restreint aux modèles SGE issus de la dégénérescence des équations URANS. Celle-ci consiste à résoudre en parallèle le système d'équation bas et hauts nombre d'onde, chacun des systèmes interagissant avec l'autre à travers un terme de couplage. Cependant le coût numérique de telles approches est encore inadapté à une simulation industrielle. Ainsi l'approche couplée faiblement [74, 151, 152] semble être le meilleur compromis pour les simulations complexes, permettant d'allier efficacité, agilité et performance des modèles de sous-maille et de turbulence.

Lorsque le système d'équation est formalisé par des considérations physiques, il est nécessaire d'utiliser des méthodes numériques appropriées pour sa résolution. Différentes approches existent comme les différences finies, volumes finis ou éléments finis. Ces dernières sont classiquement utilisées pour résoudre des problèmes définis dans l'espace réel mais peuvent avoir des déclinaisons dans le domaine spectral.

La méthode des différences finis consiste par nature à différencier les équations par séries de Taylor de manière à obtenir des expressions nodales des équations à résoudre. Chaque nœud du maillage dépend alors de ses voisins plus ou moins éloignés. La méthode des volumes finis introduit la notion de volume dans la résolution numérique. Ainsi des intégrales sont calculées et résolues grâce à une forme bilan des flux sortant et entrant du problème étudié. Dans ce type d'approche, seuls les volumes voisins interagissent ensemble permettant de définir plus naturellement le problème sur un maillage non-structuré. Finalement la méthode des éléments finis est issue d'une formulation variationnelle du problème permettant de découper l'étude des équations sur différents éléments, puis sur un élément unique de référence. Les flux sont calculés grâce à un nombre fini de fonctions d'interpolation qui sont au cœur de cette méthode. Cela fait d'elle une approche parfaitement adaptée à la résolution des problèmes sur des maillages non structurés. Toutes ces méthodes présentent leurs avantages et inconvénients mais divergent par exemple par leur caractère de résolution plus ou moins spatialement et temporellement restreinte. En effet en différences finis, il est possible d'interagir avec l'ensemble des nœuds du maillage contrairement à la méthode des éléments finis où seuls les nœuds locaux à l'élément sont accessibles. Ainsi, la méthode des volumes finis apparait comme un intermédiaire entre les deux autres. Par ailleurs sous certaines conditions, elle est mathématiquement équivalente à celle des éléments finis, voir Guillard et Abgrall [59]. Cette thèse ayant une portée industrielle, la méthode des éléments finis propose une base pertinente à la résolution de problèmes présentant une géométrie complexe. Elle est donc utilisée et étudiée dans ce manuscrit. Pour plus d'information sur le fonctionnement des éléments finis se reporter par exemple à Hughes [66].

Comme pour les autres méthodes, celles des éléments finis soulève de nombreuses questions qu'en à la discrétisation temporelle et spatiale des équations, qui est ici sur le volume de l'élément. 14

L'interpolation doit-elle être temporelle et/ou spatiale ? Comment réduire les erreurs commises ? Quels sont les schémas les plus adaptés ? Ainsi une vaste gamme de formulations existent comme par exemple la formulation Galerkine classique ou discontinue, espace-temps ou semi-discrète voir encore même avec toute la gamme des fonctions d'interpolation qu'il est possible d'utiliser. Typiquement, l'approche de Galerkine discontinue augmente les degrés de liberté permettant de calculer les résidus locaux en utilisant une forme discontinue de la solution et en adaptant les flux entrant et sortant au grès de la méthode ou du modèle. Cette idée se rapproche d'ailleurs de celle des volumes finis. Mais cette flexibilité se paie au prix d'un sur-coût conséquent en terme de besoin en capacités numériques. Ainsi l'approche Galerkine classique semble plus raisonnable pour mener les études dans cette thèse.

Malgré le but d'obtenir une certaine harmonie entre la modélisation physique et le traitement numérique, il est toutefois difficile d'affirmer l'universalité d'un modèle et de son implémentation. Ces derniers ne peuvent être optimaux à tous les types de méthodes de résolution de part la nature numérique d'un tel projet. En effet, il ne faut pas oublier qu'en plus de l'opérateur Navier-Stokes à modéliser, les modèles doivent faire face aux erreurs numériques intrinsèquement liées aux petites échelles qu'il est nécessaire de calculer avec une discrétisation donnée. Une approche complémentaire à la modélisation physique de ce type de problème multi-échelle, réside dans l'interprétation numérique qu'il est possible d'en avoir. Introduire un effet diffusif afin de modéliser le flux des petites échelles est intrinsèquement équivalent à introduire un flux diffusif afin de détruire les échelles mal modélisées dans le calcul. Ces petites échelles sont dépendantes du maillage et de la méthode de résolution rendant ainsi tributaire la modélisation utilisée au code de calcul. Le caractère bivalent d'un tel travail numérique apparait alors : un modèle qui soit adapté d'une part à la physique mise en jeu, d'autre part à la méthode numérique utilisée.

Les travaux de Hughes [67, 68, 73] sont le paradigme de ce concept. Ils proposent un cadre mathématique pertinent en éléments finis pour comprendre les moyens de modéliser des problèmes plus généraux présentant l'interaction de nombreuses échelles, problèmes dans lesquels s'insèrent les équations de Navier-Stokes. Mais surtout, ils donnent une justification aux travaux de cette thèse et à la méthode numérique choisie : les éléments finis.

Ainsi le caractère local de la méthode éléments finis de Galerkine prend tout son sens dans un tel contexte. Par développement de la formulation faible des équations de la SGE, il est possible de séparer les effets des différentes échelles du problème qui sont dans le cas des équations de Navier-Stokes, les champs résolu et filtré. L'équation du champ résolu peut alors classiquement être calculée uniquement si le champ filtré est connu. Or grâce à la définition d'opérateurs mathématiques naturels à la formulation variationnelle, il est possible de définir une fonction de Green permettant de résoudre le problème fermé du champ filtré. Grâce à cette fonction de Green liées aux échelles non résolues, un estimateur volumique et surfacique à l'élément est construit permettant de définir le modèle de sous-maille mais aussi la stabilisation de la méthode numérique. Attention cette définition n'a pas de sens global mais uniquement local à cause de son caractère discontinu, la rendant ainsi parfaitement adaptée à la méthode des éléments finis. De cette analyse discontinue du champs Navier-Stokes, il découle la définition des méthodes de stabilisation Streamwise Upwind Petrov-Galerkin (SUPG) et des modèles Variational Multi-Scale (VMS). La construction de la fonction SUPG a pour objectif de s'opposer à la sur-convection introduite par la résolution numérique en éléments finis *i.e.* à introduire une diffusion supplémentaire pour s'opposer à la convection de toutes les échelles de l'écoulement. Les modèles VMS servent qu'en à eux de modèles de sous-maille. L'idée sous-jacente est d'utiliser une séparation naturelle des différentes échelles de l'écoulement et de diffuser la bonne fenêtre spectrale grâce aux informations d'un support spectral pertinent. Ces derniers sont décris de manière plus appliquée, développée et physique dans Sagaut et al [129]. Des approches SGE et éléments finis de la VMS sont disponible dans [71, 77, 85, 90, 135]. D'une part, la compréhension de ces travaux permet de donner une base solide à la stabilisation SUPG utilisée dans cette thèse mais aussi

de justifier que la structure des termes de cette stabilisation n'est pas propice à la modélisation des échelles de sous-maille de part leur action spectrale différente. L'une cherche à corriger toutes les échelles, l'autre à appliquer une forme précise de flux diffusif sur un support spectral donné. D'autre part, la définition locale du modèle de sous-maille n'est pas contradictoire avec l'aspect non local de la définition du filtrage des petites échelles, et donc au support spectral de la méthode de filtrage.

Ainsi, un des buts de cette thèse est de se baser sur les travaux déjà réalisés à Dassault Aviation afin de proposer une approche uniformisée des modèles de sous-maille, tout en gardant à l'esprit le contexte multi-échelle intrinsèque aux équations de Navier-Stokes. Il sera possible grâce à cette approche de mieux comprendre le caractère équivalent des aspects numériques propres aux éléments finis de Galerkine (fonction de forme, points d'intégration, filtrage, ordre élevé *etc* ...) avec la modélisation physique des échelles de sous-maille et la stabilisation numérique. Ainsi, il est espéré pouvoir montrer la pertinence de la VMS face à des modélisations SGE purement physiques.

Comme il a été précisé, la construction de l'estimateur de la fonction de Green des échelles de sous-maille est propre à la méthode numérique choisie parmi la famille des éléments finis. Ainsi, les choix détaillés faits dans cette thèse doivent être remis en question dans l'implémentation d'autres codes. Cependant même s'il est encore impossible de donner une forme analytique à la fonction d'erreur/fonction de Green recherchée, il n'en reste pas moins que les idées directrices reprises et développées dans cette thèse peuvent êtres réutilisées et adaptées à d'autres contextes de méthodes numériques.

Les travaux de thèse de Stéphane Galdeano menés chez Dassault Aviation de 2009 à 2012 [46] ont permis le développement d'un processus instationnaire SGE d'évaluation mettant en œuvre l'approche préconisée par IROQUA et la mise en place de méthodes d'analyses acoustiques associées (localisation numérique de sources, ...). Dans le processus, l'écoulement instationnaire est obtenu avec une résolution par méthode *Detached Eddy Simulation* (DES) en éléments finis non-structurés. L'emploi des éléments finis non-structurés est un choix fait par Dassault Aviation très original en simulation numérique des fluides. Comme présenté plus loin, ces choix permettent une préparation et des retours relativement rapides des calculs instationnaires : le temps est un facteur clef dans la conception de nouveaux avions. Par essence même de la méthode éléments finis, les maillages peuvent être non structurés ce qui raccourcit drastiquement le temps dépensé pour leur création. Mais surtout, cette caractéristique est indispensable dans un contexte industriel pour gérer aisément les géométries complexes avec un niveau de détails élevé.

Les travaux de Galdeano ont confirmé le potentiel de ce type d'approche pour l'évaluation du bruit aérodynamique, mais ils ont aussi montré qu'une bonne restitution du bruit exige une précision élevée dans le calcul de l'écoulement. Cela implique une grande finesse de maillage, y compris en éléments finis où les schémas numériques sont usuellement d'ordre 2 ou O_2 *i.e.* des fonctions d'interpolation linéaires. De ce fait, les coûts et la durée de tels calculs acoustiques restent élevés pour un usage en contexte applicatif. De plus, le volume de mémoire et de stockage nécessaire qui en découle limite les applications à des configurations de petites dimensions. Ceci bride l'intérêt des éléments finis et ne permet pas de tenir compte convenablement des effets d'interaction entre les éléments de la voilure. Par exemple c'est le cas pour les interactions atterrisseurs/volets, les interactions becs/volets *etc* ... alors que ceux-ci sont importants en terme de conception de la cellule avion, de compréhension des mécanismes sources et d'identification de moyens de réduction du bruit [1, 30].

Dans le but d'améliorer la précision des calculs numériques et de proposer plus de possibilités algorithmiques aux méthodes et modèles numériques, Dassault Aviation a choisi de développer une approche de calcul ordre élevé. Ceci a été initié dans le cadre de la thèse de Pierre-Elie Normand [118]. Les bases théoriques de ces approches ayant été établies, une version du code de simulation AETHER (AEro-THER modynamique) de Dassault Aviation a été développée afin de pouvoir réaliser des simulations à l'ordre élevé et quantifier les gains numériques. Toutefois cette approche étant encore en phase de développement, toutes les possibilités apportées par la montée en ordre ne sont pas utilisées. Il existe donc un fort potentiel de gain en terme d'efficacité algorithmique, de précision et de capacité de modélisation. Toutefois ces travaux sont en dehors du sujet de cette thèse.

Les applications de ce processus hybride *i.e.* calculs aérodynamiques instationnaires et analogie acoustique utilisent très majoritairement une approche DES. De ce fait, l'écoulement instationnaire dans les couches limites est fortement atténué ce qui empêche l'étude des configurations où le comportement instationnaire des couches limites impacte les sources de bruit. Par exemple c'est le cas pour le bruit propre de la couche limite, l'impact des structures turbulentes générées en proche paroi *etc* ... et bien sûr du bord de fuite. Le recours à une résolution SGE en ordre élevé en éléments finis avec gestion proche paroi permettant de conserver plus de fluctuations est donc l'étape suivante à développer pour les méthodes de résolution chez Dassault Aviation.

Les approches stationnaires des calculs de couches limites couplées à des approches classiques de modélisations SGE peuvent conduire à des mauvaises restitutions de l'écoulement dans des zones de couche de cisaillement par exemple, voir Spalart *et al* [136]. L'amélioration des modèles SGE de Dassault Aviation a fait l'objet de la thèse de Vincent Levasseur [99]. L'objectif fut de quantifier le gain apporté par des modélisations types VMS à l'ordre simple en éléments finis. Grâce à un filtrage Gaussien classique, Levasseur pose les bases d'une formulation générale des équations filtrées en variables entropiques en éléments finis mais aussi étudie les différents éléments intrinsèques à ces méthodes comparées aux modèles classiques. Cette thèse a permis d'identifier les avantages de ces méthodes et l'intérêt de l'ordre élevé des éléments finis pour accroître encore plus leur performance comme le sous-entend la théorie sur l'estimation de la fonction de Green.

Le travail de cette thèse

Cette thèse s'appuie donc sur les trois travaux précédemment réalisés [46, 99, 118]. Le premier objectif de cette thèse est le développement d'une méthode SGE permettant des calculs instationnaires plus fidèles.

Pour cela les travaux sur l'ordre élevé et la VMS sont repris afin d'établir une approche filtrée générale la plus adaptée à la méthode éléments finis. Le principe est d'utiliser les éléments d'ordre élevé afin de proposer un filtrage qui soit lui aussi transparent avec la montée en ordre et permettant ainsi de l'améliorer naturellement. Des méthodes de réduction de coûts numériques sont développées en parallèle afin de minimiser les coûts de calcul de la méthode retenue. En effet, la montée en ordre devient naturelle et très simple grâce aux éléments finis, ce qui est l'un des enjeux de cette thèse : implémenter une montée en ordre transparente pour le modèle SGE et ainsi espérer pouvoir diminuer le besoin en capacité machine pour une même précision.

Par ailleurs, le coût numérique de la gestion proche paroi reste un point crucial afin de réaliser des calculs instationnaires dans un contexte industriel. Il est donc important que la méthode SGE implémentée puisse permettre une certaine agilité et utiliser naturellement différentes modélisations de paroi. Pour cela, une approche de gestion de paroi sera développée afin d'adapter le modèle SGE d'ordre élevé aux calculs aérodynamiques complexes.

Enfin, l'approche des calculs aéro-acoustiques est reprise afin de pouvoir tester ce nouveau modèle dans une configuration typique de bruit de profil. Les gains de ce nouveau modèle sont quantifiés mais ce dernier est aussi utilisé afin de mieux comprendre les phénomènes aérodynamiques et acoustiques dans ce cas d'étude. Sur la base de ces travaux, l'objectif est d'améliorer de manière industrielle les simulations instationnaires utilisées par exemple pour la prédiction de bruit et mieux comprendre les phénomènes acoustiques. Ainsi il sera possible de palier à cette nuisance plus efficacement et produire des avions plus optimisés et plus silencieux.

Présentation du mémoire

Ce mémoire se découpera en plusieurs parties permettant au lecteur de comprendre comment les développements théoriques établis dans cette thèse ont été adaptés à la méthode numérique des éléments finis.

La première partie de ce manuscrit a pour objet une présentation numérique permettant de poser les bases de cette thèse. Le premier chapitre permet d'introduire les équations étudiées mais surtout leur formulation mathématique originale : une formulation matricielle en variables entropiques. Le deuxième chapitre permet de présenter la méthode de résolution numérique avec l'approche de Galerkine semi-discrète qui est à la base du code AETHER. Les choix numériques sont présentés permettant de fournir les outils utilisés dans la formulation SGE de cette thèse. Le troisième chapitre décrit un cas d'étude présentant les performances du code et permet d'estimer l'ordre de grandeur d'un coefficient qui est utilisé afin de concevoir les futures simulations.

La deuxième partie présente des méthodes SGE classiques afin de mieux comprendre les améliorations apportées par l'approche VMS. Le deuxième chapitre de cette partie développe une méthode de filtrage générale, optimisée en terme de coût numérique à la méthode éléments finis utilisée dans AETHER. Au final, l'implémentation de ce modèle ainsi que sa gestion de la paroi sont présentées permettant d'avoir l'ensemble de l'approche théorique et numérique nécessaire à la compréhension des calculs de validation et d'application de la dernière partie.

Enfin, la dernière partie est consacrée à la validation de l'approche théorique et numérique choisie grâce à l'étude de deux cas fondamentaux. Le calcul des tourbillons de Taylor Green [12] constitue un cas universitaire permettant de valider le modèle implémenté sur un écoulement idéalisé. Cette étape permet de valider l'effet du modèle SGE sur un cas possédant une solution connue. Le cas industriel retenu est celui du workshop BANC nommé LEISA II [108]. L'étude de ce tri-corps hypersustenté permet de quantifier le gain de l'approche numérique de cette thèse vis-à-vis des approches classiques. Mais surtout de démontrer la performance des méthodes et modélisations développées dans cette thèse. Les simulations numériques instationnaires peuvent aujourd'hui être utilisées dans un cas industriel afin de mieux comprendre les écoulements complexes à l'origine des phénomènes que l'ingénieur aéro-dynamicien souhaite maîtriser.

Table des matières

R	emerciements	3
N	omenclature	5
In	ntroduction	9
Ι	Formulation numérique	21
1	Équations matricielles de Navier-Stokes 1.1 Les équations de Navier-Stokes 1.2 Équations de Navier-Stokes sous forme matricielle 1.3 Symétrisation et formulation entropique	23 24 29 29
2	Méthode Galerkine et éléments finis 2.1 Formulation variationnelle 2.2 Formulation faible 2.3 Discrétisation spatiale et temporelle par éléments finis 2.4 Stabilisation de la formulation des éléments finis 2.5 Outils éléments finis pour les modèles multi-échelles 2.6 Conclusion	31 33 34 35 40 45 50
3	Pulse acoustique Gaussien 3.1 Présentation de l'étude et initialisation 3.2 Résultats numériques 3.3 Conclusion Modélisation	51 54 56 59
4	Modélisation instationnaire de la turbulence 4.1 Le filtrage et la SGE 4.2 Les équations de la SGE 4.3 Modélisation de sous-maille 4.4 Le modèle VMS 4.5 Formulation matricielle entropique de la VMS	61 62 65 70 74 77
5	Filtrage en éléments finis 5.1 La problématique du filtrage et sa définition locale 5.2 Méthodes de résolution 5.3 Équivalence des approches de filtrage	85 85 89 90

	$5.4 \\ 5.5$	Le filtrage numérique par <i>interpolation</i> en pratique	96 100
6	L'hy 6.1 6.2 6.3	ybridation avec modèle de paroi Filtrage et formulation VMS	101 101 103 104
II	I A	pplication à deux écoulements (académique et industriel)	109
7	Les 7.1 7.2 7.3	tourbillons de Taylor Green Présentation de l'étude Présentation des résultats numériques Conclusion	111 111 118 123
8	Aér 8.1 8.2 8.3 8.4	oacoustique du tricorps hypersustenté : LEISA II Présentation du cas LEISA II Résultats numériques de l'étude du bruit de bec Effets de l'ordre spatial et du modèle Conclusion	127 127 141 177 188
Sy	nthè	èse et Conclusion	191
IV	γА	nnexe	197
Α	For A.1 A.2 A.3 A.4 A.5	mulation matricielle Navier-Stokes et notation d'Einstein Matrices des flux d'Euler et de diffusivité Formulaire thermodynamiques d'un gaz divariant Changement de variable entropique Matrices entropiques	 199 201 202 203 205
в	Mét B.1 B.2 B.3 B.4 B.5	chode des éléments finis Intégration par parties et formulation faible Élément de référence Élément de référence Equation d'advection diffusion 1D Matrices tangente et résidu élémentaires Exemple de calcul de règle d'intégration	211 211 212 213 214 215
С	Mod C.1 C.2 C.3 C.4	dèles de sous maille L'échelle de Kolmogorov Équations de bilan complémentaires Développement des équations filtrées de Navier-Stokes Détermination de la constante du modèle Small-Small	 217 217 218 220 222
D	Filt D.1	rage Filtrage Différentiel et filtrage par Interpolation	225 225

Première partie Formulation numérique

Chapitre 1

Équations matricielles de Navier-Stokes

Sommaire

1.1 Le	s équations de Navier-Stokes	24
1.1.1	L'équation de continuité : la conservation de la masse	24
1.1.2	2 Équation de conservation de la quantité de mouvement	25
1.1.3	B Les équations de conservation de l'énergie	27
1.1.4	Système d'équation Navier-Stokes	28
1.2 Éq	uations de Navier-Stokes sous forme matricielle	29
1.3 Sy	métrisation et formulation entropique	29

Les équations de Navier-Stokes découlent d'une formulation eulérienne des équations de la mécanique classique sur une particule fluide. Sous réserve que la particule fluide soit de taille très supérieure au libre parcours moyen d'une molécule, ce système d'équations est supposé décrire précisément le mouvement du fluide. Les équations de Navier-Stokes regroupent une équation scalaire sur la conservation de la masse, une équation vectorielle sur la conservation de la quantité de mouvement et une équation scalaire sur la conservation de l'énergie. Telles quelles, ces équations sont insuffisantes pour représenter un fluide. En effet, des hypothèses supplémentaires doivent être faites sur la nature du fluide voir même sur l'environnement chimique.

Nombreuses sont ces hypothèses issues de la thermodynamique et de la physique statistique. Par exemple, prenons le cas de la viscosité de volume ζ (Bulk viscosity en anglais) pour le cas qu'un gaz. Ce coefficient n'est pas constant mais est fonction d'un coefficient de relaxation permettant le retour vers un équilibre énergétique des molécules du gaz. En effet selon le théorème d'équi-répartition de l'énergie, les énergies issues de chaque degré de liberté d'une molécule doivent être égales pour être en équilibre. Si l'énergie cinétique correspondant à l'énergie de translation augmente, il faut que ce surplus d'énergie soit transmis aux autres degrés de liberté tels que la rotation et la vibration. Ce temps de retour à l'équilibre correspond à un temps de relaxation. Il change la valeur de la capacité thermique du fluide sur une période très courte de l'ordre du gigahertz. Mais pour certaines applications ce temps peut être suffisant pour créer un effet de viscosité traduit par le coefficient ζ . Contrairement à la viscosité moléculaire cinématique ν , la viscosité de volume n'est pas associée à une dissipation vers les échelles microscopiques hors du cadre de nos équations de continuité. C'est plutôt un déphasage du système dynamique qui diminuerait son efficacité. Ce coefficient est nul pour le cas d'un gaz mono-atomique car ce dernier ne possède pas d'autre degré de liberté que ses translations.

Des lois de comportement de fluides peuvent être développées telles que celles proposées pour les fluides rhéostatiques. Cependant toutes ces hypothèses et interprétations physiques peuvent très rapidement complexifier l'étude des équations et leur résolutions numériques, ce qui serait trop éloigné pour le sujet de cette thèse. La réflexion est restreinte aux hypothèses suivantes permettant de bien représenter le comportement de l'air dans le domaine cible de ce manuscrit : l'aéroacoustique. L'air est supposé être un gaz parfait divariant ayant donc les caractéristiques suivantes : $\zeta = 0$ kg.m⁻¹.s⁻¹ ce qui revient à négliger l'absorption des ondes acoustiques, $\gamma = 1, 4$ et r = 288 K.m².s⁻². L'écoulement de l'air est supposé compressible pour pouvoir y étudier l'acoustique. La loi d'état de l'air est celle donnée par l'équation de Lamé-Stokes et le flux thermique est représenté par l'équation de Fourier. Cependant, modulo les différentes équations de modélisation du fluide, l'esprit des méthodes employées ici peut être généralisé.

Les équations servant de base aux calculs numériques de cette thèse sont développées dans ce chapitre.

1.1 Les équations de Navier-Stokes

1.1.1 L'équation de continuité : la conservation de la masse

L'équation de conservation de la masse découle d'une analyse de bilan des entrées et sorties de masse sur une particule fluide. Comme la masse se conserve, sa dérivée temporelle est nulle. Cependant, la masse locale de la particule peut varier temporellement mais aussi peut varier par convection à cause de la vitesse du fluide. Cette équation globale peut s'écrire de la manière suivante en considérant le volume Ω d'une particule

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho\left(\mathbf{\underline{x}}, t\right) d\Omega = \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{div}\left(\rho\mathbf{\underline{u}}\right)\right] d\Omega = 0$$

où $\rho \underline{\mathbf{u}}$ est le flux de quantité de matière à travers le volume de contrôle Ω et $\partial \rho / \partial t$ représente la variation de quantité de matière en fonction du temps. Cette dernière n'est pas nulle car localement la masse volumique peut changer à cause de la dilatation par exemple.

Par ailleurs puisque le volume utilisé ne dépend pas du temps, les intégrales volumiques et la dérivée temporelle commutent. L'équation locale de la conservation de la masse peut alors être retrouvée en considérant que le volume Ω est quelconque. L'équation de conservation de la masse est en fait une équation de continuité du milieu et s'écrit de manière locale sous la forme suivante

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{div} \left(\rho \underline{\mathbf{u}} \right) = 0 \tag{1.1}$$

Une formulation plus intéressante pour comprendre la physique des écoulements est l'opérateur de dérivée particulaire, définit par

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{grad}})$$

Cet opérateur est lié à la notion de "dérivation en suivant une particule". Dès lors si une particule est incompressible, la dérivée en temps et en espace de sa masse volumique dans son mouvement sera nulle *i.e.* la dérivée particulaire de la masse volumique sera nulle. L'équation (1.1) peut se réécrire comme suit

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \mathbf{div} \left(\underline{\mathbf{u}}\right) = 0 \tag{1.2}$$

Il est aussi possible de noter que l'incompressibilité se traduit aussi par le fait que $\operatorname{div}(\underline{\mathbf{u}}) = 0$ dans les hypothèses de cette thèse.

Dans la suite le théorème de Reynolds [125] est utilisé. Soit un volume matériel Ω et Φ une fonction quelconque, la formule suivante est vérifiée

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\Omega}\rho\Phi d\Omega = \iiint_{\Omega}\rho\frac{D\Phi}{Dt}d\Omega$$
(1.3)

1.1.2 Équation de conservation de la quantité de mouvement

Soit $\rho \underline{\mathbf{u}}$ la quantité de mouvement. Les seules variations de cette quantité sont dues à des forces volumiques ($\underline{\mathbf{f}}_v$) ou surfaciques ($\underline{\mathbf{f}}_s$) d'après le deuxième principe de Newton. Ainsi

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\Omega}\rho\mathbf{\underline{u}}d\Omega = \iiint_{\Omega}\underline{\mathbf{f}}_{v}d\Omega + \iint_{\partial\Omega}\underline{\mathbf{f}}_{s}d\Gamma$$

où Γ est la surface de la particule de volume Ω . Les seules forces volumiques existantes dans les configurations étudiées dans cette thèse sont les forces de pesanteurs qui sont négligeables dans les études aéronautiques à haut nombre de Reynolds. Par ailleurs les forces surfaciques sont notées comme un tenseur appelé le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$. En appliquant le théorème de Reynolds et en supposant que le volume Ω est quelconque, l'équation locale de quantité de mouvement est obtenue. L'équation de conservation de la quantité de mouvement est

$$\rho \frac{D\mathbf{\underline{u}}}{Dt} = \underline{\mathbf{div}} \left(\underline{\boldsymbol{\sigma}} \right)$$

soit encore,

$$\rho\left(\frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{grad}}) \ \underline{\mathbf{u}}\right) = \underline{\operatorname{div}}\left(\underline{\boldsymbol{\sigma}}\right)$$

où comme précisé, $\underline{\sigma}$ est le tenseur des contraintes appliquées sur le fluide. Il existe une autre forme de cette équation, plus pratique pour les études énergétiques

$$\rho\left(\frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial t} + \underline{\mathbf{grad}}\left(\frac{\underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{u}}}{2}\right) - \underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{rot}}\left(\underline{\mathbf{u}}\right)\right) = \underline{\mathbf{div}}\left(\underline{\boldsymbol{\sigma}}\right)$$

où \times représente le produit vectoriel. Cette forme permet d'introduire la notion d'énergie cinétique volumique $\underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{u}}/2$ ainsi que la notion de vorticité du fluide notée et définie par

$$\underline{\mathbf{w}} = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{rot}} \left(\underline{\mathbf{u}} \right)$$

Ainsi, l'équation de quantité de mouvement peut se réécrire avec e_c et $\underline{\mathbf{w}}$

$$\rho\left(\frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial t} + \underline{\mathbf{grad}}\left(e_c\right) - 2\underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{w}}\right) = \underline{\operatorname{div}}\left(\underline{\boldsymbol{\sigma}}\right)$$
(1.4)

Pour un fluide newtonien, le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ est relié à la partie symétrique du tenseur des taux de déformation des vitesses $\underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{grad}}(\underline{\mathbf{u}})$ en introduisant les coefficients de Lamé-Stokes, $\lambda \in \mu$. De manière générale, l'hypothèse de Stokes est utilisée menant à la relation $3\lambda + 2\mu = 0$. Cette hypothèse n'est valable que pour des fluides simples newtonien comme l'air. μ est appelé viscosité moléculaire dynamique et il est possible de définir la viscosité moléculaire cinématique ν par $\mu = \rho \nu$. μ est de l'ordre de 2.10^{-5} kg.m⁻¹.s⁻¹ pour l'air.

$$\underline{\sigma} = -p\underline{\mathcal{I}} + 2\mu\underline{\mathbf{S}} - \left(\frac{2}{3}\mu + \zeta\right)\mathbf{tr}\left[\underline{\mathbf{S}}\right]\underline{\mathcal{I}}$$
(1.5)

où tr $[\underline{S}]$ est la trace de la matrice \underline{S} , correspondant au scalaire formé par la somme des valeurs diagonales de la matrice.

Ceci est la loi d'état pour un fluide newtonien compressible, où p est la pression thermodynamique du fluide et $\underline{\mathbf{S}}$ est la partie symétrique du tenseur des taux des déformations des vitesses défini de la manière suivante

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\mathbf{grad}}} \left(\underline{\mathbf{u}} \right) + \underline{\underline{\mathbf{grad}}} \left(\underline{\mathbf{u}} \right)^T \right)$$

Dans les hypothèses faites en introduction, la viscosité de volume est supposée nulle : $\zeta = 0$. Ainsi sous forme vectorielle, l'équation de conservation de la quantité de mouvement devient

$$\rho\left(\frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial t} + \left(\underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{grad}}\right)\underline{\mathbf{u}}\right) = -\underline{\mathbf{grad}}\left(p\right) + \mu\underline{\underline{\Delta}}\left(\underline{\mathbf{u}}\right) - \frac{1}{3}\mu\underline{\mathbf{grad}}\left(\mathbf{div}\left(\underline{\mathbf{u}}\right)\right)$$
(1.6)

Remarque 1.1 Notons que si le fluide est incompressible, la divergence de la vitesse est nulle. Ainsi le terme $-\mu \underline{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}(\underline{\mathbf{u}}))/3$ n'apparait pas dans l'équation de quantité de mouvement. En effet, il correspond à un terme de viscosité de compressibilité volumique : la particule étant incompressible, son volume ne change pas.

Attention, ce terme n'agit pas de la même manière que ζ . En effet en prenant la moyenne de la trace de $\underline{\sigma}$ correspondant aux dissipations volumiques, il découle deux contributions

$$\frac{1}{3}\mathbf{tr}\left[\underline{\boldsymbol{\sigma}}\right] = -p + \zeta \mathbf{tr}\left[\underline{\mathbf{S}}\right]$$

Ainsi ζ agit bien de manière normale à la particule comme le ferait la pression contrairement au terme en $-\mu \operatorname{grad}(\operatorname{div}(\underline{\mathbf{u}}))/3$.

Pour la suite, la partie déviatrice de la partie symétrique du tenseur des taux de déformation $\underline{\mathbf{S}^{D}}$ est définie par

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}} - \frac{1}{3} \mathbf{tr} \left[\underline{\underline{\mathbf{S}}}\right] \underline{\underline{\mathcal{I}}}$$

Remarque 1.2 Si le fluide est incompressible, la trace de \underline{S} est nulle. Ainsi $\underline{S} = \underline{S}^{\underline{D}}$. La partie en div (\underline{u}) dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement est donc due à la partie déviatrice du tenseur des contraintes.

La matrice du tenseur des taux des déformations des vitesses $\underline{\underline{D}}$ peut être séparée en sa partie symétrique $\underline{\underline{S}}$ et sa partie antisymétrique notée $\underline{\underline{\Omega}}$ et nommée tenseur de vorticité.

$$\underline{\underline{\mathbf{\Omega}}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\mathbf{grad}} \left(\underline{\mathbf{u}} \right) - \underline{\underline{\mathbf{grad}}} \left(\underline{\mathbf{u}} \right)^T \right)$$

Le produit doublement contracté de $\underline{\Omega}$ est alors proportionnel au carré de la norme du vecteur vorticité

$$\underline{\underline{\Omega}}:\underline{\underline{\Omega}}=\frac{1}{4}\underline{\mathbf{w}}\cdot\underline{\mathbf{w}}=\frac{1}{4}\|\underline{\mathbf{w}}\|^2$$

Ainsi le tenseur du taux de déformation est la somme d'une partie symétrique et d'une partie antisymétrique

$$\underline{\underline{\mathbf{grad}}}\left(\underline{\mathbf{u}}\right) = \underline{\underline{\mathbf{D}}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}} + \underline{\underline{\mathbf{\Omega}}}$$

Dans la suite, la forme de l'équation de quantité de mouvement utilisée sera

$$\rho \frac{D\underline{\mathbf{u}}}{Dt} = -\underline{\mathbf{grad}}\left(p\right) + \underline{\mathbf{div}}\left(2\mu \underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}}\right)$$
(1.7)

1.1.3 Les équations de conservation de l'énergie

Il existe plusieurs équations de conservation pour l'énergie. Le choix d'une forme d'équation est fonction du type d'énergie qu'il est intéressant d'étudier : l'énergie totale E_t , l'énergie cinétique E_c , l'énergie interne E_i , l'enthalpie H ou encore l'entropie S. Dans ce paragraphe toutes les formes sont présentées en explicitant les hypothèses thermodynamiques prises en compte dans cette thèse.

L'énergie totale

Classiquement, il est intéressant de commencer par un bilan sur une quantité globale telle que l'énergie totale. En effet, les seuls apports d'énergie existants dans les configurations étudiées dans cette thèse sont dus à la dissipation *i.e.* à la viscosité $\underline{\sigma} \cdot \underline{\mathbf{u}}$, ou à la conduction *i.e.* aux transferts de chaleur $\mathbf{q}^{\mathbf{T}}$.

Le flux de chaleur peut être exprimé selon la loi de Fourier par

$$\underline{\mathbf{q}^{\mathbf{T}}} = -\lambda_{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{grad}}\left(\mathrm{T}\right)$$

Ainsi en utilisant le théorème de Reynolds et en considérant un volume Ω constant, l'équation locale de conservation de l'énergie totale peut être obtenue

$$\rho \frac{De_t}{Dt} = \operatorname{\mathbf{div}}\left(\underline{\mathbf{q}^{\mathrm{T}}}\right) + \operatorname{\mathbf{div}}\left(\underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{u}}\right)$$

En séparant les contributions de la pression et celle de la viscosité, il vient l'équation classique de la conservation de l'énergie totale

$$\rho \frac{De_t}{Dt} = \mathbf{div} \left(\underline{\mathbf{q}^{\mathbf{T}}} \right) - \mathbf{div} \left(p \underline{\mathbf{u}} \right) + \mathbf{div} \left(\underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}} \cdot \underline{\mathbf{u}} \right)$$
(1.8)

Remarque 1.3 S'il n'y a pas d'écoulement i.e. $\underline{\mathbf{u}} = 0$, l'équation de l'énergie totale est l'équation de la chaleur classique.

L'énergie cinétique

L'équation sur l'énergie cinétique s'obtient simplement en faisant le produit scalaire de l'équation de quantité de mouvement (1.7) par le vecteur vitesse. Cela donne l'équation suivante

$$\rho \underline{\mathbf{u}} \frac{D \underline{\mathbf{u}}}{Dt} = -\underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{grad}} \left(p \right) + \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{div}} \left(2\mu \underline{\underline{\mathbf{S}}}^{\mathrm{D}} \right)$$

En posant $e_c = \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{u}}/2$, l'équation devient

$$\begin{cases} \rho \underline{\mathbf{u}} \cdot \frac{D \underline{\mathbf{u}}}{Dt} &= \rho \frac{D e_c}{Dt} \\ -\underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{grad}} \left(p \right) &= p \mathbf{div} \left(\underline{\mathbf{u}} \right) - \mathbf{div} \left(p \underline{\mathbf{u}} \right) \\ \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{div}} \left(2\mu \underline{\underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}}} \right) &= \mathbf{div} \left(2\mu \underline{\underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}}} \cdot \underline{\mathbf{u}} \right) - 2\mu \underline{\underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}}} : \underline{\underline{\mathbf{D}}} \end{cases}$$

où il est possible de trouver $\underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}} : \underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}} : \underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}}$. L'équation de conservation de l'énergie cinétique peut prendre la forme suivante

$$\rho \frac{De_c}{Dt} = p \mathbf{div} \left(\underline{\mathbf{u}} \right) - \mathbf{div} \left(p \underline{\mathbf{u}} \right) + \mathbf{div} \left(2\mu \underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}} \cdot \underline{\mathbf{u}} \right) - 2\mu \underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}} : \underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}}$$
(1.9)

L'énergie interne

L'équation sur l'énergie interne peut s'obtenir en soustrayant l'équation de l'énergie cinétique à l'équation de l'énergie totale.

$$\begin{split} \rho \frac{De_t}{Dt} &- \rho \frac{De_c}{Dt} = \rho \frac{De_i}{Dt} \\ &= \operatorname{div}\left(\underline{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\right) - \operatorname{div}\left(p\underline{\mathbf{u}}\right) + \operatorname{div}\left(2\mu \underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}} \cdot \underline{\mathbf{u}}\right) \\ &- p\operatorname{div}\left(\underline{\mathbf{u}}\right) + \operatorname{div}\left(p\underline{\mathbf{u}}\right) - \operatorname{div}\left(2\mu \underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}} \cdot \underline{\mathbf{u}}\right) + 2\mu \underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}} : \underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}} \end{split}$$

d'où

$$\rho \frac{De_i}{Dt} = \operatorname{div}\left(\underline{\mathbf{q}^{\mathrm{T}}}\right) - p\operatorname{div}\left(\underline{\mathbf{u}}\right) + 2\mu \underline{\underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}}} : \underline{\underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}}}$$
(1.10)

L'enthalpie

D'après la définition de l'enthalpie $(H = E_i + PV)$

$$\mathrm{d}H = \mathrm{d}E_i + p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p$$

En divisant par le volume et en sachant que $dV/V = -d\rho/\rho$, l'équation devient

(

$$\mathrm{d}h = \mathrm{d}e_i - p\mathrm{d}\rho + \mathrm{d}p$$

Ainsi

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{De_i}{Dt} - p\frac{D\rho}{Dt} + \frac{Dp}{Dt}$$

L'équation de conservation de l'enthalpie s'écrit donc

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \mathbf{div} \left(\underline{\mathbf{q}}^{\mathbf{T}} \right) + \frac{Dp}{Dt} + 2\mu \underline{\underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}}} : \underline{\underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}}}$$
(1.11)

L'entropie

De la même manière que l'enthalpie, l'entropie s'obtient grâce à l'équation thermodynamique

$$\mathrm{Td}s = \mathrm{d}e_i - \frac{p}{\rho}\mathrm{d}\rho$$

Ainsi l'équation de conservation de l'entropie peut s'écrire

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \mathbf{div} \left(\underline{\mathbf{q}}^{\mathbf{T}} \right) + 2\mu \underline{\underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}}} : \underline{\underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}}}$$
(1.12)

Comme supposé au début, les deux types de mécanismes sont l'apport de chaleur donné par le terme $\operatorname{div}(\mathbf{q}^{\mathrm{T}})$ et la dissipation par effet visqueux $2\mu \underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}} : \underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}}$.

Dans la suite, le terme $2\mu \underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}}$: $\underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}}$ est appelé dissipation et noté ϵ .

1.1.4 Système d'équation Navier-Stokes

Ainsi les problèmes de mécanique des fluides dans les hypothèses qui ont permis d'établir les équations de bilan sont gérés par le système d'équation suivant

$$\begin{cases}
\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \operatorname{div}(\underline{\mathbf{u}}), & (Masse) \\
\rho \frac{D\underline{\mathbf{u}}}{Dt} = -\underline{\operatorname{grad}}(p) + \underline{\operatorname{div}}(2\mu \underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}}), & (Q.D.M) \\
\rho \frac{De_t}{Dt} = \operatorname{div}(\underline{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}) - \operatorname{div}(p\underline{\mathbf{u}}) + \operatorname{div}(\underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}} \cdot \underline{\mathbf{u}}), & (\operatorname{Énergie})
\end{cases}$$
(1.13)

Pour rappel, ces équations ne sont donc valables que pour un fluide/gaz dont la longueur du libre parcours moyen est très inférieure à la particule de fluide élémentaire considérée. Pour des gaz peu denses ou encore des plasmas, d'autres équations sont à prendre en compte.

1.2 Équations de Navier-Stokes sous forme matricielle

Il est possible de décliner ce système d'équations sous une forme matricielle conservative. Cette forme matricielle des équations de Navier-Stokes est utilisée dans la suite de cette thèse. Ce système est composé de 5 inconnues et 5 équations. Soit le vecteur inconnu

$$\underline{\mathbf{U}} = \rho \begin{pmatrix} 1 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ e_t \end{pmatrix}$$

Grâce au vecteur conservatif $\underline{\mathbf{U}}$, il est possible de réécrire le système d'équation de Navier-Stokes sous forme matricielle de la manière suivante grâce à (1.13)

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0\\ \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial S_{ij}^{\mathrm{D}}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 3 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\mathbf{U}}_{,t} + \underline{\mathcal{F}}_{j,j} = \underline{\mathcal{F}}^{\mathrm{diff}}_{j,j}\\ \frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \frac{\partial \rho e_t u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial p u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial S_{ij}^{\mathrm{D}} u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \end{cases}$$

où sont identifiés simplement

$$\underline{\mathbf{U}} = \rho \begin{pmatrix} 1 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ e_t \end{pmatrix}; \quad \underline{\mathbf{\mathcal{F}}}_j = \begin{pmatrix} \rho u_j \\ \rho u_j u_1 + p \delta_{1j} \\ \rho u_j u_2 + p \delta_{2j} \\ \rho u_j u_3 + p \delta_{3j} \\ \rho u_j e_t + p u_j \end{pmatrix}; \quad \underline{\mathbf{\mathcal{F}}}^{\mathrm{diff}}_{\mathrm{diff}} = \begin{pmatrix} 0 \\ S_{1j}^{\mathrm{D}} \\ S_{2j}^{\mathrm{D}} \\ S_{3j}^{\mathrm{D}} \\ S_{ij}^{\mathrm{D}} u_i - q_j \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire

$$\underline{\mathbf{U}}_{,t} + \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{i} \underline{\mathbf{U}}_{,i} = \left(\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{ij} \underline{\mathbf{U}}_{,j}\right)_{,i}$$

où $\underline{\mathbf{A}}_{i} = \underline{\mathcal{F}}_{j,\underline{\mathbf{U}}}$ est la $i^{\text{ème}}$ matrice Jacobienne des Flux Euler et $\underline{\mathbf{K}}_{ij}$ est la matrice de diffusivité telle que $\underline{\mathbf{K}}_{ij}\underline{\mathbf{U}}_{,j} = \underline{\mathcal{F}}^{\text{diff}}_{j}$. Les matrices $\underline{\mathbf{A}}_{i}$ et $\underline{\mathbf{K}}_{ij}$ sont définies en annexe A.2. Il est à noter que le problème étant non linéaire, les matrices $\underline{\mathbf{A}}_{i}$ et $\underline{\mathbf{K}}_{ij}$ dépendent des variables conservatives.

Les problèmes résultant de cette formulation sont les propriétés intrinsèques des matrices. En effet pour résoudre numériquement cette équation grâce à la méthode Galerkine en éléments finis, il serait intéressant d'obtenir des matrices symétriques, définies positives *etc* ... permettant une résolution beaucoup plus simple du système. Pour cela, un changement de variable appelé couramment changement de variable entropique est appliqué. Le cadre théorique de ce changement de variable a été proposé par Tadmore [143] et Harten [61].

1.3 Symétrisation et formulation entropique

Hughes, Franca et Mallet [70] et Mallet [107] définissent la fonction entropie généralisée suivante

$$\mathcal{H}\left(\underline{\mathbf{U}}\right) = -\rho s$$

Ce changement de variable $\mathcal{V} : \underline{\mathbf{U}} \mapsto \underline{\mathbf{V}}$ est appliqué au système matriciel et est défini par

$$\mathcal{S}\left(\underline{\mathbf{U}}\right) = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{\mathbf{U}}}\right)^{T}$$

Grâce au formulaire donné en annexe A.3ainsi qu'aux hypothèses du gaz divariant, il découle

$$\underline{\mathbf{V}} = \frac{1}{T} \begin{pmatrix} \mu - e_c \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ -1 \end{pmatrix}$$
(1.14)

où $\mu = e + pv - Ts$ et $v = 1/\rho$. Grâce à ce changement de variable, le système à résoudre devient

$$\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{0} \underline{\mathbf{V}}_{,t} + \underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{i} \underline{\mathbf{V}}_{,i} = \left(\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij} \underline{\mathbf{V}}_{,j}\right)_{,i}$$
(1.15)

où

$$\underline{\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}}_{0} = \underline{\mathbf{U}}_{,\underline{\mathbf{V}}}, \quad \underline{\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}}_{i} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{i}\underline{\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}}_{0}, \quad \underline{\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}}_{ij} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{ij}\underline{\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}}_{0}$$

Ainsi, les matrices $\underline{\widetilde{A}}_0$, $\underline{\widetilde{A}}_i$, $\underline{\widetilde{K}}$ sont symétriques, $\underline{\widetilde{A}}_0$ est définie positive et $\underline{\widetilde{K}}$ est semi-définie positive. Attention, les matrices $\underline{\widetilde{K}}_{ij}$ ne sont pas symétriques séparément. La formulation (1.15) permet d'obtenir d'intéressantes propriétés mathématiques telles que la symétrie, un préconditionnement efficace, ... qui sont très utiles pour la résolution numérique des systèmes linéaires. En outre, la formulation entropique (1.15) a un véritable sens physique puisqu'elle permet de retrouver l'inégalité de Clausius-Duhem. Il faut noter que la stabilité d'une formulation faible est liée à cette inégalité. Les définitions et démonstrations de l'obtention des matrices $\underline{\widetilde{A}}_0$, $\underline{\widetilde{A}}_i$ et $\underline{\widetilde{K}}_{ij}$ sont données en annexe. Par la même occasion l'opérateur de Navier-Stoke $\underline{\mathcal{L}}$ est défini pour les variables entropiques par

$$\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{0}\underline{\mathbf{V}}_{,t} + \underline{\mathcal{L}}\left(\underline{\mathbf{V}}\right) = 0$$

Cette dernière formulation des équations de Navier-Stokes est utilisée et étudiée dans cette thèse. Il est à noter que l'étude du problème en variables entropiques peut poser quelques difficultés par exemple dans la traduction des modèles de turbulence par le changement de variable qui n'est pas linéaire. En effet $\underline{\mathbf{V}} \neq \underline{\mathbf{U}}$ et encore plus $d\underline{\mathbf{V}} \neq d\underline{\mathbf{U}}$. Ce point est abordé plus en détails dans la suite.

Chapitre 2

Méthode Galerkine et éléments finis

Sommaire

2.1	Form	nulation variationnelle	33
2.2	Form	nulation faible	34
2.3	Disc	rétisation spatiale et temporelle par éléments finis	35
	2.3.1	Discrétisation temporelle	35
	2.3.2	Discrétisation spatiale	36
	2.3.3	Approche Galerkine instationnaire	39
2.4	\mathbf{Stab}	ilisation de la formulation des éléments finis	40
	2.4.1	Formulations SUPG et GMC	40
	2.4.2	Définition de la matrice d'échelle de temps intrinsèque	41
	2.4.3	Particularité dans AETHER	44
2.5	Outi	ils éléments finis pour les modèles multi-échelles	45
	2.5.1	Règles d'intégration pour interpolations polynômiales	45
	2.5.2	Le calcul des dérivées en pratique	46
2.6	Con	clusion	50

La résolution du système matriciel des équations de Navier-Stokes est faite grâce à une méthode d'éléments finis dans le code AETHER pour AEro-THER modynamique développé par Dassault-Aviation. L'idée principale est d'approcher la solution par des fonctions d'interpolation à chaque nœuds du maillage. Ainsi pour un type de maille donné comme des tétraèdres, pavés, prismes ..., il existe une maille élémentaire nommée élément de référence représentant l'ensemble des éléments du maillage. Toutes les interpolations et les gradients sont calculés uniquement sur cet élément. Il existe une matrice de transformation nommée matrice jacobienne qui définie le changement de variable géométrique entre l'élément réel et l'élément de référence. Elle représente généralement une mesure directionnelle de l'élément. Les valeurs du problème réel sur chaque éléments en sont déduites pour construire la matrice de résolution globale, voir le diagramme de la figure 2.1. Chacune de ces étapes est présentée dans ce chapitre plus précisément. Pour plus d'information sur la méthode des éléments finis, le lecteur pourra se reporter à Hughes [66], Carey et Oden [16], Strang et Fix [142] ou encore Zienkiewicz [161]. Pour plus d'informations sur la résolution des équations de Navier-Stokes en éléments finis, le lecteur pourra se reporter à Mallet [107] et Shakib [134]. L'approche éléments finis présentée ici est résumée sur la figure 2.2.

Bien qu'au premier abord plus complexe que les volumes ou différences finis, la formulation en éléments finis permet un passage à l'ordre élevé plus évident. En effet pour un maillage en 2D avec des triangles à l'ordre spatial 2, les fonctions d'interpolation sont linéaires. Il suffit donc de déterminer 3 fonctions élémentaires. Pour le passage à l'ordre 3, les fonctions sont quadratiques. Il suffit d'en déterminer seulement 6 et ainsi de suite, alors que l'algorithme reste inchangé, voir



FIGURE 2.1 – Élément local réel générique et élément de référence



FIGURE 2.2 – Approche par éléments finis



FIGURE 2.3 – Élément finis linéaire d'ordre 2 et quadratique d'ordre 3 en 1D

la figure 2.3. Cette simplicité est possible car toutes variations et interpolations sont calculées sur l'élément de référence puis généralisées à l'aide de la matrice jacobienne. Dans la suite l'ordre spatial de la simulation tel que l'ordre 2 ou 3 par exemple fait référence de manière transparente à l'ordre des fonctions d'interpolation respectivement \mathcal{P}_1 ou \mathcal{P}_2 qui dépendent intrinsèquement l'un de l'autre. L'augmentation de l'ordre introduit des possibilités supplémentaires pour améliorer les méthodes de calcul, les modèles et la stabilisation. Ce chapitre précise dans quel contexte l'ordre élevé a la capacité d'apporter une différence par rapport à une résolution linéaire *i.e.* avec des éléments de type \mathcal{P}_1 ou d'ordre 2.

Cette méthode numérique choisie est couramment connue sous le nom d'approche de Galerkine par éléments finis, et s'inscrit dans la famille des méthodes des résidus pondérés, famille qui englobe également les méthodes des différences et volumes finis où les fonctions de pondérations sont assimilées aux fonctions d'interpolation. Dans ce chapitre, l'approche des éléments finis et les choix de conception qui ont été faits dans le code **AETHER** en discrétisation spatiale et temporelle sont abordés. La stabilisation du code est aussi brièvement étudiée car les éléments finis sont connus pour être instables pour la résolution des équations de la mécanique des fluides, voir Hughes et Brooks [14]. Enfin, certains outils utilisés par la suite sont introduits afin de simplifier la compréhension de l'implémentation des modèles multi-échelles à l'ordre élevé. Ce dernier apporte une liberté de conception non négligeable pour le filtrage explicite.

2.1 Formulation variationnelle

La première étape de la formulation Galerkine éléments finis consiste à exprimer le système d'équation sous sa forme variationnelle. La solution est approchée par deux familles de fonction : les fonctions de test \mathcal{V} et de pondération \mathcal{W} . Les fonctions de test sont aussi appelées fonctions d'interpolation dans cette thèse. Elles ont pour rôle d'approcher le plus fidèlement possible la solution. Quant aux fonctions de pondération, elles sont présentes pour moduler l'importance de chaque nœud dans l'interpolation. Les fonctions de pondération jouent un rôle majeur dans les éléments finis. Si ces dernières sont correctement choisies, il est possible d'étudier le problème sur chaque élément et donc finalement sur un unique élément de référence grâce à une transformation géométrique associée. Elles permettent aussi d'incorporer les conditions limites dans la formulation faible sous la forme de deux familles, les conditions de Neumann ou de Dirichlet.

Pour revenir à la formulation variationnelle, cette dernière peut être vue comme un théorème de conservation de la puissance mécanique si seule l'équation de quantité de mouvement est considérée. En mécanique, cette méthode est appelée *Théorème des puissances virtuelles*.

Soit un intervalle de temps I =]0, T[discrétisé en n segments $I_n =]t_n, t_{n+1}[$ et un domaine Ω de frontière Γ . Les domaines discrétisés temporellement sont aussi notés

$$\Omega_n = \Omega \otimes I_n$$
$$\Gamma_n = \Gamma \otimes I_n$$

Pour la discrétisation spatiale, le domaine Ω_n est subdivisé en $(n_{el})_n$ éléments permettant de définir le domaine de discrétisation sur chaque élément

$$\Omega_n^e = \left[\Omega \otimes I_n\right]^e, \quad e \in \left[1, \dots \left(n_{el}\right)_n\right]$$

Les fonctions de test et de pondération sont prises dans les domaines de définition suivants

$$\mathcal{V}_{n} = \left\{ \underline{\mathbf{V}} \mid \underline{\mathbf{V}} \in \left(\mathcal{C}^{0}\left(\Omega_{n}\right)\right)^{m}, \underline{\mathbf{V}} \rfloor \Omega_{n}^{e} \in \left(\mathcal{P}_{k}\left(\Omega_{n}^{e}\right)\right)^{m}, \underline{\mathbf{q}}\left(\underline{\mathbf{V}}\right) = \underline{\mathbf{g}}\left(t\right) \text{ sur } \Gamma_{n} \right\}$$
$$\mathcal{W}_{n} = \left\{ \underline{\mathbf{W}} \mid \underline{\mathbf{W}} \in \left(\mathcal{C}^{0}\left(\Omega_{n}\right)\right)^{m}, \underline{\mathbf{W}} \rfloor \Omega_{n}^{e} \in \left(\mathcal{P}_{k}\left(\Omega_{n}^{e}\right)\right)^{m}, \underline{\mathbf{q}}'\left(\underline{\mathbf{W}}\right) = 0 \text{ sur } \Gamma_{n} \right\}$$
(2.1)

où m est le nombre de degré de liberté, $\underline{\mathbf{g}}$ est la condition aux limites et \mathcal{P}_k est l'ensemble des fonctions d'interpolation d'ordre k. L'ensemble des fonctions d'interpolation a pour notation celle des polynômes de degré k mais les fonctions d'interpolation peuvent être de diverses formes. Dans cette thèse, des polynômes présentant des caractéristiques intéressantes pour l'implémentation sont choisis. Ce choix est discuté dans la partie sur la discrétisation spatiale. Il est important de noter la différence entre $\underline{\mathbf{q}}$ et $\underline{\mathbf{q}}'$, ce dernier étant l'ensemble tangent du premier. En effet, le problème n'est pas linéaire et il est donc nécessaire de le linéariser. Or dans ce cas, la résolution de $\underline{\mathbf{V}}$ est réalisée par l'intermédiaire de sa différentielle d $\underline{\mathbf{V}}$. Ainsi, la résolution du problème éléments finis des équations de Navier-Stokes est intrinsèquement liée à la résolution du problème tangent correspondant à une minimisation d'un problème potentiel et dont les fonctions de pondération y sont associées. Les espaces (2.1) sont très simples à comprendre. En effet, cela revient à dire que si la valeur de l'inconnue est imposée par une condition de Dirichlet alors les fonctions de pondération sont nulles. Cela permet de simplifier le problème et de séparer les différentes conditions limites. L'exemple est donné dans l'annexe B.3.

Soit le système d'équation à résoudre (1.15)

$$\underline{\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}}_{0} \underline{\mathbf{V}}_{,t} + \underline{\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}}_{i} \underline{\mathbf{V}}_{,i} = \left(\underline{\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}}_{ij} \underline{\mathbf{V}}_{,j}\right)_{,i}$$

La formulation variationnelle du problème s'exprime alors sous la forme

Méthode 1 (Formulation Variationnelle) Trouver $\underline{\mathbf{V}} \in \mathcal{V}_n$ tel que pour tout $\underline{\mathbf{W}} \in \mathcal{W}_n$

$$\int_{\Omega_n} \underline{\mathbf{W}} \cdot \left(\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_0 \underline{\mathbf{V}}_{,t} + \underline{\mathcal{L}} \left(\underline{\mathbf{V}} \right) \right) d\Omega_n = 0$$
(2.2)

où l'opérateur $\underline{\mathcal{L}}$ dit de Navier-Stokes stationnaire est défini par

$$\underline{\mathcal{L}} = \underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

Une hypothèse très importante a été faite dès cette étape du raisonnement. La discrétisation temporelle a été mise de côté en discrétisant par segment la flèche du temps. Cette hypothèse place notre méthode de résolution dans la famille méthode Galerkine discontinue. En effet, la flèche du temps pourrait aussi être discrétisée grâce à des fonctions d'interpolation et de pondération. Cependant, le couplage de l'espace et du temps rend la matrice finale beaucoup plus difficile à résoudre et introduit des problématiques supplémentaires, en particulier pour la stabilisation. Dans le code AETHER la discrétisation temporelle est faite de manière discontinue grâce à un schéma aux différences finies.

2.2 Formulation faible

La formulation faible consiste à transférer une partie des dérivées sur les fonctions de pondération. Pour cela, il suffit d'intégrer par partie les flux de l'équation (2.2). Voir annexe B.1 pour les détails. Méthode 2 (Formulation faible) Trouver $\underline{\mathbf{V}} \in \mathcal{V}_n$ tel que pour tout $\underline{\mathbf{W}} \in \mathcal{W}_n$

$$\int_{\Omega_{n}} \left(-\underline{\mathbf{W}}_{,t} \cdot \underline{\mathbf{U}}\left(\underline{\mathbf{V}}\right) - \underline{\mathbf{W}}_{,i} \cdot \underline{\mathcal{F}}_{i}\left(\underline{\mathbf{V}}\right) + \underline{\mathbf{W}}_{,i} \cdot \underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij}\underline{\mathbf{V}}_{,j} \right) d\Omega_{n} \\
+ \int_{\Omega} \left(\underline{\mathbf{W}}\left(t_{n+1}^{-}\right) \cdot \underline{\mathbf{U}}\left(\underline{\mathbf{V}}\left(t_{n+1}^{-}\right)\right) - \underline{\mathbf{W}}\left(t_{n}^{+}\right) \cdot \underline{\mathbf{U}}\left(\underline{\mathbf{V}}\left(t_{n}^{-}\right)\right) \right) d\Omega \\
+ \int_{\Gamma_{n}} \underline{\mathbf{W}} \cdot \left(\underline{\mathcal{F}}_{i}\left(\underline{\mathbf{V}}\right) - \underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij}\underline{\mathbf{V}}_{,j} \right) n_{i}d\Gamma_{n} = 0$$
(2.3)

où t^- et t^+ représentent respectivement la valeur temporelle à gauche et à droite. Si ces deux valeurs temporelles sont égales, le champs est considéré continu temporellement en t.

Attention, il est à noter que $\underline{\mathbf{U}} \neq \underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_0 \underline{\mathbf{V}}$ mais plutôt d $\underline{\mathbf{U}} = \underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_0 d\underline{\mathbf{V}}$ et que pour plus de simplicité, la formulation faible est exprimée avec un mélange de notations associées à des formulations conservative et entropique. Cette équation (2.3) constitue la formulation Galerkine espace-temps. La première intégrale représente la partie volumique de l'intégration par partie de l'équation (2.2). La troisième intégrale représente la frontière de l'intégration par partie du terme stationnaire. Quant à la deuxième intégrale elle représente la frontière de l'intégration par partie du terme instationnaire et de sa somme avec la condition de saut suivante

$$\int_{\Omega} \underline{\mathbf{W}}\left(t_{n}^{+}\right) \cdot \left[\underline{\mathbf{U}}\left(t_{n}^{+}\right) - \underline{\mathbf{U}}\left(t_{n}^{-}\right)\right] d\Omega = 0$$

$$(2.4)$$

Cette condition impose faiblement la continuité en temps. Cette forme intégrée par parties de la méthode de Galerkine se traduit par la conservation des flux lorsque des règles de quadrature sont utilisées pour l'approximation des intégrales, voir plus loin dans la section 2.5.1. Enfin, cette formulation est consistante, c'est-à-dire que la solution exacte du problème vérifie l'équation (2.3).

Dans AETHER, l'intégration par partie du terme temporel n'est pas réalisée car les fonctions de pondération ne dépendent pas du temps. Les dérivées temporelles sont approximées par des schémas de différences finies comme précisé ci-dessous.

2.3 Discrétisation spatiale et temporelle par éléments finis

2.3.1 Discrétisation temporelle

Il existe deux grandes classes de méthodes éléments finis pour la résolution de problèmes instationnaires.

Tout d'abord **les méthodes espace-temps** dans lesquelles les fonctions d'interpolation sont des fonctions à la fois de l'espace et du temps. Une formulation de plus en plus courante est la méthode de Galerkine discontinue qui impose faiblement la continuité en temps.

Deuxièmement **les méthodes semi-discrètes** où la variable temps reste continue et les fonctions d'interpolation sont des fonctions uniquement de l'espace. Ainsi le problème est ramené à la résolution d'un système d'équations aux dérivées ordinaires.

Si la première approche semble offrir un grand potentiel, elle reste aujourd'hui encore extrêmement coûteuse pour le domaine industriel. C'est donc une méthode semi-discrète qui est utilisée dans AETHER. L'intégration par partie en temps n'est donc pas réalisée car cela imposerait $\underline{\mathbf{W}}_{,t} = 0$ sinon. Ce constat justifie d'autre part la non dépendance en temps dans l'étude de la discrétisation spatiale abordée maintenant.



FIGURE 2.4 – Fonction d'interpolation N_a

2.3.2 Discrétisation spatiale

Comme précisé au début, chaque fonction test et de pondération est décomposée sur le maillage par le biais de l'approximation suivante

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_n, t \in I_n, \quad \underline{\mathbf{V}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\substack{a=1\\n_p}}^{n_p} N_a(\mathbf{x}) \, \underline{\mathbf{V}}_a$$
$$\underline{\mathbf{W}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\substack{a=1\\a=1}}^{n_p} N_a(\mathbf{x}) \, \underline{\mathbf{W}}_a$$

où n_p est le nombre de nœuds associé à la décomposition du domaine, N_a est la fonction d'interpolation associée au nœud a, \underline{V}_a est la valeur inconnue de \underline{V} au nœud a et \underline{W}_a la valeur de la fonction de pondération associée. Comme il s'agit d'une formulation semi-discrète, les fonctions d'interpolation ne dépendent pas du temps et donc l'indice de temps est omis. Il existe de très nombreuses façons de définir les fonctions d'interpolation N_a . Le code AETHER est basé sur les fonctions d'interpolation de Lagrange. Ces fonctions d'interpolation sont des polynômes continus qui à l'ordre spatial 2 sont des polynômes linéaires, et dont l'ordre augmente avec la montée en ordre du schéma spatial. Dans ce cas, toutes ces fonctions vérifient la propriété suivante

$$N_{a}\left(\underline{\mathbf{x}}_{b}\right) = \delta_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{si } a = b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi la résolution du problème en formulation faible revient à résolute un système linéaire matriciel de dimension n_p fois le nombre de variable à chaque nœud qui est la taille du vecteur $\underline{\mathbf{V}}$. Dans cette thèse l'ordre spatial i est noté O_i . Pour un maillage 2D en triangle, la fonction d'interpolation $N_a O_2$ au nœud a est représentée sur la figure 2.4.

Réduction à un problème local portant sur l'élément de référence

Comme la résolution consiste en un calcul d'intégrale volumique, le problème peut alors être étudié sur chacun des éléments séparément. Puis il est reconstitué globalement en faisant la somme des différentes parties des intégrales. L'intérêt pratique des fonctions d'interpolation est qu'elles sont choisies de manière à être égales à 1 au nœud auquel elles sont associées, de varier dans les éléments voisins, d'être nulles aux autres nœuds des éléments voisins et finalement d'être uniformément nulles sur le reste des éléments.

Sur les figures 2.5 et 2.6, il est possible de voir respectivement le support restreint aux éléments voisins dans le cas d'un élément 1D et la décomposition des fonctions d'interpolation sur un élément 2D. Ainsi pour un nœud, seule la contribution des éléments le possédant est non nulle pour le calcul des intégrales. En inversant le problème, ceci revient à calculer pour chaque élément l'effet des intégrales entre chaque nœud puis à sommer globalement leur effet. Ainsi grâce à un tableau de connectivité donnant l'indice du nœud local à l'élément sur la matrice globale, il est possible de reconstituer l'intégrale totale.

En examinant l'équation (2.3), il apparait que l'introduction des fonctions de pondération crée toujours un produit de dérivées $n^{i\text{ème}}$ de fonction d'interpolation où $n \in [0, +\infty]$. Grâce à ceci, il est toujours possible d'associer à une intégrale deux indices de la matrice globale. La formulation variationnelle permet donc de définir un problème matriciel linéaire classique de la


FIGURE 2.5 – Fonction d'interpolation 1D O_2 sur 4 éléments



FIGURE 2.6 – Décomposition des fonctions d'interpolation sur un élément triangulaire.

forme $\underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{R}}$, où $\underline{\mathbf{x}}$ est l'inconnue du problème, $\underline{\mathbf{M}}$ est la matrice masse du problème et $\underline{\mathbf{R}}$ est le vecteur résidu du problème. Le système linéaire global peut donc se réduire à la définition du système linéaire local à l'élément. La matrice de masse du premier est reconstruite grâce à un tableau d'équivalence entre les systèmes locaux et le système global, voir la figure 2.7. En effet la solution du système linéaire local sur un élément, fournit une matrice de dimension $n_{dl} \times n_{en}$ *i.e.* le nombre de variable (n_{dl}) fois le nombre de nœuds sur l'élément (n_{en}) . Par exemple pour un élément O_2 , c'est une matrice carrée de dimension 15, voir de nouveau la figure 2.7.

Réduction à un problème unique sur un élément de référence

Pour obtenir la valeur des matrices intégrales sur chaque élément, il est indispensable de connaître les valeurs des fonctions d'interpolation. Pour s'affranchir de la détermination laborieuse à chaque élément de ces fonctions N_a , il est possible de faire appel à un élément de référence sur lequel toutes les fonctions d'interpolation sont précalculées et permettent de déterminer très simplement celle de l'élément réel, voir la figure 2.1 et l'annexe B.2. En effet, si les fonctions d'interpolation sont définies uniquement sur un seul élément caractéristique appelé élément de référence, et que les transformations géométriques sont connues entre cet élément et les éléments réels $n \in [[1, ..., n_{el}]]$, qu'elles soient notées $\underline{\mathbf{x}}_n = \underline{\mathbf{x}}_n(\underline{\boldsymbol{\xi}}) = \underline{\mathbf{x}}_n(\boldsymbol{\xi}, \eta, \zeta)$ où $\underline{\boldsymbol{\xi}}$ représente les coordonnées des nœuds équivalents sur l'élément de référence, alors il vient

$$\underline{\mathbf{V}}^{e}\left(\underline{\mathbf{x}},t\right) = \sum_{a=1}^{n_{en}} N_{n(a)}\left(\underline{\mathbf{x}}_{n}\left(\underline{\boldsymbol{\xi}}\right)\right) \underline{\mathbf{V}}_{n(a)}$$

avec n_{en} le nombre de nœuds par élément. L'interpolation est alors seulement paramétrée par les transformations $\underline{\mathbf{x}}_n$ sur chaque élément plutôt que par la définition des fonctions d'interpolation sur chacun des nœuds.



FIGURE 2.7 – Construction de la matrice globale grâce aux matrices locales des éléments.

Pour trouver la transformation $\underline{\mathbf{x}}_n$, le type des fonctions d'interpolation est très important. Une des propriétés des fonctions d'interpolation de Lagrange est de pouvoir localiser les coordonnées d'un nœud. Ainsi, il est possible d'en déduire que

$$\underline{\mathbf{x}}_{n(a)} = \sum_{a=1}^{n_{en}} \mathcal{N}_{n(a)}\left(\underline{\mathbf{x}}_{n}\left(\underline{\boldsymbol{\xi}}\right)\right) \underline{\mathbf{x}}_{n(a)}$$

où $\underline{\mathbf{x}}_{n(a)}$ est la coordonnée du sommet a dans l'élément n réel étudié. Si les fonctions d'interpolation restent les mêmes alors l'élément est dit isoparamétrique. C'est le cas ici avec les fonctions d'interpolation de Lagrange, ce qui permet une grande simplification algorithmique : les polynômes dans l'élément de référence deviennent des fractions rationnelles dans l'élément réel. Cela permet entre autre de simplifier la notation en posant $N_{n(a)}(\underline{\mathbf{x}}_n(\underline{\boldsymbol{\xi}})) = N_a(\underline{\boldsymbol{\xi}})$. Les fonctions d'interpolation sont alors aussi appelées des fonctions de forme car elles définissent la géométrie de l'élément. La valeur de la fonction de forme au sommet n(a) est toujours égale à 1 et nulle aux autres sommets que ce soit sur l'élément de référence ou sur l'élément réel. Dans la suite, la somme sur n_{el} et la notation n(a) sont omises lorsqu'il s'agit de problèmes locaux. En effet, il est sous-entendu que la résolution du problème est implicitement identique sur tous les éléments.

Finalement, les intégrales du problème de Galerkine discrétisées sur l'élément peuvent être simplement étudiées avec des fonctions d'interpolation générales définies sur l'élément de référence grâce aux formules suivantes. Soit $\underline{\mathbf{V}}$ la solution vectorielle et $\underline{\mathbf{V}}_a$ et $\underline{\mathbf{x}}_a$ la valeur au nœud a respectivement des variables et des coordonnées, il vient

$$\begin{split} \mathbf{\underline{x}} &= \sum_{a=1}^{n_{en}} \mathbf{N}_a\left(\underline{\boldsymbol{\xi}}\right) \mathbf{\underline{x}}_a \\ \frac{\partial \mathbf{\underline{x}}}{\partial \underline{\boldsymbol{\xi}}} &= \sum_{a=1}^{n_{en}} \frac{\partial \mathbf{N}_a}{\partial \underline{\boldsymbol{\xi}}} \left(\underline{\boldsymbol{\xi}}\right) \mathbf{\underline{x}}_a \\ \mathbf{\underline{V}} &= \sum_{a=1}^{n_{en}} \mathbf{N}_a\left(\underline{\boldsymbol{\xi}}\right) \mathbf{\underline{V}}_a \\ \frac{\partial \mathbf{\underline{V}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} &= \sum_{a=1}^{n_{en}} \underbrace{\frac{\partial \underline{\boldsymbol{\xi}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}}(\mathbf{\underline{x}})}_{\underline{\mathbf{J}}^e} \frac{\partial \mathbf{N}_a}{\partial \underline{\boldsymbol{\xi}}} \left(\underline{\boldsymbol{\xi}}\right) \mathbf{\underline{V}}_a \end{split}$$

où $\underline{\mathbf{J}}^e = \partial \boldsymbol{\xi} / \partial \underline{\mathbf{x}}$ est la matrice jacobienne associée à la transformation de géométrie.

Il est possible d'obtenir de la même manière les expressions des dérivées secondes, tierces \dots en fonction des besoins et de l'ordre de calcul. Si les fonctions d'interpolation sont d'ordre n, les dérivées n+1 seront nulles.

Il est par ailleurs impossible de déterminer exactement au sens des éléments finis la valeur de la dérivée n+1 grâce aux dérivées n en chaînant la méthode ci-dessus. En effet, pour l'ordre 2

$$\frac{\partial^{2} \underline{\mathbf{V}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}^{2}} = \sum_{a=1}^{n_{en}} \left(\underbrace{\frac{\partial^{2} \underline{\boldsymbol{\xi}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}^{2}} \frac{\partial \mathbf{N}_{a}}{\partial \underline{\boldsymbol{\xi}}} (\underline{\boldsymbol{\xi}})}_{\text{terme 1}} + \underbrace{\left(\frac{\partial \underline{\boldsymbol{\xi}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}}\right)^{2} \frac{\partial^{2} \mathbf{N}_{a}}{\partial \underline{\boldsymbol{\xi}}^{2}} (\underline{\boldsymbol{\xi}})}_{\text{terme 2}} \right) \underline{\mathbf{V}}_{a}$$

et non pas

$$\frac{\partial^{2} \underline{\mathbf{V}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}^{2}} \neq \sum_{a=1}^{n_{en}} \left(\frac{\partial \underline{\boldsymbol{\xi}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}}\right)^{2} \frac{\partial^{2} \mathbf{N}_{a}}{\partial \underline{\boldsymbol{\xi}}^{2}} \left(\underline{\boldsymbol{\xi}}\right) \underline{\mathbf{V}}_{a}$$

La dérivée numérique est en fait décomposée en deux termes. Il y a une dérivée géométrique représentée par le terme 1 en plus d'une dérivée paramétrique représentée par le terme 2. Cette difficulté est rediscutée plus loin.

2.3.3 Approche Galerkine instationnaire

Fort des propriétés précédentes, il est possible de discrétiser les équations de Navier-Stokes obtenues dans leur forme faible. Une fois discrétisées par les approximations ci-dessus, le problème peut se réécrire formellement comme

$$\underline{\mathbf{W}} \cdot \underline{\mathbf{G}} \left(\underline{\mathbf{V}}_{,t}, \underline{\mathbf{V}} \right) = 0 \tag{2.5}$$

où $\underline{\mathbf{V}} = \left\{ \underline{\mathbf{V}}_1^T, \underline{\mathbf{V}}_2^T, \cdots, \underline{\mathbf{V}}_{n_p}^T \right\}^T$, $\underline{\mathbf{W}} = \left\{ \underline{\mathbf{W}}_1^T, \underline{\mathbf{W}}_2^T, \cdots, \underline{\mathbf{W}}_{n_p}^T \right\}^T$, et $\underline{\mathbf{G}}$ est un système non linéaire de dimension $n_p \times n_{dl}$ *i.e.* nombre de nœud \times nombre de variables par nœuds comme pour le problème sur un élément. De plus comme l'équation (2.5) est vraie pour tout les $\underline{\mathbf{W}}$ non contraints. En écartant le problème des conditions limites, il découle que

$$\underline{\mathbf{G}}\left(\underline{\mathbf{V}}_{,t},\underline{\mathbf{V}}\right) = \underline{\mathbf{0}} \tag{2.6}$$

La dérivé temporelle est approchée à l'aide du schéma aux différences finies décentré d'ordre 2 suivant. Cependant n'importe quel schéma temporel pourrait être utilisé de la même manière

$$\underline{\mathbf{V}}_{,t}(t_{n+1})\Delta t = \frac{3}{2}\underline{\mathbf{V}}^{n+1} - 2\underline{\mathbf{V}}^n + \frac{1}{2}\underline{\mathbf{V}}^{n-1} + \mathcal{O}\left(\delta t^2\right)$$
(2.7)

Ainsi, le système entièrement discrétisé spatialement et temporellement sur l'espace $I_n =]t_n, t_{n+1}[$ devient

$$\underline{\mathbf{G}}\left(\underline{\mathbf{V}}^{n+1}, \underline{\mathbf{V}}^{n}, \underline{\mathbf{V}}^{n-1}\right) = \underline{\mathbf{0}}$$
(2.8)

Ce système (2.8) étant non linéaire, il est alors linéarisé pour la résolution grâce à un algorithme de prédicteur/multi-correcteur avec une stratégie de pas de temps dual. En effectuant un développement de Taylor du système où $\Delta \underline{\mathbf{V}}^i = \underline{\mathbf{V}}_{i+1}^{n+1} - \underline{\mathbf{V}}_i^{n+1}$, il vient

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}}\left(\underline{\mathbf{V}}_{i+1}^{n+1};\underline{\mathbf{V}}^{n};\underline{\mathbf{V}}^{n-1}\right) \simeq \underline{\underline{\mathbf{G}}}\left(\underline{\mathbf{V}}_{i}^{n+1};\underline{\mathbf{V}}^{n};\underline{\mathbf{V}}^{n-1}\right) + \frac{\partial \underline{\underline{\mathbf{G}}}}{\partial \underline{\mathbf{V}}}\left(\underline{\mathbf{V}}_{i+1}^{n+1};\underline{\mathbf{V}}^{n};\underline{\mathbf{V}}^{n-1}\right) \Delta \underline{\mathbf{V}}^{i} = \underline{\mathbf{0}}$$

Ce qui revient à résoudre désormais le système linéaire

$$\underline{\underline{\mathcal{M}}}_{i} \Delta \underline{\mathbf{V}}^{i} = -\underline{\underline{\mathcal{R}}}_{i}$$

où $\underline{\mathcal{R}}_i = \underline{\mathbf{G}}\left(\underline{\mathbf{V}}_i^{n+1}; \underline{\mathbf{V}}^n; \underline{\mathbf{V}}^{n-1}\right)$ est le résidu, $\underline{\underline{\mathcal{M}}}_i = \partial \underline{\mathbf{G}} / \partial \underline{\mathbf{V}}(\underline{\mathbf{V}}_{(i+1)}^{n+1}; \underline{\mathbf{V}}^n; \underline{\mathbf{V}}^{n-1})$ la matrice tangente associée au système non-linéaire $\underline{\mathbf{G}}$ et $\underline{\mathbf{V}}_{(0)}^{n+1} = \underline{\mathbf{V}}^n$. De cette manière, les matrices du problème élémentaire local sur chaque élément s'écrivent de la même manière en omettant l'exposant n + 1 qui caractérise en fait l'inconnue

$$\underline{\mathcal{R}}^{e} = \{\underline{\mathcal{R}}^{e}_{a}\}, \quad a = [1, ... n_{p}]$$

$$\underline{\mathcal{R}}^{e}_{a} = \int_{\Omega^{e}_{n}} N_{a} \left(\frac{3}{2} \underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{V}}) - 2\underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{V}}^{n}) + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{V}}^{n-1})\right) d\Omega^{e}_{n}$$

$$+ \Delta t \int_{\Omega^{e}_{n}} \left(-N_{a,i} \underline{\mathcal{F}}_{i}(\underline{\mathbf{V}}) + N_{a,i} \underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij} \underline{\mathbf{V}}_{,j}\right) d\Omega^{e}_{n}$$

$$+ \Delta t \int_{\Gamma^{e}_{n}} N_{a} \left(\underline{\mathcal{F}}_{i}(\underline{\mathbf{V}}) - \underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij} \underline{\mathbf{V}}_{,j}\right) n_{i} d\Gamma^{e}_{n}$$
(2.9)

Dans le résidu ce sont les flux exacts non linéaires qui sont calculés. La matrice masse du problème s'écrit quant à elle

$$\underline{\underline{\mathcal{M}}}^{e} = \{ \underline{\mathcal{R}}^{e}_{ab} \}, \quad a, b = [1, ...n_{p}]
\underline{\underline{\mathcal{M}}}^{e}_{ab} = \int_{\Omega^{e}_{n}} \frac{3}{2} N_{a} \underline{\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}}_{0} N_{b} d\Omega^{e}_{n}
+ \Delta t \int_{\Omega^{e}_{n}} \left(-N_{a,i} \underline{\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}}_{i} N_{b} + N_{a,i} \underline{\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}}_{ij} N_{b,j} \right) d\Omega^{e}_{n}
+ \Delta t \int_{\Gamma^{e}_{n}} N_{a} \left(\underline{\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}}_{i} N_{b} - \underline{\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}}_{ij} N_{b,j} \right) n_{i} d\Gamma^{e}_{n}$$
(2.10)

Pour plus d'information sur l'obtention de ces expressions, se reporter à l'annexe B.4. Cette dernière formulation est conservée pour la résolution du système Navier-Stokes. Elle permet d'obtenir la solution tangente au système et de mettre à jour le vecteur entropique à chaque pas de temps.

2.4 Stabilisation de la formulation des éléments finis

La méthode de Galerkine développée jusqu'à maintenant est connue pour être sous dissipative et donc instable pour des écoulements dominés par la convection, voir Brooks et Hughes [14]. Le nombre de Péclet est naturellement adapté pour quantifier l'équilibre entre la convection et la diffusion d'une grandeur. Il y a en réalité 5 Péclets au total *i.e.* 1 par équation, pour le système des équations de Navier-Stokes. Le premier nombre de Péclet est basé sur la conservation de la masse et est donc un Péclet massique Pe = uL/D où u est la vitesse, L une longueur caractéristique et D la diffusivité massique. Les 3 Péclets des équations de la conservation de la quantité de mouvement sont en fait équivalent au nombre de Reynolds $Pe = Re = uL/\nu$ où ν est la viscosité moléculaire. Enfin le dernier Péclet est un Péclet thermique $Pe = uL/D_t$ où D_t est la diffusivité thermique. Pour le système des équations de Navier-Stokes, il est donc possible de parler globalement d'un nombre de Péclet de maille définit par $Pe_s = uL/\nu$ où L est une taille de maille locale et ν est la diffusion de l'équation considérée. Cela permet donc de ne pas confondre ce terme avec le nombre de Reynolds qui est en fait strictement réservé pour caractériser la nature d'un problème aérodynamique dans un écoulement *i.e.* comparer la convection à la diffusion naturelle pour le mouvement du fluide. Ainsi, la méthode de Petrov-Galerkine consiste à stabiliser cette approche en remplaçant le terme de fonction de pondération $\underline{\mathbf{W}}$ par $\underline{\mathbf{W}} + \underline{\mathbf{P}}(\underline{\mathbf{W}})$ où $\underline{\mathbf{P}}$ est une perturbation, fonction de $\underline{\mathbf{W}}$.

2.4.1 Formulations SUPG et GMC

Il existe différentes méthodes pour modéliser la perturbation $\underline{\mathbf{P}}$. La méthode Streamline Upwind Petrov-Galerkin (SUPG) est basée sur le concept de décentrage amont et est équivalente aux méthodes de diffusivité artificielle. Brooks et Hughes [14] dans le cadre des équations de Navier-Stokes incompressibles, proposent la définition suivante généralisée au cas compressible en variables entropiques

$$\underline{\mathbf{P}}\left(\underline{\mathbf{W}}\right) = \underline{\underline{\tau}} \, \underline{\underline{\widetilde{\mathbf{M}}}}_{i} \frac{\partial \underline{\mathbf{W}}}{\partial x_{i}}$$

La matrice $\underline{\underline{\tau}}$ est appelée matrice d'échelle de temps intrinsèque. De sa définition primordiale dépend la précision de la méthode car elle joue un rôle analogue au coefficient de diffusion, coefficient classique aux méthodes de stabilisation. Elle incorpore une fonction du nombre de Péclet de maille qui active la stabilisation dans les zones dominées par la convection.

La méthode Galerkine Moindres Carrés (GMC) ou *Galerkin Least Square* (GLS) est basée sur une combinaison linéaire du terme diffusif et convectif. Typiquement, elle s'écrit

$$\underline{\mathbf{P}}\left(\underline{\mathbf{W}}\right) = \underline{\underline{\tau}} \, \underline{\mathcal{L}}\left(\underline{\mathbf{W}}\right)$$

Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer par exemple à Franca et Hughes [42] et Hughes, Franca et Hulbert [69]. Toutefois il est à noter qu'avec un calcul O_2 *i.e.* avec des fonctions d'interpolation linéaires, les formulations SUPG et GMC sont identiques puisque le terme diffusif ajouté à la perturbation est alors nul. C'est la formulation GMC qui est à la base du code AETHER mais elle n'est aujourd'hui pas utilisée car jusqu'alors seules des simulations O_2 étaient réalisées. Ainsi la formulation faible (2.3) se réécrit avec le terme supplémentaire

$$\int_{\Omega_{n}} \left(-\underline{\mathbf{W}}_{,t} \cdot \underline{\mathbf{U}} \left(\underline{\mathbf{V}} \right) - \underline{\mathbf{W}}_{,i} \cdot \underline{\mathcal{F}}_{i} \left(\underline{\mathbf{V}} \right) + \underline{\mathbf{W}}_{,i} \cdot \underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij} \underline{\mathbf{V}}_{,j} \right) d\Omega_{n} \\
+ \int_{\Omega} \left(\underline{\mathbf{W}} \left(t_{n+1}^{-} \right) \cdot \underline{\mathbf{U}} \left(\underline{\mathbf{V}} \left(t_{n+1}^{-} \right) \right) - \underline{\mathbf{W}} \left(t_{n}^{+} \right) \cdot \underline{\mathbf{U}} \left(\underline{\mathbf{V}} \left(t_{n}^{-} \right) \right) \right) d\Omega \\
+ \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{n}^{e}} \underline{\mathcal{L}} \left(\underline{\mathbf{W}} \right) \cdot \underline{\underline{\tau}} \left(\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{0} \underline{\mathbf{V}}_{,t} + \underline{\mathcal{L}} \left(\underline{\mathbf{V}} \right) \right) d\Omega_{n}^{e} \\
+ \int_{\Gamma_{n}} \left(\underline{\mathbf{W}} \cdot \left(\underline{\mathcal{F}}_{i} \left(\underline{\mathbf{V}} \right) - \underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij} \underline{\mathbf{V}}_{,j} \right) \right) n_{i} d\Gamma_{n} = 0$$
(2.11)

La consistance du terme de stabilisation est assurée puisqu'il est multiplié par le résidu. Il tend vers zéro lorsque la solution converge. Il est aussi à noter que la matrice $\underline{\tau}$ est définie uniquement sur l'élément d'où la présence du terme somme autour de l'intégrale locale. Il n'y a pas de définition nodale de la stabilisation. Ainsi le terme de stabilisation n'a pas de sens global en tant que champs physique.

Une dernière approche consiste à introduire le terme instationnaire dans la perturbation, de manière à ce que la troisième ligne de l'équation (2.11) soit symétrique.

$$\underline{\mathbf{P}}\left(\underline{\mathbf{W}}\right) = \underline{\underline{\tau}}\left(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{0}\underline{\mathbf{W}}_{,t} + \underline{\mathcal{L}}\left(\underline{\mathbf{W}}\right)\right)$$

Cette dernière formulation semble prometteuse pour de futures recherches car les méthodes Galerkine discontinues stabilisées par la matrice de temps intrinsèques divergent lorsque la discrétisation temporelle devient trop précise. C'est ce qui a été constaté lors de certaines simulations et aussi par Hsu [62]. Par ailleurs ce terme est implicité dans la matrice tangente au problème Navier-Stokes en supposant $\underline{\tau}$ constant sur les éléments, rejoignant les conseils de Hughes [69].

2.4.2 Définition de la matrice d'échelle de temps intrinsèque

Cette approche de la stabilisation nécessite de déterminer l'expression de la matrice $\underline{\underline{\tau}}$. La matrice $\underline{\underline{\tau}}$ est décomposée en une partie advective équivalente d'un schéma décentré, puis elle est modifiée par une correction diffusive. Dans un premier temps la matrice de temps intrinsèque instationnaire non corrigée est définie par

$$\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}}_{0}^{-1} \left[\left(\left(\frac{\partial \xi_{0}}{\partial x_{0}} \right)^{2} \underline{\underline{\mathcal{I}}} \right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\left(\frac{\partial \xi_{i}}{\partial x_{j}} \frac{\partial \xi_{i}}{\partial x_{k}} \right) \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{j} \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{k} \right)^{-\frac{1}{2}} \right]$$
(2.12)

où $\partial \xi_0 / \partial x_0$ est relatif au temps et sa valeur est donnée par $4/\Delta t^2$. Cette expression est obtenue grâce à une optimisation réalisée par Shakib [134] dans le cas d'écoulements incompressibles à l'ordre simple. Elle est généralisée aux autres cas tels que les écoulements compressibles et l'ordre élevé. Pour plus de précisions voir Mallet [107].

L'analyse dimensionnelle du terme convectif permet de mieux comprendre sa forme. Il est composé d'une partie géométrique $(\partial \xi_i / \partial x_j \ \partial \xi_i / \partial x_k)$ permettant de corriger uniquement la sur-convection dans le sens du courant pour la partie *Upwind* et de la norme de la convection déterminée par $\sqrt{\underline{\mathbf{A}}_j \underline{\mathbf{A}}_k}$. La présence de l'inverse de la matrice de changement de base permet quant à elle de continuer à réfléchir en variables conservatives simplifiant la notion de convection tout en appliquant $\underline{\tau}$ à la formulation entropique.

Il est important maintenant d'ajouter la correction diffusive dans la même direction que la convection et dans le même espace. Il faut tout d'abord définir l'espace de coordonnées appropriées *i.e.* définir $\underline{\mathbf{s}} = (s, n, t)$ un système de coordonnées locales tel que la direction *s* soit colinéaire au vecteur vitesse en ce point. Ceci permettra d'adapter la correction en fonction de la convection de la particule fluide. Soit $\underline{\mathcal{R}} = \partial \underline{\mathbf{x}} / \partial \underline{\mathbf{s}}$ la matrice de transformation du système de coordonnées locales. La matrice $\underline{\mathcal{Q}}$ de dimension $n_{dl} \times n_{dl}$ est définie par

$$\underline{\underline{Q}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \underline{\underline{R}} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi le problème de Navier-Stoke dans le sens du courant est défini en appliquant le changement de variable : $\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathcal{Q}}^T \underline{\mathbf{U}}$. Le problème Navier-Stokes se réécrit simplement de la manière suivante

$$\underline{\mathbf{U}}_{,t} + \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\alpha} \underline{\mathbf{U}}_{\alpha} = \left(\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{\alpha\beta} \underline{\mathbf{U}}_{,\beta}\right)_{,\alpha}$$

où β et α sont des indices de sommation. Comme le problème est symétrique à celui déjà traité, en variables entropiques il devient

$$\underline{\underline{\widetilde{A}}}_{0}\underline{\mathbf{V}}_{,t} + \underline{\underline{\widetilde{A}}}_{\alpha}\underline{\mathbf{V}}_{\alpha} = \left(\underline{\underline{\widetilde{K}}}_{\alpha\beta}\underline{\mathbf{V}}_{,\beta}\right)_{,c}$$

où il découle

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{V}} = \underline{\underline{\mathcal{Q}}}^T \underline{\mathbf{V}} \\ \underline{\underline{\widetilde{A}}}_0 = \underline{\underline{\mathcal{Q}}}^T \underline{\underline{\widetilde{A}}}_0 \underline{\underline{\mathcal{Q}}} \\ \underline{\underline{\widetilde{A}}}_\alpha = \underline{\underline{A}}_\alpha \underline{\underline{\widetilde{A}}}_0 \\ \underline{\underline{\widetilde{K}}}_{\alpha\beta} = \underline{\underline{K}}_{\alpha\beta} \underline{\underline{\widetilde{A}}}_0 \end{cases}$$

Ayant obtenu le problème dans l'espace pertinent *i.e.* le sens de convection, il faut extraire l'intensité de convection du problème. Il est donc intéressant d'étudier le problème aux valeurs propres, chacune de ces valeurs propres représentant alors l'intensité de convection d'une variable. Le terme convectif peut se réécrire en une matrice diagonale donnant les contributions convectives de la stabilisation représentées par les valeurs propres, et cela pour chacune des directions. Ainsi, le problème aux valeurs propres suivant est étudié dans la direction s de l'écoulement

$$\left(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{s}-\lambda_{i}\underline{\underline{\mathcal{I}}}\right)\underline{\mathbf{S}}_{i}=0, \quad i\in \llbracket 1,\ldots\,n_{dl}\rrbracket$$

avec $\underline{\mathbf{S}}_i$ le vecteur propre associé à la valeur propre λ_i . Le problème homologue mais dans l'espace entropique Riemannien

$$\left(\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{s}-\lambda_{i}\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{0}\right)\underline{\widetilde{\mathbf{S}}}_{i}=0, \quad i\in [\![1,\ldots n_{dl}]\!]$$

Les grandeurs suivantes sont définies $\underline{\mathbf{S}} = [\underline{\mathbf{S}}_i]_{i \in [\![1, \dots, n_{dl}]\!]}, \quad \underline{\widetilde{\mathbf{S}}} = [\underline{\widetilde{\mathbf{S}}}_i]_{i \in [\![1, \dots, n_{dl}]\!]} = \underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_0^{-1} \underline{\mathbf{S}}$ et $\underline{\mathbf{A}}_s = \mathbf{diag} [\lambda_i, \dots, \lambda_{n_{dl}}]$, et les relations suivantes sont vérifiées

$$\left\{\begin{array}{c} \underline{\widetilde{\mathbf{S}}}^T \underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_s \underline{\widetilde{\mathbf{S}}} = \underline{\mathbf{S}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}}_s \underline{\mathbf{S}} = \underline{\mathbf{A}}_s \\ \underline{\widetilde{\mathbf{S}}}^T \underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_0 \underline{\widetilde{\mathbf{S}}} = \underline{\mathcal{I}} \end{array}\right.$$

Ainsi, la partie stationnaire de l'équation (2.12) s'écrit dans la base du sens de la convection en notant $g_{\alpha\beta} = \partial \xi_i / \partial s_{\alpha} \ \partial \xi_i / \partial s_{\beta}$

$$\underbrace{\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{0}^{-1} \left[\left(\frac{\partial \xi_{i}}{\partial x_{j}} \frac{\partial \xi_{i}}{\partial x_{k}} \right) \underline{\mathbf{A}}_{j} \underline{\mathbf{A}}_{k} \right]^{-\frac{1}{2}} = \underbrace{\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{0}^{-1} \left[\underline{\mathbf{A}}_{j} \underline{\mathcal{Q}} g_{\alpha\beta} \underline{\mathcal{Q}}^{-1} \underline{\mathbf{A}}_{k} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{car } g_{\alpha\beta} \text{ est une constante} \\
= \underbrace{\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{0}^{-1} \left[\underline{\mathcal{Q}} \underline{\mathbf{A}}_{\alpha} \underline{\mathcal{Q}}^{-1} \underline{\mathcal{Q}} g_{\alpha\beta} \underline{\mathcal{Q}}^{-1} \underline{\mathcal{Q}} \underline{\mathbf{A}}_{\beta} \underline{\mathcal{Q}}^{-1} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{car } \underline{\mathcal{Q}}^{T} = \underline{\mathcal{Q}}^{-1} \\
= \underbrace{\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{0}^{-1} \left[\underline{\mathcal{Q}} \left(\underline{\mathbf{A}}_{\alpha} g_{\alpha\beta} \underline{\mathbf{A}}_{\beta} \right) \underline{\mathcal{Q}}^{T} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Par ailleurs, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{s}$ est diagonalisable sous la forme : $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{s} = \underline{\underline{\mathbf{S}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{s} \underline{\underline{\mathbf{S}}}$. Par contre, les autres directions *n* et *t* ne sont pas diagonalisables par cette même matrice de passage $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$. Cependant pour ces autres directions $\alpha \neq s$, il se trouve que $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\alpha} = \underline{\underline{\mathbf{S}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\alpha} \underline{\underline{\mathbf{S}}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}}^{T} \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\alpha} \underline{\underline{\mathbf{S}}}$. La matrice $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\alpha}$ reste symétrique mais non diagonale. Il en découle que la matrice $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\alpha} g_{\alpha\beta} \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\beta}$ est réelle symétrique et donc diagonalisable dans \mathbb{R}^{3}

$$\underline{\underline{\Lambda}}_{\alpha}\underline{\underline{\mathbf{g}}}_{\alpha\beta}\underline{\underline{\Lambda}}_{\beta} = \underline{\underline{\mathbf{X}}} \ \underline{\underline{\Lambda}} \ \underline{\underline{\mathbf{X}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{X}}} \ \underline{\underline{\Lambda}} \ \underline{\underline{\mathbf{X}}}^{-T}$$

où $\underline{\underline{\Lambda}}$ est une matrice diagonale. Ainsi, la matrice d'échelle de temps intrinsèque se réécrit de la manière suivante

$$\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\widetilde{A}}}_{0}^{-1} \left[\left(\frac{\partial \xi_{0}}{\partial x_{0}} \right)^{-1} \underline{\underline{I}} + \left[\underline{\underline{Q}} \left(\underline{\underline{A}}_{\alpha} g_{\alpha\beta} \underline{\underline{A}}_{\beta} \right) \underline{\underline{Q}}^{T} \right]^{-\frac{1}{2}} \right] \\ = \underline{\widetilde{\underline{A}}}_{0}^{-1} \left[\left(\frac{\partial \xi_{0}}{\partial x_{0}} \right)^{-1} \underline{\underline{I}} + \left[\underline{\underline{Q}} \left(\underline{\underline{S}} \underline{\Lambda}_{\alpha} \underline{\underline{S}}^{-1} g_{\alpha\beta} \underline{\underline{S}} \underline{\Lambda}_{\beta} \underline{\underline{S}}^{-1} \right) \underline{\underline{Q}}^{T} \right]^{-\frac{1}{2}} \right] \\ = \underline{\widetilde{\underline{A}}}_{0}^{-1} \left[\left(\frac{\partial \xi_{0}}{\partial x_{0}} \right)^{-1} \underline{\underline{I}} + \left[\underline{\underline{Q}} \left(\underline{\underline{S}} \underline{\Lambda}_{\alpha} g_{\alpha\beta} \underline{\Lambda}_{\beta} \underline{\underline{S}}^{-1} \right) \underline{\underline{Q}}^{T} \right]^{-\frac{1}{2}} \right] \\ = \underline{\widetilde{\underline{A}}}_{0}^{-1} \left[\left(\frac{\partial \xi_{0}}{\partial x_{0}} \right)^{-1} \underline{\underline{I}} + \left[\underline{\underline{Q}} \left(\underline{\underline{S}} \underline{\underline{X}} \underline{\underline{\Lambda}} \underline{\underline{X}}^{-1} \underline{\underline{S}}^{-1} \right) \underline{\underline{Q}}^{T} \right]^{-\frac{1}{2}} \right] \\ = \underline{\widetilde{\underline{A}}}_{0}^{-1} \left[\left(\frac{\partial \xi_{0}}{\partial x_{0}} \right)^{-1} \underline{\underline{I}} + \left[\left(\underline{\underline{Q}} \underline{\underline{S}} \underline{\underline{X}} \right) \underline{\underline{\Lambda}} \left(\underline{\underline{Q}} \underline{\underline{S}} \underline{\underline{X}} \right)^{T} \right]^{-\frac{1}{2}} \right] \\ = \underline{\widetilde{\underline{A}}}_{0}^{-1} \left[\left(\frac{\partial \xi_{0}}{\partial x_{0}} \right)^{-1} \underline{\underline{I}} + \left(\underline{\underline{Q}} \underline{\underline{S}} \underline{\underline{X}} \right) \underline{\underline{\Lambda}}^{-\frac{1}{2}} \left(\underline{\underline{Q}} \underline{\underline{S}} \underline{\underline{X}} \right)^{T} \right]$$

Il est noté

$$\underline{\underline{\Lambda}}^{adv} = \operatorname{diag} \left[\lambda_1^{adv}, \cdots, \lambda_{n_{dl}}^{adv} \right] = \underline{\underline{\Lambda}}^{-\frac{1}{2}} \text{ et } \underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{\mathcal{Q}}} \underline{\underline{S}} \underline{\underline{X}}$$

Il existe donc un changement de base permettant d'exprimer $\underline{\tau}$ en fonction des valeurs propres convectives.

Enfin, il reste à corriger ces valeurs propres avec un terme diffusif. Pour cela une correction construite sur la projection de la matrice diffusive sur l'espace de diagonalisation est ajoutée. Ces corrections notées σ_i sont alors ajoutées aux valeurs propres advectives,

$$\sigma_{i} = \frac{1}{n_{sd}} \sum_{j,k,l,m=1}^{n_{sd}} \underline{\Phi}_{i}^{T} \underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{0}^{-1} \left(\frac{\partial \xi_{j}}{\partial x_{l}} \frac{\partial \xi_{k}}{\partial x_{m}} \underline{\mathbf{K}}_{lm} \right) \underline{\Phi}_{i}$$

Le nombre de Péclet de maille devient : $Pe_{si} = 1/(\lambda_i^{adv}\sigma_i)$. Les valeurs propres advectives sont alors corrigées grâce à l'adjonction d'une fonction de Péclet utilisant le nombre de Péclet de maille. Cette correction est issue de la forme optimale de la diffusion artificielle permettant de corriger l'équation scalaire d'advection diffusion et prend donc la forme

$$\lambda_{i} = \lambda_{i}^{adv} \tilde{\xi} \left(Pe_{s} \right), \quad \text{où } \tilde{\xi} \left(Pe_{s} \right) = \coth \left(Pe_{s} \right) - \frac{1}{Pe_{s}}$$

Au final, la matrice d'échelle de temps intrinsèque s'écrit

$$\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}}_{0}^{-1} \left(\left(\frac{\partial \xi_{0}}{\partial x_{0}} \right)^{-1} \underline{\underline{\mathcal{I}}} + \underline{\underline{\mathbf{\Phi}}} \mathbf{diag} \left[\lambda_{i} \right] \underline{\underline{\mathbf{\Phi}}}^{T} \right)$$

La stabilisation SUPG/GMC s'appuie donc sur une étude locale dans l'espace des vecteurs propres du sens de convection permettant de corriger les valeurs propres de la matrice convective grâce à une projection de la matrice diffusive sur ce même espace. La stabilisation compare une intensité de convection à une intensité de diffusion. Si cette dernière est trop faible, la stabilisation rajoutera de la diffusion et cela uniquement dans la direction privilégiée par le transport d'information.

Au regard des modèles de sous-maille multi-échelles, la stabilisation apporte une leçon très intéressante. Tout d'abord la matrice diffusive issue de la modélisation devra y être incorporée sous peine de nourrir la stabilisation avec une seule partie de la diffusion du calcul et de rendre finalement le calcul trop diffusif. Par ailleurs, Levasseur [99] et Garnier [48] montrent que l'effet spectral de la stabilisation est bien différent de celui d'un modèle de sous maille. Ce dernier est conçu pour une évolution du spectre en dissipation de la forme $\sim k^{\frac{1}{3}}$, alors que le spectre issu de la stabilisation évolue en $\sim k^{\frac{4}{3}}$. De plus bien que l'intensité de la stabilisation soit plus importante que celui de la modélisation et cela même spectralement, il n'en reste pas moins que les modèles ont des effets différents et de loin non négligeables. Une chose très importante à remarquer sur la définition de la stabilisation est sa construction locale à l'élément. Cette approche est très utile pour la construction des différentes échelles du modèle de cette thèse. Cet exemple montre que la construction locale à l'élément impacte globalement le comportement du fluide, ce qui justifie la construction élémentaire du futur modèle de sous maille.

2.4.3 Particularité dans AETHER

Dans la pratique, le calcul avec la formulation GMC est compliqué en raison du terme supplémentaire à calculer ci-dessous (2.13). En effet, celle-ci impose le calcul des dérivées secondes de $\underline{\mathbf{V}}$ et de $\underline{\mathbf{W}}$.

$$\int_{\Omega_n^e} \underline{\mathcal{L}}\left(\underline{\mathbf{W}}\right) \cdot \underline{\underline{\tau}}\left(\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_0 \underline{\mathbf{V}}_{,t} + \underline{\mathcal{L}}\left(\underline{\mathbf{V}}\right)\right) d\Omega_n^e \tag{2.13}$$

Une méthode pour s'affranchir du calcul des dérivées secondes de $\underline{\mathbf{V}}$ est d'appliquer une projection L_2 et ainsi de déterminer un effet de gradient second à partir des valeurs des dérivés première. Cette méthode est présentée dans le paragraphe suivant. Cependant la projection L_2 ne peut être appliquée à $\underline{\mathbf{W}}$ car les valeurs de $d\underline{\mathbf{W}}$ ne sont pas définies. Ainsi, la formulation GMC n'est pas utilisée dans AETHER car le terme diffusif dans $\underline{\mathcal{L}}(\underline{\mathbf{W}})$ n'est pas considéré. Il serait coûteux à calculer et donc seule la formulation SUPG est implémentée. De plus, différentes approximations peuvent être considérées dans le terme de stabilisation de l'équation (2.13).

Formulation stationnaire

Cette méthode consiste à prendre uniquement en compte les termes en espace dans l'expression de la stabilisation. Elle est légère en coût de calcul mais fausse par construction. En effet, appliquer la stabilisation ne peut se faire que sur le résidu entier et non pas seulement sur la partie diffusive et convective afin d'assurer la consistance de la formulation. Cette méthode intègre la partie instationnaire dans le résidu grâce à $\underline{\underline{A}}_{0}\underline{V}_{,t}$. Elle est plus satisfaisante théoriquement car elle applique une correction diffusive pour certaines zones de l'espace de nature trop convectives grâce à $\underline{\underline{\tau}}$. L'instabilité artificielle du schéma numérique en espace est stabilisé et le terme de stabilisation disparaît progressivement avec la convergence. La consistance est donc conservée.

Formulation instationnaire

L'ajout d'une partie temporelle/instationnaire dans la matrice $\underline{\tau}$ pourrait sembler artificiel. Cependant $\underline{\tau}$ étant une stabilisation numérique du schéma, pourquoi ne pas corriger aussi l'intégration temporelle ? Ainsi, ce terme additionnel proportionnel à $1/\Delta t^2$ compense la diffusivité artificielle introduite par le schéma différence finie en temps. Un meilleur comportement du calcul est constaté en ajoutant ce terme. Il est à noter qu'une adaptation de ce coefficient devrait être développée. En effet, si le schéma temporel ou l'ordre spatial change, la précision aussi et donc la stabilisation doit suivre cette tendance. Or aujourd'hui ce coefficient temporel possède la même forme pour tous les ordres de simulation. En pratique, les calculs divergent lorsque le pas de temps devient trop petit. En effet, si le pas de temps diminue alors $\underline{\tau}$ devient de plus en plus grand entrainant la divergence du calcul.

D'autres méthodes de stabilisation des éléments finis ont vu le jour depuis l'implémentation SUPG/GMC dans AETHER. D'un côté, certaines cherchent à conserver cette formulation et rendent le calcul uniformément stable pour tout pas de temps [62]. Par ailleurs des approches différentes sont développées grâce aux modèles multi-échelles (voir référence plus loin en section 6.1.4). Ils permettent de définir une stabilisation grâce aux grandeurs locales et aux fonctions de forme de l'écoulement. Comme pour SUPG/GMC, le terme de stabilisation n'a qu'un sens local, cependant il est intrinsèquement lié aux méthodes multi-échelles et de filtrage qui sont reprises dans cette thèse.

En reprenant cette théorie développée par Hughes [68], il possible aussi de montrer qu'à partir d'un certain ordre de simulation spatiale, l'implicitation de $\underline{\underline{\tau}}$ doit être prise en compte. Bien que cela ne soit pas encore réalisé dans AETHER, le faible ordre spatial utilisé dans cette thèse, O_3 , permet de continuer à supposer judicieusement que la matrice de temps intrinsèque soit toujours constante sur les éléments.

2.5 Outils éléments finis pour les modèles multi-échelles

La construction du modèle de sous-maille développé plus loin nécessite le calcul de certaines grandeurs physiques. Comme il en est discuté dans les chapitres dédiés, le calcul des dérivées d'ordre n est nécessaire. Cette partie vise à fournir les outils éléments finis permettant de calculer le plus judicieusement les grandeurs nécessaires au modèle.

2.5.1 Règles d'intégration pour interpolations polynômiales

La résolution numérique des équations de Navier-Stokes se limite donc à calculer la matrice masse et le vecteur résidu sur chaque éléments afin de reconstituer la matrice globale. Ainsi le système peut être inversé et la solution peut être mise à jour à partir de son gradient en chaque nœuds au temps n + 1.

Comme précisé au paragraphe 2.3.2, l'interpolation sur l'élément en un nœud revient à connaitre la valeur des fonctions de forme en l'équivalent de ce nœud sur l'élément de référence. Si c'est un sommet cela revient à être 0 ou 1. Cependant pour le calcul de l'intégrale, l'évolution continue n'est pas directement transposable. Le changement de variable de l'intégrale entre

l'élément de référence et l'élément réel fait intervenir les dérivées des fonctions de forme à travers le déterminant du jacobien. Les matrices globales sont donc calculées localement sur chaque élément en utilisant le déterminant du jacobien défini sur l'élément de référence. Finalement, la formule importante du calcul des intégrales locales est

$$\int_{\Omega^{e}} \Phi\left(\underline{\mathbf{x}}\right) d\Omega^{e} = \int_{\Omega_{\mathrm{ref}}} \Phi\left(\underline{\boldsymbol{\xi}}\right) \det\left[\underline{\mathbf{J}}^{e}\right] d\Omega_{\mathrm{ref}}$$

Il reste toutefois à résoudre le problème numérique du calcul des intégrales. Celles-ci font l'objet de règles d'intégration adaptées aux fonctions d'interpolation polynômiales. Chacune de ces intégrales est calculée à l'aide d'une quadrature numérique par la méthode de Gauss. Cette règle est simple en 1D : grâce à k points, l'intégrale d'un polynôme de degré 2k - 1 peut être calculée exactement. En 2D et en 3D, respectivement pour des quadrilatères ou des hexaèdres, la difficulté est contournée en utilisant cette règle 1D dans chacune des directions. Le problème se pose pour les triangles et les tétraèdres. La solution est d'intégrer avec moins de points en utilisant des règles adaptées tout en conservant la même précision.

Il faut cependant garder en mémoire que plus l'ordre augmente, plus les règles d'intégration sont multiples. Il peut s'avérer plus judicieux d'utiliser une règle avec moins de points qui sera plus rapide à calculer mais moins précise. Ainsi, l'intégrale sur Ω^e de la fonction Φ peut se réécrire

$$\int_{\Omega^{e}} \Phi\left(\underline{\boldsymbol{\xi}}\right) d\Omega^{e} = \sum_{i=1}^{n_{int}} \sum_{a=1}^{n_{en}} \mathcal{N}_{a}\left(\underline{\boldsymbol{\xi}}_{i}\right) \det\left[\underline{\mathbf{J}}^{e}\right]\left(\underline{\boldsymbol{\xi}}_{i}\right) \omega_{i} \Phi_{a}$$

où Φ_a , $\underline{\xi}_i$, n_{int} et ω_i sont respectivement la valeur de la fonction au nœud a, les coordonnées des points d'intégration sur l'élément de référence, le nombre de points d'intégration et le poids associé à chacun de ces points. Par exemple pour un tétraèdre en ordre O_2 possédant 4 fonctions d'interpolation, il suffit de prendre $\omega_i = \omega$, $\forall i \in [1, ..., n_{int}]$ pour que le système soit fermé. En effet, il y a 4 équations portant sur l'intégrale des fonctions d'interpolation et comportant 4 inconnues : ξ_i et ω . Seul un point d'intégration est nécessaire. Dans le tableau 2.1 sont données des règles d'intégration classiques pour les tétraèdres d'ordre O_2 et O_3 . Pour obtenir une méthode d'obtention des poids et points d'intégration, se reporter à l'annexe B.4. Le coût du calcul est directement proportionnel au nombre d'éléments multiplié par le nombre de points d'intégration sur l'élément de référence.

Il faudra noter que l'intégration se fait sur des produits de fonction de forme. Ainsi, bien que la simulation soit O_2 *i.e.* avec des polynômes linéaires, la règle d'intégration à 1 point n'est pas suffisante. En effet, le produit de deux fonctions de forme revient à intégrer un polynôme de degré 1 + 1 = 2. Il est donc nécessaire d'utiliser une règle d'intégration d'ordre supérieur. Ainsi lorsqu'il est question de simulation O_3 , une règle d'intégration pour les polynômes de degré 4 doit être utilisée.

2.5.2 Le calcul des dérivées en pratique

La remarque énoncé à la fin de la section 2.3 sur la discrétisation permet de mettre en évidence la difficulté de calcul des dérivées d'ordre supérieur tel que le Laplacien. Par exemple la partie en dérivée géométrique $\partial^2 \underline{\xi} / \partial \underline{x}^2 \ \partial N_a / \partial \underline{\xi} \ O_3$ fait intervenir une matrice cubique. La dimension de cette matrice augmente avec l'ordre de la dérivée. Or cette matrice peut être difficilement inversible à partir de la simple formule de $\partial^n \underline{x} / \partial \underline{\xi}^n$. C'est dans ces cas de figure qu'il est important de prendre certaines approximations sur la géométrie des éléments et des fonctions d'interpolations. Les hypothèses utilisées jusqu'à maintenant sont des fonctions d'interpolation de Lagrange polynômiales et des éléments iso-paramétriques.

Les éléments symétriques

Dans AETHER, il a été choisi de conserver des éléments symétriques. Ceci permet de profiter de deux effets très importants qui introduisent une simplification et une efficacité algorithmique

Nombre de points d'intégration	Coordonnées sur l'élément de référence (ξ_i, η_i, ζ_i)	Poids ω_i	Exacte pour un polynôme de degré
1	$\frac{1}{4} \ \frac{1}{4} \ \frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	1
4	$egin{array}{cccc} a & a & a \\ a & a & b \\ a & b & a \\ b & a & a \end{array}$	$\frac{1}{24}$	2

TABLE 2.1 – Règle d'intégration pour un élément de référence tétraédrique, $a = (5 - \sqrt{5})/20$ et $b = (5 + 3\sqrt{5})/20$.

accrues. Un élément symétrique est un élément dont les nœuds sur une barre sont équidistants et dont la barre n'est pas déformée. Cela rend le jacobien inconditionnellement constant sur l'élément. Les deux effets en résultant sont tout d'abord l'annulation de la partie géométrique des dérivées d'ordre $n \in [\![2, ... + \infty]\![$. Puis l'introduction d'un jacobien constant permettant son extraction des formules analytiques, rendant ces dernières identiques à tous les éléments.

Le premier point permet de déterminer simplement les dérivées successives grâce au produit matriciel des jacobiens, qui est très simplement calculable,

$$\frac{\partial^{n} \underline{\mathbf{V}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}^{n}} = \sum_{a=1}^{n_{en}} \left(\underline{\underline{\mathbf{J}}}^{e} \right)^{n} \frac{\partial^{n} N_{a}}{\partial \underline{\boldsymbol{\xi}}^{n}} \left(\underline{\boldsymbol{\xi}} \right) \underline{\boldsymbol{V}}_{a}$$
(2.14)

Le deuxième point est très important car il localise les formules analytiques sur l'élément de référence. En effet, seule la matrice jacobienne exprime le calcul dans l'élément réel. Cette dernière étant constante, elle peut sortir de l'expression analytique des intégrales. Par exemple c'est le cas de la projection aux nœuds de grandeurs fonctionnelles. Cette formulation se retrouve partout lorsqu'il est souhaitable de rajouter une formule analytique à notre problème telle que les modèles multi-échelles par exemple.

Cette approximation n'est pas anodine. En plus de simplifier et d'automatiser algorithmiquement la montée en ordre des grandeurs analytiques, l'hypothèse d'éléments symétriques permet de conserver la forme polynômiale des fonctions d'interpolation de l'élément de référence dans l'élément réel. Ainsi l'interpolation réelle n'est plus simplement une interpolation par fraction rationnelle mais une interpolation strictement polynômiale.

Soit un problème différentiel d'ordre k formulé en éléments finis. Avec les hypothèses faites sur les éléments, il est possible d'écrire que

$$\int_{\Omega} \underline{\mathbf{W}} \cdot \underline{\mathbf{F}} \frac{\partial^{k} \underline{\mathbf{V}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}^{k}} d\Omega = \sum_{n}^{n_{el}} \sum_{a}^{n_{en}} \sum_{b}^{n_{en}} \int_{\Omega^{e}} \mathbf{N}_{a} \underline{\mathbf{W}}_{a} \cdot \underline{\mathbf{F}} \frac{\partial^{k} \mathbf{N}_{b}}{\partial \underline{\mathbf{x}}^{k}} \underline{\mathbf{V}}_{b} d\Omega^{e}$$
$$= \underline{\mathbf{W}}_{a} \cdot \sum_{n}^{n_{el}} \det \left[\underline{\mathbf{J}}^{e} \right] \left(\underline{\mathbf{J}}^{e} \right)^{k} \left[\sum_{a}^{n_{en}} \sum_{b}^{n_{en}} \mathbf{N}_{a} \underline{\mathbf{F}} \frac{\partial^{k} \mathbf{N}_{b}}{\partial \underline{\boldsymbol{\xi}}^{k}} d\Omega^{\mathrm{ref}} \right] \underline{\mathbf{V}}_{b}$$

où les sommes sur a et b sont maintenant implicitement exprimées. Le terme entre crochet est indépendant de la géométrie de l'élément, ce qui permet de considérer que les fluctuations de la variable <u>V</u> sont purement polynômiales. Les coefficients polynômiaux sont modulés lors de la globalisation en fonction de la taille de l'élément considéré par $\det \left[\underline{\mathbf{J}}^{e}\right]$ et de la direction du gradient par $\underline{\mathbf{J}}^{e}$. Cela prouve l'efficacité de l'hypothèse de symétrie des éléments qui permet d'introduire des expressions analytiques dans notre résolution en supposant l'évolution des variables comme polynômiales.

Dans une optique de généralisation, il est toutefois possible de déformer les éléments de manière à ce que le terme en dérivée géométrique soit nul, permettant ainsi de conserver l'effet des hypothèses d'élément symétriques, voir par exemple Normand [118].

La projection L_2

La définition de la dérivée classique donnée par l'équation (2.14) donne une estimation de la dérivée aux points d'intégration à partir de la valeur d'une fonction Φ aux nœuds. Cette valeur aux points d'intégration est nécessaire aux calculs des intégrales. Cependant, il est parfois aussi nécessaire d'obtenir les dérivées aux points d'intégration à partir des dérivées d'ordre inférieure à ces mêmes points d'intégration.

La projection L_2 permet d'obtenir la valeur approchée aux nœuds de variables définies aux points d'intégration. C'est le calcul inverse de l'interpolation réalisé de manière approchée. Elle permet par exemple de ne plus avoir besoin des gradients seconds et supérieurs des fonctions de forme pour calculer les dérivées secondes et supérieures des grandeurs aux points d'intégration.

En effet, toutes les matrices de résolution de notre équation sont composées d'intégrales. Ainsi seules les valeurs de l'élément de référence aux points d'intégration sont utiles. Or pour construire la valeur de la dérivée $n^{ième}$ aux points d'intégration, il est nécessaire d'avoir la valeur aux nœuds, la valeur des dérivées $n^{ième}$ sur l'élément de référence aux points d'intégration et la valeur du jacobien aux points d'intégration selon la formule (2.14). La projection L_2 permet alors d'obtenir une approximation de la valeur de la dérivée $n^{ième}$ à partir de la dérivée $(n-1)^{ième}$ et du gradient de la fonction de forme sur l'élément de référence, chacune aux points d'intégration.

Une des applications directes de la projection L_2 se trouve dans le calcul de la stabilisation à l'ordre élevé. Lors d'un calcul à l'ordre spatial O_i avec $i \in [\![2, ... + \infty]\![$, la stabilisation requiert le calcul de gradients seconds qui n'existe pas à l'ordre O_2 . Mais le calcul et le stockage des termes nécessaires sont coûteux sans l'utilisation de la projection L_2 .

La projection L_2 utilise la norme L_2 comme mesure pour projeter la valeur d'une fonction calculée aux points d'intégration sur les nœuds. Cette méthode peut être chaînable à l'infini en utilisant le fait que

$$\frac{\partial^{n+1}\underline{\Phi}}{\partial \underline{\mathbf{x}}^{n+1}}\left(\underline{\mathbf{x}}_{i}\right) = \sum_{a=1}^{n_{en}} \left(\underline{\mathbf{J}}^{e} \frac{\partial \mathbf{N}_{a}}{\partial \underline{\boldsymbol{\xi}}}\right) \frac{\partial^{n}\underline{\Phi}}{\partial \underline{\mathbf{x}}^{n}}\left(\underline{\mathbf{x}}_{a}\right)$$

Toutefois si l'ordre de la dérivée devient supérieur à celui des fonctions de forme, la méthode donne une dérivée nulle. En effet même si la méthode n'est pas exacte, la dérivée troisième d'un polynôme quadratique est toujours nulle. Le gain en calcul et en mémoire est conséquent car il n'est pas nécessaire de stocker et d'inverser de termes supplémentaires.

Mathématiquement, la formule de la projection L_2 est la suivante

Projection L2 1 Soit Φ une fonction définie sur le domaine Ω et V_h un espace de fonctions linéaires continues par morceaux sur une partition de Ω . La projection L_2 de la fonction Φ dans V_h est la fonction $P_h \Phi \in V_h$ telle que

$$(\Phi - P_h \Phi, v)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} (\Phi - P_h \Phi) v d\Omega = 0, \quad pour \ v \in V_h$$

Cette formule a une application concrète pour les éléments finis. Prenons Φ_b les valeurs de la fonction Φ au sommet b. La projection L_2 se définit par

$$\int_{\Omega} \mathcal{N}_a \left(\Phi - \sum_b \mathcal{N}_b \Phi_b \right) d\Omega = 0, \quad \forall a$$

De plus comme Φ_b est unique, si sur chaque éléments la propriété est vérifiée alors la norme L_2 globale l'est aussi. Ainsi, la projection L_2 pour les éléments finis est utilisée de la manière suivante.

Projection L2 2 (Projection des valeurs aux points d'intégrations sur les sommets) Soit Φ la valeur de la fonction étudiée et $\widehat{\Phi}$ le vecteur des valeurs de cette fonction aux sommets de l'élément local. Il est possible d'estimer au sens L_2 la valeur de $\widehat{\Phi}$ grâce aux valeurs de Φ sur les points d'intégration par

$$\begin{bmatrix} \left(\int_{\Omega^e} N_a N_b d\Omega^e \right) \end{bmatrix}_{ab} \widehat{\Phi} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega^e} N_b \Phi d\Omega_b^e \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \sum_i N_b \left(\underline{\boldsymbol{\xi}}_i \right) \Phi \left(\underline{\mathbf{x}}_i \right) \operatorname{det} \left[\underline{\mathbf{J}}^e \right] \omega_i \end{bmatrix}_b$$

La formulation permet d'affirmer que $\widehat{\Phi}$ est unique et est la meilleure approximation de Φ au sens de la norme L_2 sur l'ensemble des fonctions de forme \mathcal{V} . Ainsi, en reprenant le problème local et en supposant les éléments symétriques, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de Φ est déterminée par

$$\frac{\partial^{n}\Phi}{\partial\underline{\mathbf{x}}^{n}}\left(\underline{\mathbf{x}}_{a}\right)=\sum_{i}\sum_{b}\left[\underline{\underline{\mathbf{M}}}^{\mathrm{ref}}\right]_{ab}^{-1}\mathrm{N}_{b}\left(\underline{\boldsymbol{\xi}}_{i}\right)\frac{\partial^{n}\Phi}{\partial\underline{\mathbf{x}}^{n}}\left(\underline{\mathbf{x}}_{i}\right)\omega_{i}$$

où $\left[\underline{\mathbf{M}}^{\text{ref}}\right]_{ab} = \int \mathcal{N}_a \mathcal{N}_b d\Omega^e$. La valeur de la dérivée aux nœuds des éléments est obtenue, permettant d'en déduire la valeur de la dérivée suivante aux points d'intégration par

$$\frac{\partial^{n+1}\Phi}{\partial \underline{\mathbf{x}}^{n+1}} (\underline{\mathbf{x}}_{i_2}) = \sum_{a} \frac{\partial N_a}{\partial \underline{\mathbf{x}}} (\underline{\boldsymbol{\xi}}_{i_2}) \frac{\partial^n \Phi}{\partial \underline{\mathbf{x}}^n} (\underline{\mathbf{x}}_a)
= \sum_{a} \frac{\partial N_a}{\partial \underline{\mathbf{x}}} (\underline{\boldsymbol{\xi}}_{i_2}) \sum_{i_1} \sum_{b} \left[\underline{\mathbf{M}}^{\text{ref}}\right]_{ab}^{-1} N_b (\underline{\boldsymbol{\xi}}_{i_1}) \frac{\partial^n \Phi}{\partial \underline{\boldsymbol{\xi}}^n} (\underline{\mathbf{x}}_{i_1}) \omega_i
= \sum_{a} \sum_{i_1} \sum_{b} \frac{\partial N_a}{\partial \underline{\mathbf{x}}} (\underline{\boldsymbol{\xi}}_{i_2}) \left[\underline{\mathbf{M}}^{\text{ref}}\right]_{ab}^{-1} N_b (\underline{\boldsymbol{\xi}}_{i_1}) \frac{\partial^n \Phi}{\partial \underline{\boldsymbol{\xi}}^n} (\underline{\mathbf{x}}_{i_1}) \omega_i$$

La définition des deux coefficients suivants est alors introduite

$$\begin{cases} z_a\left(\underline{\boldsymbol{\xi}}_{i_1}\right) = \sum_{b} \left[\underline{\mathbf{M}}^{\mathrm{ref}}\right]_{ab}^{-1} \mathrm{N}_b\left(\underline{\boldsymbol{\xi}}_{i_1}\right) \omega_i \\ \mathcal{P}\nabla \left|\left(\underline{\boldsymbol{\xi}}, \underline{\boldsymbol{\xi}}_{i_2}, \underline{\boldsymbol{\xi}}_{i_1}\right) = \sum_{a} z_a\left(\underline{\boldsymbol{\xi}}_{i_1}\right) \frac{\partial \mathrm{N}_a}{\partial \underline{\boldsymbol{\xi}}}\left(\underline{\boldsymbol{\xi}}_{i_2}\right) \end{cases}$$
(2.15)

afin d'obtenir la formule suivante pour le calcul des dérivées approchées

$$\frac{\partial^{n+1}\Phi}{\partial\underline{\mathbf{x}}^{n+1}}\left(\underline{\boldsymbol{x}}_{i_{2}}\right) = \sum_{i_{1}} \underline{\mathbf{J}}^{e}\left(\underline{\boldsymbol{\xi}}_{i_{1}}\right) \mathcal{P}\nabla\left|\left(\underline{\boldsymbol{\xi}},\underline{\boldsymbol{\xi}}_{i_{2}},\underline{\boldsymbol{\xi}}_{i_{1}}\right)\frac{\partial^{n}\Phi}{\partial\underline{\mathbf{x}}^{n}}\left(\underline{\mathbf{x}}_{i_{1}}\right)\right.$$

La projection L_2 ne reste cependant qu'une approximation des dérivées en éléments finis mais elle est beaucoup plus optimale dans l'implémentation. En effet, seules les valeurs des dérivées premières sont requises. De plus, le coefficient $\mathcal{P}\nabla | (\underline{\xi}, \underline{\xi}_{i_2}, \underline{\xi}_{i_1})$ est commun à tous les éléments car calculé sur celui de référence. Il est à garder à l'esprit que ces méthodes sont exactes uniquement si les éléments sont symétriques. Elles sont aussi extrapolées à l'ordre élevé.

La dérivée aux nœuds par reconstruction

La méthode de projection L_2 revient à projeter les valeurs des dérivées aux points d'intégration sur les nœuds. Cependant, ces valeurs ne sont pas continues et pourraient introduire des erreurs numériques néfastes pour le calcul. Une approche permettant de définir les gradients aux nœuds consiste à réaliser une moyenne pondérée avec les valeurs aux éléments partageant le nœud considéré. Cette méthode est coûteuse en stockage et en calcul mais elle permet d'obtenir dans le cadre de cette thèse des grandeurs continues mais lissées. Pour cela, il suffit d'ajouter en chacun des nœuds globaux la valeur de l'intégrale de la dérivée de chaque éléments partageant ce nœud puis de diviser ce dernier par la somme des volumes des éléments partageant ce même nœud.

$$\frac{\partial^k \underline{\mathbf{V}}_a}{\partial \underline{\mathbf{x}}^k} = \frac{\sum_{a \in e} \int_{\Omega^e} \frac{\partial^k \underline{\mathbf{V}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}^k} d\Omega^e}{\sum_{a \in e} \Omega^e}$$

Cette méthode permet raisonnablement d'obtenir un ordre de dérivée qui pourrait manquer. Typiquement lorsqu'une dérivée troisième est nécessaire lorsque seules des fonctions d'interpolation quadratiques sont à disposition. Cependant, algorithmiquement cette méthode requiert une boucle sur les éléments qui peut être coûteuse.

La dérivée des variables conservatives

Il est généralement plus simple de réfléchir en variable conservative afin de calculer des grandeurs de l'écoulement ou d'implémenter les modèles de sous-maille. Toutefois, les variables conservatives présentent généralement dans les modèles, doivent être transformées en variables entropiques avant de pouvoir être interpolées. En effet, le changement de variable est non linéaire. L'expression des variables conservatives en fonction des variables entropiques est simple pour les vitesses et la température. La masse volumique et la pression sont plus difficilement calculables, toutefois, les gradients des vitesses sont souvent très importants à calculer. Seul le passage par le gradient des variables entropiques permet de calculer exactement la valeur des gradients des vitesse grâce à

$$\begin{cases} u_i = -\frac{V_{i+1}}{V_5} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x} = -\frac{1}{V_5^2} \left(V_5 \frac{\partial V_{i+1}}{\partial x} - V_{i+1} \frac{\partial V_5}{\partial x} \right) \end{cases}$$

où $i \in [1,...3]$ sont les composantes des vitesses. Il est cependant possible de constater que le gradient des vitesses est proportionnel au gradient de la variable entropique respectivement associée si la température varie peu.

2.6 Conclusion

Cette partie a permis d'établir le cadre général de l'utilisation des éléments finis dans le code de calcul AETHER. Le changement de variable entropique n'est pas anodin car il est non linéaire vis-à-vis du vecteur conservatif utilisé pour construire les modèles. La méthode de stabilisation permet de justifier que la définition d'une grandeur aux éléments peut avoir un impact global conséquent. De plus, la méthode éléments finis dans AETHER présente certaines caractéristiques importantes à garder en mémoire pour la suite :

- des fonctions d'interpolation de Lagrange;
- des éléments iso-paramétriques;
- des éléments symétriques.

La première hypothèse donne la forme fonctionnelle des fonctions d'interpolation sur l'élément de référence. La deuxième hypothèse permet d'utiliser cette forme fonctionnelle pour définir les éléments réels. Enfin la troisième hypothèse permet de calquer l'évolution fonctionnelle des fonctions d'interpolation réelles à celles de l'élément de référence. Ainsi l'évolution des variables entropiques sont polynômiales par parties.

Chapitre 3

Pulse acoustique Gaussien

Sommaire

3.1 Pr	ésentation de l'étude et initialisation	51
3.1.1	Maillage	51
3.1.2	Initialisation	53
3.2 Ré	sultats numériques	54
3.2.1	Étude temporelle	54
3.2.2	Étude spatiale	55
3.3 Co	nclusion	56

Dans ce court chapitre, les résultats d'un cas académique bien connu de l'aéroacoustique [7] obtenus par le code AETHER sont reportés. Cette étude permet d'établir la valeur d'un CFL critique à partir duquel la dissipation du schéma en temps devient très inférieure par rapport à la dissipation du schéma en espace. En se plaçant autour de ce CFL pour les futures simulations de cette thèse, l'un des plus gros effet sur la dissipation numérique sera dû à la discrétisation ou modélisation spatiale. Dans ce cas, les modèles multi-échelles ou l'ordre élevé dont les performances jouent sur la précision spatiale, ont beaucoup plus d'effet sur la simulation numérique.

3.1 Présentation de l'étude et initialisation

L'onde acoustique gaussienne est un cas d'étude permettant examiner les capacités du code à calculer correctement des problèmes de propagation acoustique. Ce cas d'étude consiste à générer initialement une perturbation acoustique de la forme d'une gaussienne au centre du domaine et d'analyser son évolution. Le domaine utilisé ici est un domaine 3D cubique de longueur 500 mm dans chacune des directions. Ce problème possède une solution analytique. De plus, les effets visqueux sont négligeables sur la propagation acoustique menant à une énergie qui se conserve. Si cette énergie diminue, alors cela est à imputer aux méthodes numériques. Cette caractéristique permet d'étudier la dissipation numérique du code, les erreurs introduites par une simplification des équations et l'influence des conditions limites anéchoïques.

3.1.1 Maillage

L'initialisation et la solution analytique du pulse acoustique Gaussien sont données sous forme adimensionnée. Cela permet de faire varier simplement la discrétisation spatiale du problème en modifiant les caractéristiques de la solution initiale. Ainsi, le maillage utilisé reste le même : une taille de barre de 5 mm pour une arrête du cube de 500 mm. Comme le maillage est non structuré, une étude statistique sur ce dernier a été faite montrant une taille de barre moyenne de 4,67 mm et un écart type de 1,27 mm. La notion de taille de barre est difficile à définir sur



FIGURE 3.1 – Coupe dans le maillage coloriée selon (a) la taille de barre maximale Δ_{max} et selon (b) la taille de barre Δ . (c) Histogramme de la répartition de la taille de barre dans le maillage.

des maillages non structurés. Ainsi la taille de barre Δ associée à l'élément est définie comme une longueur unidimensionnelle traduisant la taille de l'élément. La racine cubique du volume de cet élément est pertinente dans ce cas. Quand il s'agira de définir une quantité propre et globale au maillage, la taille de barre moyenne Δ_{moy} est utilisée. Elle est calculée grâce à la moyenne des tailles de barre associées aux éléments. Le maillage servant à l'étude possède approximativement 2 millions de nœuds.

Sur les figures 3.1(a) et 3.1(b), il est possible de voir deux coupes dans le maillage représentant des grandeurs caractéristiques telles que respectivement la taille de barre maximale Δ_{max} et la taille de barre à chacun des éléments. La taille de barre maximale est définie par la taille maximale des arrêtes de l'élément. Le maillage non structuré est quasiment homogène dans tout le volume mais les mailles peuvent présentées quelques anisotropies de leur arrêtes. Sur la figure 3.1(c), l'histogramme de la répartition de la taille de barre sur le maillage est représenté. Le maillage n'est pas parfaitement homogène mais conserve une grande quantité de mailles autour de la valeur de 5 mm. Il faut garder en mémoire que la non uniformité de la taille de barre engendre une dissipation et dispersion macroscopique de l'information, qu'il ne faut pas négliger et qui sont toutefois présentes dans les calculs industriels. Il est donc judicieux d'étudier ce cas représentatif des simulations réalisées par la suite. Il est à préciser que la stabilisation de la méthode éléments finis SUPG ne fonctionne pas pour des pas de temps trop petits comme expliquer à la section 2.4.3. Dans cette étude, pour $\Delta t = 1, 5 \times 10^{-6}$ secondes le calcul diverge. Pour pouvoir mener une étude temporelle et faire varier le pas de temps, le terme temporel de la stabilisation est saturé à une valeur maximale qui est la dernière valeur stable *i.e.* $\Delta t = 7, 5 \times 10^{-6}$ secondes.

Le calcul de référence est réalisé grâce à un écoulement uniforme selon x à un Mach de 0,5. L'écoulement est laminaire et aucun modèle de turbulence n'est utilisé. La stabilisation utilisée est saturée comme précisé précédemment, possède sa formulation instationnaire et le terme diffusif à l'ordre élevé est calculé par projection L_2 . Le schéma d'intégration spatial est de 10 points pour les simulations O_3 et de 1 point pour les simulations O_2 . Finalement 6 sous-itérations non-linéaires sont réalisées afin d'obtenir la convergence à chaque itération temporelle.

3.1.2 Initialisation

Les grandeurs analytiques qui sont introduites dans la suite sont adimensionnées avec les grandeurs caractéristiques suivantes

Δ ,	échelle de longueur
$c_{\infty},$	échelle de vitesse
$\Delta/c_{\infty},$	échelle de temps
$\rho_{\infty},$	échelle de masse volumique
$ \rho_{\infty}c_{\infty}^2, $	échelle de pression

où l'échelle de longueur est la taille de barre moyenne du maillage dans le cas du maillage non structuré, c_{∞} la célérité du son et ρ la masse volumique de l'écoulement étudié.

Le pulse acoustique est initialisé avec une fonction gaussienne pour les fluctuations de pression et de masse volumique. Les grandeurs d'initialisation sont les suivantes,

$$\begin{cases} \overline{u_1} = & \mathbf{M} \\ \overline{u_2} = & \mathbf{0} \\ \overline{u_3} = & \mathbf{0} \\ \overline{\rho} = & 1 \\ \overline{p} = & \frac{1}{\gamma} \end{cases}, \begin{cases} u_1' = \mathbf{0} \\ u_2' = \mathbf{0} \\ u_3' = \mathbf{0} \\ p_1' = \epsilon e^{-\alpha(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} \\ \rho_1' = \epsilon e^{-\alpha(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} \end{cases}$$

où M est le Mach de calcul, $\epsilon = 10^{-3}$ est l'amplitude du pulse Gaussien pour rester dans le domaine de l'acoustique linéaire et $\alpha = \ln(2)/b^2$ avec b la demi-épaisseur de la gaussienne qui traduit la discrétisation spatiale du problème. Par exemple b = 3 représente une onde acoustique maillée à 6 points par longueur d'onde. L'écoulement est reconstitué en sommant le champ moyen à ses fluctuations.

Avec cette initialisation, il existe une solution analytique au problème sous la forme d'une intégrale de fonction de Bessel de première espèce et d'ordre 0, $j_0(z) = \sin(z)/z$

$$p'(\mathbf{x},t) = \frac{\epsilon}{\beta} \int_0^\infty \zeta^2 e^{-\frac{\zeta^2}{4\alpha^2}} \cos(t\zeta) j_0(\eta\zeta) d\zeta$$

où

$$\begin{cases} \eta = \sqrt{(x_1 - Mt)^2 + x_2^2 + x_3^2} \\ \beta = 2\alpha\sqrt{\pi\alpha} \end{cases}$$



FIGURE 3.2 – (a) Évolution temporelle de I_p . (b) Champ de pression fluctuant dans un plan du maillage à t = 30.

Le pulse de pression est simplement advecté par l'écoulement moyen uniforme, et il est attendu que l'énergie du signal de pression se conserve

$$I_p = \int_{-\infty}^{+\infty} (p')^2 d\Omega$$

jusqu'à sa sortie du domaine de calcul pour t = 100/3. La pente de la solution numérique I_p traduit donc la dissipation numérique. À partir de t = 100/3, cette grandeur doit progressivement diminuer car l'onde sort du domaine d'intégration qui est le domaine du calcul. C'est dans cette plage temporelle qu'il est possible de voir l'effet des conditions aux limites sur la propagation acoustique. Cette grandeur est adimensionnée par son maximum sur $t \in [10, 30]$ pour pouvoir comparer les résultats en s'affranchissant de l'erreur sur l'initialisation. Il n'est pas possible d'assurer numériquement la même énergie entre chacun des cas car la fonction de Bessel n'est pas correctement définie au voisinage de 0.

En examinant la solution analytique du problème figure 3.2, l'initialisation apparait très chahutée à cause de la forme de la fonction de Bessel. Cependant, un plateau est visible très rapidement à partir de t = 10 jusqu'à t = 100/3. À partir de cet instant, il y a une première cassure de pente correspondant à la sortie du pulse sur la première condition limite puis une chute progressive correspondant à la sortie sur les autres limites du domaine. Ces événements correspondent aux temps t = 50 et t = 100. Ainsi l'étude de la dissipation numérique du code est réalisée sur le segment de temps $t \in [10, 30]$.

3.2 Résultats numériques

3.2.1 Étude temporelle

Il est possible de déterminer empiriquement une valeur de pas de temps telle que la solution numérique soit convergée en temps pour une discrétisation spatiale donnée. Pour ce cas, la dissipation numérique temporelle devient alors négligeable sur la dissipation numérique spatiale. Les trois courbes de la figure 3.3 sont issues d'une variation de pas de temps à discrétisation spatiale du phénomène constante *i.e.* b = 3. Les trois simulations sont faites à $\Delta t = 1, 5 \times 10^{-5}$ secondes, $\Delta t = 1, 5 \times 10^{-6}$ secondes et $\Delta t = 7, 5 \times 10^{-7}$ secondes.



FIGURE 3.3 – Évolution de I_p (a) et de son erreur relative (b) pour différents pas de temps. Solution analytique (—), solution numérique à $\Delta t = 1, 5 \times 10^{-5}$ (—), solution numérique à $\Delta t = 1, 5 \times 10^{-6}$ (—), solution numérique à $\Delta t = 7, 5 \times 10^{-7}$ (—).

Premièrement, la dissipation numérique décroit lorsque Δt diminue. Cependant, la différence de pente devient négligeable à partir de $\Delta t = 1, 5 \times 10^{-6}$ secondes. Ceci signifie que la dissipation numérique due au schéma temporel devient négligeable et que le calcul est convergé en temps. Ainsi, $\Delta t = 1, 5 \times 10^{-6}$ secondes semble être un bon compromis pour continuer cette étude. Deuxièmement à partir de t = 100/3 secondes, I_p est très légèrement impactée. La condition aux limites n'est pas anéchoïque, et de l'énergie acoustique est renvoyée dans le domaine de calcul. Par ailleurs, de fortes perturbations sont détectées dans ce retour d'énergie plus loin au alentours de t = 40. Celles-ci peuvent être associées aux conditions de coin qui sont plus difficiles à calculer correctement. Aucune condition aux limites anéchoïque n'est actuellement implémentée dans AETHER, l'étude est concentrée sur l'intervalle $t \in [10, 30]$.

3.2.2 Étude spatiale

Après avoir déterminé le pas de temps optimal *i.e.* que l'étude de la dissipation spatiale ne soit pas biaisée, la convergence en espace est maintenant examinée. Quatre cas sont étudiés pour un pas de temps fixé à $\Delta t = 1,5 \times 10^{-6}$ secondes. L'idée est de faire varier l'ordre de la simulation ainsi que la discrétisation du pulse Gaussien. Les quatre courbes sont b = 3 en éléments O_2 , b = 1,5 en éléments O_2 , b = 3 en éléments O_3 et b = 1,5 en éléments O_3 .

Sur la figure 3.4(a), il est possible d'observer que le gain apporté par le passage à des éléments O_3 est supérieur au raffinement en espace par un facteur 2. La courbe en éléments O_3 et avec une discrétisation de b = 3 pour le pulse permet d'obtenir un plateau. Sur la figure 3.4(b), il est possible de voir que la courbe ($- \triangle -$) conserve une erreur relative inférieure à 2% pour ce cas.

L'intérêt de connaître la solution analytique d'un problème est de pouvoir regarder le champ d'erreur de notre solution calculée par rapport au champ de la solution réelle. En traçant l'erreur entre la solution numérique et la solution analytique, il est possible d'étudier qualitativement l'erreur de dispersion et de dissipation. Si le domaine de l'erreur tend à s'agrandir *i.e.* l'anneau du pulse gaussien s'étale, cela signifie qu'il y a des composantes spectrales qui se déplacent plus lentement et donc qu'il y a dispersion. Sur la figure 3.5, il est possible de voir que la dispersion dans le code AETHER reste faible. L'échelle est omise car seule l'épaisseur du pulse permet d'observer la dispersion du signal. Les échelles de couleurs sont en réalité différentes à



FIGURE 3.4 – Évolution de I_p (a) et de l'erreur relative (b) pour différente discrétisation d'espace et ordre des éléments. Solution analytique (—), solution numérique à O_2 à b = 1, 5 (— —), solution numérique à O_2 à b = 3 (— —), solution numérique à O_3 à b = 1, 5 (– —), solution numérique à O_3 à b = 3 (– —), solution numérique à O_3 à b = 3 (– —).

cause de la divergence de l'erreur relative visible sur la figure 3.4(b).

3.3 Conclusion

Cette étude a permis de faire émerger une grandeur caractéristique de l'équilibre entre discrétisation spatiale et temporelle pour les simulations numériques du code AETHER. Cet indicateur est appelé dans cette thèse CFL critique $\text{CFL}_C = c_0 \Delta t / \Delta x$ où c_0 est la vitesse du son, Δx et Δt sont les discrétisations spatiale et temporelle dans la simulation. Le CFL critique correspond au moment où la dissipation temporelle devient négligeable par rapport à la dissipation spatiale. Grâce aux différentes simulations, il est possible de dire que $\text{CFL}_C \simeq 0, 2$ pour un problème maillé avec 6 points par longueur d'onde à l'ordre spatiale O_3 . En effet pour l'ordre élevé, les ordres de grandeurs d'équilibres sont

$$\begin{cases} c_0 = 340 \text{ m/s} \\ \Delta t = 1, 5 \times 10^{-6} \text{ s} \\ \Delta x = 6\Delta = 0,028 \text{ m} \end{cases}$$

Une autre étude a été réalisée pour déterminer $CFL_C \simeq 1$ pour une simulation O_2 .

En concevant les maillages instationnaires dans les zones d'intérêt et en choisissant Δt associé selon ces ordres de grandeurs, cela permet de tirer parti autant que possible des efforts de discrétisation en espace et en temps. Mais surtout d'éviter un effort sur l'une des discrétisation qui serait alors bridée par celle délaissée. La même remarque peut être faite vis-à-vis de l'étude des modèles de sous-maille afin que les erreurs de calcul ne soient pas à imputer majoritairement au schéma temporel et ainsi pouvoir comparer des modèles entre eux. Il est aussi apparu qu'en terme de précision spatiale, diviser par deux la taille de barre est un peu moins intéressant qu'avoir des éléments O_3 lorsque le phénomène étudié est capturé par le maillage. Par ailleurs dans tous les cas, la dispersion numérique issue du code AETHER est très petite ce qui est un réel avantage.

Ce cas d'étude a permis aussi d'établir un ordre de grandeur pour les coûts de simulation entre l'ordre standard O_2 et l'ordre élevé O_3 . Grâce au tableau 3.1, il en émerge que la simulation



FIGURE 3.5 – Erreur relative entre la solution analytique et numérique aux temps adimensionnés t = 20 (a) et t = 30 (b).

à l'ordre élevé est 3,3 fois plus lente que celle à l'ordre O_2 . Cela est attribué essentiellement à l'augmentation du nombre de points d'intégration passant de 1 à l'ordre O_2 à 10 à l'ordre O_3 . Il y a aussi l'ajout du calcul des termes accessibles uniquement par les dérivées secondes qui peut alourdir le calcul. Cependant, le gain en précision est d'un rapport plus élevé, de l'ordre de 2 dans chaque direction pour un cas simple comme celui-ci. Un calcul à l'ordre simple de la même précision serait donc 8 fois plus coûteux.

	$O_2, 2M, b = 1.5, dt = 1, 5.10^{-6}$	$O_3, 2M, b = 1.5, dt = 1, 5.10^{-6}$
Temps CPU (1000 iter)	7244	23897

TABLE 3.1 – Temps CPU entre deux simulations : à l'ordre simple O_2 (gauche) et à l'ordre élevé O_3 (droite).

Deuxième partie Modélisation

Chapitre 4

Modélisation instationnaire de la turbulence

Sommaire

4.1	Le	filtrage et la SGE	62
	4.1.1	La notion de filtre	62
	4.1.2	Filtres homogènes isotropes	63
4.2	Les	équations de la SGE	65
	4.2.1	Le filtrage des équations de Navier-Stokes	65
	4.2.2	Les termes supplémentaires de la SGE	66
	4.2.3	La physique des écoulements turbulents	68
4.3	Mo	délisation de sous-maille	70
	4.3.1	Les hypothèses	70
	4.3.2	Le modèle de Smagorinsky	71
	4.3.3	Le modèle de Smagorinsky avec critère de sélectivité	72
	4.3.4	Le modèle de Smagorinsky dynamique	73
4.4	Le	modèle VMS	74
	4.4.1	Introduction	74
	4.4.2	Approche filtrée par les variables entropiques	76
4.5	4.5 Formulation matricielle entropique de la VMS		77
	4.5.1	Équation du champ total résolu	78
	4.5.2	Formulation de la VMS entropique	79
	4.5.3	Particularité de la VMS entropique	81
	4.5.4	Exemple de séparation des échelles résolues	82

De nombreuses approches existent afin de calculer les écoulements turbulents. Les phénomènes qui les caractérisent sont la clef des difficultés de leur simulation. Ils présentent la coexistence d'un grand nombre de fréquences spatio-temporelles, se traduisant par un spectre d'énergie très large qui démontre toute leur complexité. Cette caractéristique donne des propriétés accrues de mélange. Les écoulements turbulents ont de plus un comportement chaotique, c'est-à-dire une extrême sensibilité aux conditions aux limites et à la condition initiale. Pour plus d'information sur la turbulence se reporter à Bailly et Comte-Bellot [4].

Du fait du grand nombre d'échelles d'espace et de temps qui sont présentes dans l'écoulement turbulent, la simulation directe ou *Direct Numerical Simulation* (DNS) nécessite des maillages extrêmement fins et des pas de temps très petits. En effet d'après les études théoriques sur la turbulence, les échelles les plus petites qui sont responsables de la dissipation sont les échelles de Kolmogorov. De plus le domaine de calcul doit être de la taille du problème étudié et au minimum, il doit être suffisamment grand pour permettre le calcul de la production d'énergie liée aux échelles de l'ordre de grandeur de $L_t = u_t^3/\epsilon$, où u_t est la vitesse caractéristique de la turbulence et ϵ le taux de dissipation. Le nombre de mailles nécessaire pour la simulation peut alors être estimé par

$$N \approx \left(\frac{u_t L_t}{\nu}\right)^{\frac{9}{4}}$$
 avec $\frac{u_t L_t}{\nu} = R_t$ le nombre de Reynolds turbulent

De la même manière le pas de temps doit permettre de capturer les plus petites fluctuations de l'écoulement sur une durée totale caractéristique des grandes structures. C'est-à-dire

$$\Delta t < \frac{\eta}{u_{max}} = \frac{\eta}{L_t} \frac{L_t}{u_{max}} = \frac{1}{R_t^{\frac{3}{4}}} \frac{L_t}{u_{max}}$$

Ces estimations peuvent être retrouvées en annexe C.1. Malgré les puissances de calcul disponibles aujourd'hui, une approche directe ne peut être envisagée dans des configurations industrielles.

Une première approche devenue standard en industrie aéronautique, est la méthode *Reynolds Averaged Navier-Stokes* (RANS). Le principe est de résoudre le champ moyen du problème. Cela fait apparaître des termes supplémentaires dans les équations de Navier-Stokes qu'il est nécessaire de modéliser. Le plus connu d'entre eux est nommé tenseur de Reynolds. La modélisation de ces termes doit essayer de prendre en compte toute la physique de la turbulence, ce qui n'est pas chose facile.

Cependant, le problème majeur de cette méthode est qu'elle résout uniquement la partie stationnaire de l'écoulement. Or l'acoustique est généré par les fluctuations de pression qui ne peuvent pas être calculées par cette méthode. Une méthode intermédiaire entre RANS et DNS est la simulation aux grandes échelles (SGE) ou *Large Eddy Simulation* (LES). Cette méthode consiste à appliquer un filtre spatial/temporel sur les équations de Navier-Stokes. Ainsi les fluctuations trop petites en temps ou en espace pour être simulées sont annihilées car la taille de barre du maillage impose un nombre d'onde de coupure correspondant à un filtre implicite. Il se passe la même chose pour le pas de temps qui impose aussi une fréquence temporelle de coupure implicite correspondant à la discrétisation temporelle. Dans la suite, seul le filtrage spatial est considéré car le filtrage temporel peut être résolu avec la même idée mais avec des modélisations adéquates. L'effet des petites structures doit dès lors être modélisé.

À l'exception de la DNS, toutes ces méthodes consistent à négliger une taille ou une partie du problème qu'il est en fin de compte nécessaire de modéliser pour répondre à la fermeture des équations : appliquer un filtre aux équations de Navier-Stokes génère toujours un terme supplémentaire et pose donc un problème de modélisation qui est intrinsèquement lié au type de filtrage utilisé.

Dans la figure 4.1 sont classifiées les grandes familles de méthodes numériques permettant de simuler les équations de Navier-Stokes.

4.1 Le filtrage et la SGE

4.1.1 La notion de filtre

La notion de filtre est au cœur même de la simulation aux grandes échelles. En effet, le principe consiste à appliquer aux équations de Navier-Stokes un filtre spatial qui ne dénature pas la forme analytique des équations. Comme cela il est possible de conserver la forme fonctionnelle des équations. Ce filtre permet de couper les trop grands nombre d'onde correspondant aux petites structures qu'il n'est pas encore possible de mailler. Il suffit donc d'avoir un maillage adapté à la taille des structures de la coupure *i.e.* un maillage moins dense que celui nécessaire à une DNS. Les petites structures sont détruites par le filtre, c'est pourquoi il est nécessaire de modéliser les



FIGURE 4.1 – Classification des méthodes numériques pour la résolution des équations de Navier-Stokes.

interactions et les effets qu'ont les petites structures détruites sur les grosses structures simulées (voir figure 4.2). Ainsi, la technique de la simulation SGE consiste à trouver le filtre adéquate et modéliser les termes supplémentaires introduits par le filtrage. La modélisation dépend donc du problème physique étudié, de l'écoulement et de la fréquence de coupure imposée par le maillage. Pour plus d'information sur le filtrage et son application en SGE se reporter à Sagaut [128].

4.1.2 Filtres homogènes isotropes

Un filtre est homogène et isotrope s'il est invariant par toute translation ou rotation des axes du repère d'étude. Soit une grandeur $\Phi(\mathbf{x}, t)$ de l'espace et du temps. Il est possible de scinder la fonction Φ en un partie filtrée qui est notée $\Phi^{R}(\mathbf{x}, t)$ représentant les bas nombres d'ondes et sa partie hauts nombres d'onde $\Phi'(\mathbf{x}, t)$ telles que

$$\Phi\left(\underline{\mathbf{x}},t\right) = \Phi^{\mathrm{R}}\left(\underline{\mathbf{x}},t\right) + \Phi'\left(\underline{\mathbf{x}},t\right)$$

Un filtre est toujours défini par son noyau G qui est en fait une relation entre les domaines réel et spectral. Il découle

$$\Phi^{\mathrm{R}}\left(\underline{\mathbf{x}},t\right) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi\left(\underline{\mathbf{y}},\tau\right) \mathrm{G}\left(\underline{\mathbf{x}}-\underline{\mathbf{y}},t-\tau\right) d\tau d^{3}\underline{\mathbf{y}}$$

En effet dans le domaine spectral, si les transformées de Fourier sont notées ^, il vient

$$\widehat{\Phi}(k,f) = \widehat{\Phi}(k,f) \,\widehat{\mathbf{G}}(k,f)$$

Les filtres homogènes isotropes ont les propriétés suivantes

- Si λ est une constante :

$$\lambda^{\mathrm{R}} = \lambda$$



FIGURE 4.2 – Principe intrinsèque à la SGE

- Linéarité :

$$\left[\Phi + \psi\right]^{\mathrm{R}} = \Phi^{\mathrm{R}} + \psi^{\mathrm{R}}$$

- Commutation avec l'opérateur de dérivation :

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\mathbf{x}}}\right]^{\mathrm{R}} = \frac{\partial \Phi^{\mathrm{R}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}}; \quad \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right]^{\mathrm{R}} = \frac{\partial \Phi^{\mathrm{R}}}{\partial t}$$

Attention 1 Cet opérateur n'est pas forcément idempotent comme pourrait l'être la moyenne temporelle, *i.e.*

$$\left[\Phi^{\mathrm{R}}\right]^{\mathrm{R}}(\mathbf{\underline{x}},t) \neq \Phi^{\mathrm{R}}(\mathbf{\underline{x}},t), \quad et \ donc \quad \left[\Phi'\right]^{\mathrm{R}} \neq 0$$

De manière générale, il est intéressant de définir des filtres possédant une coupure spatiale maîtrisable Δ_f comme par exemple le cas du filtre gaussien

$$\mathbf{G}\left(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}\right) = \left(\frac{\gamma}{\pi\Delta_f^2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\gamma \|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}\|^2}{\Delta_f^2}}$$

Cependant dans la pratique les filtres isotropes sont trop restrictifs surtout dans le domaine industriel. En effet pour des maillages anisotropes, la question de la longueur de coupure Δ_f se pose. Cette question est généralement mise de côté en prenant un noyau produit de 3 noyaux dans chaque direction avec comme taille de filtre : $\Delta_f = \sqrt[3]{\Delta_x \Delta_y \Delta_z}$. De plus, le noyau dépend généralement de la variable temporelle. Attention, le filtrage utilisé n'est pas une moyenne temporelle comme peut l'être celui dédié à l'étude des modèles stationnaires RANS. Les champs moyens $\overline{\Phi}$ et les fluctuations Φ^* sont dans tous les cas définis par $\Phi = \overline{\Phi} + \Phi^*$ mais ce ne sont pas ceux là qui sont étudiés en SGE. Toutefois en SGE, le temps est généralement non filtré explicitement ce qui pose un problème plus simple : G (\mathbf{x} , t) = G (\mathbf{x}). Enfin, la notion de filtre homogène et isotrope est souvent incompatible avec les écoulements proche paroi car cette dernière détruit l'isotropie du problème. Dans le but d'optimiser le rapport entre le coût de calcul et la précision de la simulation, il serait intéressant de pouvoir faire varier la longueur de coupure en fonction de la dynamique locale de l'écoulement *i.e.* pouvoir adapter le filtre lors d'anisotropie de l'écoulement. Les problématiques de gestion de paroi sont abordées plus loin dans le document.

4.2 Les équations de la SGE

4.2.1 Le filtrage des équations de Navier-Stokes

Comme présenté précédemment, les équations de la SGE s'obtiennent en filtrant les équations de Navier-Stokes. Soit les équations du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{div} \left(\rho \underline{\mathbf{u}} \right) = 0 \\ \frac{\partial \rho \underline{\mathbf{u}}}{\partial t} + \underline{\mathbf{div}} \left(\rho \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{u}} + p \underline{\mathcal{I}} \right) = \underline{\mathbf{div}} \left(\underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}} \right) \\ \frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \mathbf{div} \left(\left(\rho e_t + p \right) \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{q}^{\mathrm{T}}} \right) = \mathbf{div} \left(\underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}} \cdot \underline{\mathbf{u}} \right) \end{cases}$$

Pour obtenir après filtrage le même type d'équation, un changement de variable appelé moyenne de Favre est utilisé. Il est défini par

$$\widetilde{\Phi} = \frac{[\rho \Phi]^{\mathrm{R}}}{\rho^{\mathrm{R}}}$$

Ainsi, le système d'équation de Navier-Stokes filtré est obtenu, voir annexe C.3 pour la démonstration

$$\begin{pmatrix}
\frac{\partial \rho^{R}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho^{R} \, \underline{\widetilde{\mathbf{u}}}\right) = 0 \\
\frac{\partial \rho^{R} \, \underline{\widetilde{\mathbf{u}}}}{\partial t} + \underline{\operatorname{div}}\left(\rho^{R} \, \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \otimes \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} + p^{R} \, \underline{\underline{\mathcal{I}}} - \widetilde{\mathcal{T}}\right) = \underline{\operatorname{div}}\left(\mathcal{T}^{R} - \widetilde{\mathcal{T}} + \mathbb{T}_{s}\right) \\
\frac{\partial \rho^{R} \, \underline{\widetilde{e}}_{t}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\left(\rho^{R} \, \underline{\widetilde{e}}_{t} + p^{R}\right) \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} + \underline{\widetilde{\mathbf{q}^{T}}} + \underline{\mathbf{Q}} - \widetilde{\mathcal{T}} \underline{\widetilde{\mathbf{u}}}\right) = \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\operatorname{div}}\left(\mathbb{T}_{s}\right) + \rho^{R} \, \underline{\widetilde{e}} + \rho^{R} \, \underline{\widetilde{\pi}} \\
+ \underline{\operatorname{div}}\left(\mathcal{T}^{R} \, \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} - \widetilde{\mathcal{T}} \underline{\widetilde{\mathbf{u}}}\right) \\
- \operatorname{div}\left(\underline{\mathbf{q}^{T}}^{R} - \underline{\widetilde{\mathbf{q}^{T}}}\right)$$

où les quantités suivantes sont définies

$$\begin{split} \mathcal{T}^{\mathrm{R}} &= \left[2\mu \underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}}_{-}\left(\underline{\mathbf{u}}\right) \right]^{\mathrm{R}} \\ \widetilde{\mathcal{T}} &= 2\widetilde{\mu} \underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}}_{-}\left(\underline{\widetilde{\mathbf{u}}}\right) \\ \mathbb{T}_{s} &= \overline{\rho}\underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \otimes \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} - \overline{\rho}\underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \otimes \underline{\mathbf{u}} \\ \\ \underline{\widetilde{\mathbf{q}^{\mathrm{T}}}} &= -\widetilde{\kappa}\underline{\mathbf{grad}}\left(\widetilde{\mathrm{T}}\right) = -\frac{c_{p}\mu\left(\widetilde{\mathrm{T}}\right)}{Pr}\underline{\mathbf{grad}}\left(\widetilde{\mathrm{T}}\right) \\ \\ \underline{\mathbf{q}^{\mathrm{T}}}^{\mathrm{R}} &= -\left[\kappa\underline{\mathbf{grad}}\left(\mathrm{T}\right)\right]^{\mathrm{R}} \\ \rho^{\mathrm{R}} \ddot{\epsilon} &= \left[\mathcal{T}:\underline{\mathbf{grad}}\left(\underline{\mathbf{u}}\right)\right]^{\mathrm{R}} - \mathcal{T}^{\mathrm{R}}:\underline{\mathbf{grad}}\left(\underline{\widetilde{\mathbf{u}}}\right) \\ \rho^{\mathrm{R}} \ddot{\pi} &= p^{\mathrm{R}}\operatorname{\mathbf{div}}\left(\underline{\widetilde{\mathbf{u}}}\right) - \left[p\operatorname{\mathbf{div}}\left(\underline{\mathbf{u}}\right)\right]^{\mathrm{R}} \\ \\ \\ \underline{\mathbf{Q}} &= \frac{\left[p\underline{\mathbf{u}}\right]^{\mathrm{R}} - p^{\mathrm{R}}\underline{\widetilde{\mathbf{u}}}}{\frac{\gamma - 1}{\gamma - 1} + \rho^{\mathrm{R}}\widetilde{e_{c}}} \end{split}$$

 μ est ici la viscosité dynamique. μ est en général pris constant $\mu(T^R) = \mu$ mais il peut aussi suivre la loi de Sutherland définie par

$$\frac{\mu\left(\mathbf{T}^{\mathrm{R}}\right)}{\mu_{0}} \simeq \left(\frac{\mathbf{T}^{\mathrm{R}}}{\mathbf{T}_{0}}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{T}_{0} + \mathbf{T}_{S}}{\mathbf{T}^{\mathrm{R}} + \mathbf{T}_{S}}$$

où μ_0 est la viscosité à T₀, T₀ = 273, 15 K et T_S = 110, 4 K est la température de Sutherland.

4.2.2 Les termes supplémentaires de la SGE

Avant de pouvoir commencer à développer des modèles de fermeture, il est important d'éclaircir le rôle de chacun de ces termes.

Vecteur de corrélation pression vitesse de sous maille

$$\underline{\mathbf{Q}} = \frac{\left[p\underline{\mathbf{u}}\right]^{\mathrm{R}} - p^{\mathrm{R}}\,\underline{\widetilde{\mathbf{u}}}}{\gamma - 1}$$

Ce terme ne peut pas être calculé à partir des échelles résolues à cause de la présence du produit $p\underline{\mathbf{u}}$ filtré. Il est donc nécessaire de le modéliser.

Dissipation turbulente de sous maille

$$\rho^{\mathrm{R}} \ddot{\epsilon} = \left[\mathcal{T} : \underline{\mathbf{grad}} \left(\underline{\mathbf{u}} \right) \right]^{\mathrm{R}} - \mathcal{T}^{\mathrm{R}} : \underline{\mathbf{grad}} \left(\underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \right)$$

Ce terme ne peut pas être calculé à partir des échelles résolues à cause de la présence du double produit contracté \mathcal{T} : **grad** (**u**) filtré. Il est donc nécessaire de le modéliser. Ce terme est en fait le terme de dissipation visqueuse issue de l'équation de bilan sur l'entropie.

Corrélation pression-dilatation de sous maille

$$\rho^{\mathrm{R}} \ddot{\pi} = p^{\mathrm{R}} \operatorname{div} \left(\underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \right) - \left[p \operatorname{div} \left(\underline{\mathbf{u}} \right) \right]^{\mathrm{R}}$$

Ce terme ne peut pas être calculé à partir des échelles résolues à cause de la présence du produit $p \operatorname{div}(\underline{\mathbf{u}})$ filtré. Il est donc nécessaire de le modéliser.

Les termes de différences

$$\begin{cases} \frac{\operatorname{div}\left(\mathcal{T}^{\mathrm{R}}-\widetilde{\mathcal{T}}\right)}{\operatorname{div}\left(\mathcal{T}^{\mathrm{R}}\;\widetilde{\mathbf{u}}-\widetilde{\mathcal{T}}\widetilde{\mathbf{u}}\right)}\\ \frac{\operatorname{div}\left(\mathbf{q}^{\mathrm{T}^{\mathrm{R}}}-\widetilde{\mathbf{q}^{\mathrm{T}}}\right) \end{cases} \end{cases}$$

Ces termes sont liés à la substitution de \mathcal{T}^{R} par $\widetilde{\mathcal{T}}$ et de $\underline{\mathbf{q}^{T}}^{R}$ par $\underline{\widetilde{\mathbf{q}^{T}}}$. Ils sont usuellement négligés.

Tenseur d'échelle de sous maille

$$\mathbb{T}_s = \bar{\rho}\underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \otimes \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} - \bar{\rho}\underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \otimes \underline{\widetilde{\mathbf{u}}}$$

Ce terme est au cœur des modélisations SGE. Il peut se décomposer en plusieurs termes comme le propose Leonard [92]. En effet, il contient les effets des échelles non résolues. Posons $\Phi = \widetilde{\Phi} + \Phi'$. Il vient

$$\mathbb{T}_{s} = \underbrace{\rho^{\mathrm{R}} \ \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \otimes \underline{\widetilde{\mathbf{u}}}_{\mathcal{L}} - \rho^{\mathrm{R}} \ \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \otimes \underline{\widetilde{\mathbf{u}}}_{\mathcal{L}}}_{\mathcal{L}} \underbrace{- \rho^{\mathrm{R}} \ \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \otimes \underline{\mathbf{u}'}_{\mathcal{L}} - \rho^{\mathrm{R}} \ \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \otimes \underline{\mathbf{u}'}_{\mathcal{L}})^{T}}_{\mathcal{C}} \underbrace{- \rho^{\mathrm{R}} \ \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \otimes \underline{\mathbf{u}'}_{\mathcal{R}}}_{\mathcal{R}}$$

Le tenseur \mathcal{L} est appelé le tenseur de Léonard : il traduit le fait que le filtrage n'est pas idempotent. Souvent négligé car petit, il peut être cependant calculé avec les termes résolus. Le tenseur \mathcal{C} est appelé le tenseur des termes croisés : il correspond aux interactions entre les échelles de sous-maille et les échelles résolues. Le tenseur \mathcal{R} est appelé le tenseur de Reynolds : il est associé aux échelles non résolues. Attention bien que ce terme soit appelé de la même manière que le tenseur étudié dans les simulation RANS, il n'en reste pas moins que les types de filtrage utilisés dans chacun des cas sont totalement différents. Il en découle que la définition de ces deux termes de forme analytique identique n'est pas la même.

Ainsi le filtrage des équations de Navier-Stokes fait apparaître les termes suivants qui doivent être modélisés pour pouvoir fermer les équations : C, \mathcal{R} , $\underline{\mathbf{Q}}$, $\rho^{\mathrm{R}} \ddot{\epsilon}$, $\rho^{\mathrm{R}} \ddot{\pi}$. Dans la pratique pour des raisons numériques et de coûts de calcul, il n'est pas possible de modéliser tout ces termes même de façon approximative. En effet, la résolution des termes supplémentaires ne doit pas devenir plus coûteuse que le calcul d'une simulation directe. Ils sont donc tous négligés comme le précise Erlebacher *et al* [33] excepté le terme entièrement de sous maille qu'il faut bien évidement conserver car il est à l'origine des effets manquants du maillage. Cette approche est vérifiée car le tenseur de Reynolds est prépondérant par rapport aux autres termes.

Toute la technique de la SGE est donc en première approximation dans la modélisation du tenseur de Reynolds en l'exprimant en fonction des champs simulés. Les équations de Navier-Stokes filtrées auxquelles cette thèse s'intéresse sont les suivantes

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho^{\mathrm{R}}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho^{\mathrm{R}} \ \underline{\widetilde{\mathbf{u}}}\right) = 0\\ \frac{\partial \rho^{\mathrm{R}} \ \underline{\widetilde{\mathbf{u}}}}{\partial t} + \underline{\operatorname{div}}\left(\rho^{\mathrm{R}} \ \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \otimes \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} + p^{\mathrm{R}} \ \underline{\underline{\mathcal{I}}} - \widetilde{\mathcal{T}}\right) = \underline{\operatorname{div}}\left(\mathbb{T}_{s}\right)\\ \frac{\partial \rho^{\mathrm{R}} \ \underline{\ddot{e}}_{t}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\left(\rho^{\mathrm{R}} \ \underline{\ddot{e}}_{t} + p^{\mathrm{R}}\right) \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} + \underline{\widetilde{\mathbf{qT}}} - \widetilde{\mathcal{T}} \underline{\widetilde{\mathbf{u}}}\right) = \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\operatorname{div}}\left(\mathbb{T}_{s}\right) \end{cases}$$

Il est à noter que la forme de ces équations est identique à celles des problèmes non filtrés avec comme termes supplémentaires $\underline{\operatorname{div}}(\mathbb{T}_s)$ pour l'équation de quantité de mouvement et $\underline{\widetilde{u}} \cdot \underline{\operatorname{div}}(\mathbb{T}_s)$ pour l'équation sur l'énergie.

Finalement pour plus de clarté, le filtrage de Favre est assimilé généralement au filtrage de la SGE. Les équations de la SGE résolues sont en fin de compte

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial \rho^{\mathrm{R}}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho^{\mathrm{R}} \ \underline{\mathbf{u}}^{\mathrm{R}}\right) = 0 \\ \frac{\partial \rho^{\mathrm{R}} \ \underline{\mathbf{u}}^{\mathrm{R}}}{\partial t} + \underline{\operatorname{div}}\left(\rho^{\mathrm{R}} \ \underline{\mathbf{u}}^{\mathrm{R}} \otimes \underline{\mathbf{u}}^{\mathrm{R}} + p^{\mathrm{R}} \ \underline{\mathcal{I}} - \mathcal{T}^{\mathrm{R}}\right) = \underline{\operatorname{div}}\left(\mathbb{T}_{s}\right) \\ \frac{\partial \rho^{\mathrm{R}} \ e_{t}^{\mathrm{R}}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\left(\rho^{\mathrm{R}} \ e_{t}^{\mathrm{R}} + p^{\mathrm{R}}\right) \ \underline{\mathbf{u}}^{\mathrm{R}} + \underline{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}^{\mathrm{R}}} - \mathcal{T}^{\mathrm{R}} \ \underline{\mathbf{u}}^{\mathrm{R}}\right) = \underline{\mathbf{u}}^{\mathrm{R}} \cdot \underline{\operatorname{div}}\left(\mathbb{T}_{s}\right)$$

$$(4.1)$$

Attention, la masse volumique est résolue purement par le filtrage SGE et la vitesse et la température par la moyenne de Favre définie sur le filtrage SGE.

4.2.3 La physique des écoulements turbulents

L'utilisation de la SGE en industrie est dépendante de sa capacité à être flexible et de pouvoir prendre en compte une large gamme d'écoulement. Ainsi, la modélisation des termes supplémentaires requiert une indépendance au type d'écoulement qui est simulé : laminaire, turbulent, proche paroi, anisotrope *etc* ... Il est donc nécessaire de trouver un point commun à tous les écoulements qui permettrait de construire des modélisations universelles.

À haut nombre de Reynolds, l'énergie cinétique de l'écoulement est principalement contenue dans les grandes structures. Ces structures sont spécifiques à chaque écoulements mais sont supposées bien maillées par la SGE : cette physique n'est donc pas dans la de modélisation de la SGE. Ces grosses structures ne dissipent pas l'énergie de l'écoulement mais déterminent l'intensité du transfert d'énergie. Leur énergie est transmise aux petites structures, par exemple lors de leur éclatement. Puis cette énergie est dissipée par viscosité moléculaire. Il existe une zone intermédiaire dans le spectre des nombres d'onde appelée zone inertielle, dans laquelle les structures réalisent ce transfert d'énergie. Cette zone se retrouve toujours dans les écoulements à un nombre de Reynold important et se visualise grâce au spectre d'énergie turbulente. La localisation et la taille de cette zone dépend de nombreux facteurs tels que le nombre de Reynolds, la présence de parois ... Mais sa particularité est que sa forme reste la même, ce qui permet une modélisation universelle de cette zone. Par exemple, plus le Reynolds est grand, plus cette zone est étendue car les effets convectifs non-linéaires dominent alors nettement les effets visqueux.

Cette zone inertielle universelle aux écoulements semble être un candidat de choix pour la modélisation SGE. Ainsi si la coupure du filtre est positionnée dans cette zone, il est possible de modéliser l'effet direct de sous-maille sur le champ résolu car la forme du spectre d'énergie est alors connue. L'influence des échelles non résolues est prise en compte par un modèle de



FIGURE 4.3 – Modélisation des termes SGE.

cascade d'énergie appelée cascade de Kolmogorov. Ces mécanismes de transfert ont été décrits par Richardson en 1926 [126] et formalisés par Kolmogorov en 1941 [84].

Le graphique 4.3 récapitule cette réflexion. Dans la figure de gauche comme il n'existe pas de comportement universel pour les trois types d'écoulements, il n'est pas possible de créer une unique modélisation SGE pour tous. Le comportement de sous-maille n'y est pas connu et il n'est pas possible de savoir où positionner le nombre d'onde de coupure du filtre k_f . C'est aussi le problème lorsque la fréquence de coupure est positionnée en dehors de la zone inertielle. Dans ce cas le comportement universel des écoulements n'est pas connu, empêchant le bon fonctionnement de la SGE. Dans les écoulements réels représentés dans la figure de droite, il existe une zone commune appelée zone inertielle où ils se comportent tous de la même manière. Le terme Z.I.T.P.S désigne la "zone d'influence des très petites structures". Pour les grosses structures de la zone calculée, les écoulements peuvent être différents mais ils restent correctement simulés. Pour les très petites structures de sous mailles de la zone de sous maille très fine, il est possible de supposer que si la coupure est placée assez loin de la fin de la zone de transition, elles n'interagissent plus avec les structures correctement maillées. Ainsi seuls les flux d'énergie de la zone de transition sont à prendre en compte dans la modélisation et ces derniers peuvent être modélisés.

En pratique se pose la question de la localisation de la coupure du filtre. En effet, en fonction du schéma numérique utilisé, cette fréquence théorique varie. De plus, la forme du noyau du filtre influence les résultats de la modélisation. Si le filtre passe-bas idéal existait, cette question ne se poserait pas. Cependant l'utilisation d'un filtre réel qui n'est pas aussi sélectif que le passe-bas idéal, prend en compte les nombres d'onde mal maillés et donc introduit des erreurs de calculs dans la simulation. Le choix d'un filtre le plus raide possible devrait être à favoriser. Par ailleurs, la projection orthogonale n'est pas une solution satisfaisante comme le montre Levasseur [130]. En effet, l'influence ponctuelle des structures à la fréquence de coupure tend à sous-estimer la diffusion réelle. Ainsi il apparait une accumulation d'énergie aux alentours de la fréquence de coupure à cause du fait que le modèle néglige les interactions voisines. La diffusion réelle est en fait déterminer par une plus large fenêtre spectrale selon Kraichnan [86, 87, 88]. Selon ses travaux, 25% de ce flux est déterminer par les fréquences en dehors du segment spectral $[k_m/2, 2k_m]$ pour une turbulence isotrope. Ceci est en fait un problème traditionel pour les approches classiques de le VMS qui utilise un support spectral nul pour construire le modèle. Ce problème est largement traité par Levasseur dans [100].

Il apparait que le choix et la maîtrise de la fréquence de coupure du filtre soient très importants pour être certains de la positionner dans cette zone inertielle. Cependant, les erreurs numériques introduites par ce traitement mathématique sont plus ou moins néfastes sur la simulation. Ces erreurs ont des conséquences diverses allant jusqu'à changer la valeur effective de la fréquence de coupure.

Deux familles de filtrage existent aujourd'hui : les filtres implicites et les filtres explicites. L'exemple le plus classique pour le filtrage implicite est celui du maillage. En effet, ce dernier filtre les équations résolues au niveau de la taille de barre Δ_m mais aussi en fonction des méthodes de simulations et hypothèses numériques considérées. C'est un filtrage implicite car il est très difficile de maîtriser la pente et la coupure de ce filtre et qu'il est présent par le fait même de résoudre numériquement le problème. Le filtrage explicite consiste quant à lui à introduire explicitement les caractéristiques de filtrage. En terme de nombre d'onde, il agit généralement avant le filtrage implicite du maillage. Ainsi le filtre numérique explicite est toujours une application en série de deux filtres : le filtre choisi et le filtrage du maillage. Si le filtre explicite filtre la zone mal maillée, il est possible que l'erreur numérique résultante devienne plus grande que la valeur des termes modélisés, voir Kravchenko et Moin [89]. Lund [106] insiste bien sur l'utilisation du filtrage explicite en SGE afin de contrôler l'erreur numérique.

Comme le montre les travaux de Ghosal [50] et Chow & Moin [21], la maîtrise du filtrage est fortement liée aux schémas numériques utilisés. Stephano et Vasilyev [141] montrent aussi que la forme du filtre est évidement un point important dans la modélisation des termes supplémentaires. D'ailleurs Domaradski et Adams [31] sont parvenus à écrire le tenseur de sous-maille \mathcal{R} en distinguant explicitement les échelles bien résolues et celles impactées par le filtrage. Ce dernier terme s'annule si le filtre est un passe bas idéal ce qui reste très difficile à obtenir dans le cas de simulations industrielles classiques.

L'approche de la modélisation et du filtrage en SGE peut être interprétée de manière plus numérique et terre à terre. En effet, seules les échelles possédant la majorité de l'énergie du fluide sont dimensionnantes pour la détermination de l'écoulement. Or celles-ci sont supposées correctement maillées. Cependant, les hauts nombres d'ondes mal résolus ont une influence sur les nombres d'onde précédents dans la cascade. Ils introduisent donc des erreurs numériques. La diffusion du modèle de sous-maille peut être utilisée pour détruire les hauts nombres d'onde mal maillés afin qu'ils n'aient plus d'influence sur la simulation correctement résolue.

4.3 Modélisation de sous-maille

La modélisation des termes de sous-maille consiste à exprimer les non-linéarités en fonction des échelles résolues. De très nombreuses approches existent aujourd'hui et le lecteur est invité à se référer à Sagaut [128] pour de plus amples informations. Il existe deux grandes familles de modélisation. Tout d'abord, l'approche structurelle consiste à estimer le tenseur \mathbb{T}_s à partir du champ résolu. Puis l'approche fonctionnelle cherche à modéliser directement l'action des échelles de sous-maille sans passer par l'évaluation de \mathbb{T}_s . Seules les méthodes structurelles sont abordées dans cette thèse. L'approche VMS est développée plus loin mais les idées physiques qui suivent permettent de mieux comprendre sa modélisation.

4.3.1 Les hypothèses

Comme expliqué dans la partie précédente, la zone inertielle présente un transfert d'énergie universel permettant une modélisation des écoulements turbulents. Les modèles suivants se basent sur cette idée en essayant de modéliser ce flux transmettant l'énergie vers les hauts nombres d'onde. Cependant, de nombreuses hypothèses sont faites qui ont été infirmées par des expériences et des simulations numériques directes mais qui sont cependant acceptables au premier ordre.

Tout d'abord il est important de considérer une turbulence en équilibre, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune création ou destruction globales d'énergie et que ce transfert est assuré uniquement par la cascade. Cette hypothèse sera à modifier lors de réactions chimiques ou de systèmes plus complexes comme précisé au premier chapitre de cette thèse. L'hypothèse d'équilibre de la cascade est remise en question par la méthode VMS. Cette hypothèse revient à considérer qu'il existe une corrélation parfaite entre le tenseur des contraintes de sous-maille et le tenseur des taux de déformations ce qui donne naissance à des modèles de viscosité turbulente. Ces modèles sont issus de la généralisation de l'hypothèse de Boussinesq, présentée par exemple dans Bailly et Comte-Bellot [4], et qui relie le tenseur de sous-maille aux gradients de la vitesse filtrée à l'aide d'une viscosité turbulente ν_t . Une relation entre les échelles résolues et les effets des échelles de sous-maille est alors construite

$$\mathbb{T}_{s} = 2\mu_{t} \left[\underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}}\right]^{\mathrm{R}} - \frac{2}{3} \rho^{\mathrm{R}} k_{sgs}\underline{\mathcal{I}}$$

où $[\underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}}]^{\mathrm{R}} = \underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}}(\underline{\mathbf{u}}^{\mathrm{R}})$. En pratique l'énergie cinétique de sous-maille k_{sgs} pourrait faire l'objet d'une modélisation [79, 98] mais les modèles l'intègrent souvent dans le terme de pression car elle représente la partie de trace non nulle du modèle. Cette partie est importante car elle assure que le tenseur modélisé soit de trace non nulle. Ce terme peut être aussi modélisé ou négligé bien que dans certains cas sa valeur peut devenir importante.

$$\mathbb{T}_{s} = 2\mu_{t}\underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}}\left(\underline{\mathbf{u}}^{\mathrm{R}}\right) = 2\mu_{t}\underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}}$$

Il reste donc une équation dans le but de fermer le système de Navier-Stokes filtré : une modélisation de μ_t . De nombreux modèles ont été développés afin de modéliser la viscosité turbulente. De manière générale, ces modèles se basent sur une estimation spectrale des structures présentes dans l'écoulement. Les modèles structuraux répondant à cette modélisation visent à rajouter un scalaire *i.e.* à augmenter la viscosité de l'écoulement $\nu_t + \nu$ afin de modéliser l'effet des structures manquantes. L'un des principaux problèmes de telles modélisations apparait alors : il impose la colinéarité du tenseur des contraintes turbulentes avec le tenseur des déformations, ou plus directement le tenseur de diffusion des équations de Navier-Stokes. Ainsi donc le support et la direction d'application de la diffusion sont les même que ceux des échelles résolues menant à la sur-diffusion de grandes échelles de notre écoulement sans distinguer les vraies directions des structures de sous-maille. Le tenseur de sous-maille est donc instantanément lié aux gradients des fluctuations et surtout du champ moyen. Ceci impose une hypothèse forte sur la simulation qui implique que l'écoulement soit mal résolu et turbulent en chaque points de l'espace et du temps sauf s'il n'y a pas de gradient à cet endroit, ce qui est très rare en réalité. Ces modèles sont par nature inadaptés à des écoulements plus complexes mélangeants différentes caractéristiques.

4.3.2 Le modèle de Smagorinsky

En 1963, Smagorinsky [137] propose un des premiers modèles qui deviendra une référence pour modéliser la valeur de la viscosité turbulente.

$$\nu_t = \left(C_S \Delta_m\right)^2 \sqrt{2\underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}}} : \underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}}$$
(4.2)

où Δ_m représente la taille de coupure du maillage. Le calcul de cette longueur est soumise à plusieurs définitions discutées plus loin.

Cette modélisation signifie que l'intensité du flux diffusif modélisé est proportionnelle à la déformation des particules. À remarquer que cette formulation impose $\nu_t \geq 0$ ce qui crée un modèle purement diffusif. La valeur de la constante de Smagorinsky C_S est prise égale à 0,18 pour une turbulence homogène et isotrope et peut être retrouvée par l'analyse de Lilly [102]. Cependant, dans de nombreux calculs la valeur de C_S est prise plutôt de l'ordre de 0, 1 traduisant un effet sur-dissipatif du modèle. Cette nouvelle constante est estimée grâce à la valeur du modèle dynamique présenté ci-dessous où C_S dépend de l'espace et du temps et prend une valeur aux alentours de 0,09 $\leq C_S \leq 0,12$ pour des écoulements à bas nombre de Reynolds. Pour plus d'informations se reporter à Moin *et al.* [113].

En analysant la forme fonctionnelle de ce modèle, il apparait que ce dernier peut être trop dissipatif en pratique. En effet il s'active dès la présence de gradients dans l'écoulement, gradients moyens en particulier, c'est-à-dire y compris dans des zones bien maillées où la viscosité du modèle devrait être nulle. De plus le filtrage est ici implicite, ce qui rend l'utilisateur de ce modèle tributaire des erreurs dues au filtrage par le maillage. Toutefois ce modèle est très pratique dans son implémentation et donne des résultats raisonnables dans un bon nombre de cas lorsque des ordres de grandeurs sont recherchés. Cependant, les écoulements complexes étudiés aujourd'hui mettent en défaut ce type de modélisation en particulier au début des zones de cisaillement.

Certaines modifications peuvent être apportées à la forme fonctionnelle du modèle de Smagorinsky. Typiquement, il est possible de remplacer la norme du tenseur des déformations par le tenseur antisymétrique $\underline{\Omega}$ comme le propose Mansour *et al* [110]. Cette approche est toutefois valide et équivalente uniquement dans le cas d'une hypothèse de turbulence homogène isotrope et d'un écoulement incompressible, voir Deck [26]. Cette hypothèse ne se rencontre que rarement dans un écoulement réel. Par exemple, cette forme de modèle de sous-maille est généralement obtenue lors de la dégénérescence des modèles URANS loin de la paroi dans les simulations DES. C'est le cas du modèle DES de Spalart [140] qui est utilisé plus loin. Par ailleurs pour des écoulements compressibles, la forme introduisant le déviateur de <u>S</u> doit être considérée afin d'ajouter les effets de compressibilité de la modélisation de sous-mailles.

4.3.3 Le modèle de Smagorinsky avec critère de sélectivité

Le modèle de Smagorinsky classique souffre majoritairement d'une sur-dissipation car il s'active dans des zones de faibles gradients bien maillés venant du fait de sa colinéarité avec le tenseur des déformations. Pour résoudre ce problème, il suffit d'ajouter une fonction Heaviside à la formule de la viscosité turbulente qui s'active à partir d'un coefficient dépendant de la vorticité locale. En effet plus la vorticité est importante, plus il est probable que les structures soient fines et dynamiques. Lessieur et Métais [98] proposent ce type de senseur structurel et David [25] propose de le construire en comparant la vorticité instantanée \underline{w} en un point avec la vorticité moyenne \overline{w} autour de ce point. La fonction Heaviside en question est définie par

$$\begin{cases} H(\underline{\mathbf{x}},t) = \begin{cases} 1 \text{ si } \alpha \ge \alpha_0\\ 0\\ \alpha(\underline{\mathbf{x}},t) = & \arcsin\left[\frac{\|\underline{\mathbf{w}}(\underline{\mathbf{x}},t) \land \overline{\underline{\mathbf{w}}}(\underline{\mathbf{x}},t)\|}{\|\underline{\mathbf{w}}(\underline{\mathbf{x}},t)\|\|\overline{\underline{\mathbf{w}}}(\underline{\mathbf{x}},t)\|}\right] \end{cases}$$

où \wedge est le produit vectoriel de deux vecteurs. À partir de simulations numériques directes de turbulences isotropes, David détermine comme valeur seuil $\alpha_0 = 20^\circ$. Appliqué au modèle de Smagorinsky cela donne

$$\nu_t(\mathbf{\underline{x}}, t) = H(\mathbf{\underline{x}}, t) \left(C_S \Delta_m \right)^2 \sqrt{2 \mathbf{\underline{S}}^{\mathrm{D}}} : \mathbf{\underline{S}}^{\mathrm{D}}$$
(4.3)

Il est à noter que s'il n'y a pas de vorticité moyenne, le critère de sélectivité n'est jamais activé. Le modèle est donc un pur Smagorinsky.

Ce modèle permet d'introduire une idée très intéressante qui est l'adaptation du modèle de Smagorinsky à l'écoulement. Même si le modèle reste colinéaire aux tenseurs des déformations et que seule la viscosité turbulente est modifiée, il est possible d'éteindre les effets du modèle dans les zones dominées par les gradients du champs moyen comme dans le début des couches de cisaillement. Il s'agit de zones où il n'y a pas ou peu d'instationnarités calculées. Toutefois, un moyen de mettre en défaut le modèle est de libérer un anneau de vorticité convecté dans un écoulement laminaire. Même si la structure est correctement simulée, le critère de sélectivité applique une sur-diffusion à la perturbation car il l'interprète à tord comme une structure de sous-maille. Ce défaut est corrigé avec le modèle développé dans cette thèse comme il est montré plus loin dans l'étude des tourbillons de Taylor-Green. Le modèle de Smagorinsky sélectif se base
sur la vorticité qui est un indicateur d'ordre 0 vis-à-vis de ν_t , permettant de filtrer l'écoulement et d'annuler le modèle dans les zones filtrées qui sont les zones de champ moyen. Toutefois, en comparant uniquement le champ moyen avec le champ instantané, ce modèle échoue à détecter les structures instationnaires mal résolues afin d'appliquer correctement et au bon endroit le flux diffusif modélisé.

4.3.4 Le modèle de Smagorinsky dynamique

L'approche du modèle de Smagorinsky dynamique a le même but que celui du Smagorinsky sélectif : adapter ν_t à l'écoulement afin qu'il détecte plus précisément les échelles de sous mailles. Cependant, son approche ne se base plus sur des grandeurs physiques de l'écoulement. Il utilise un deuxième niveaux de filtrage $\widehat{}$ en plus du filtrage implicite du maillage. Pour cela une extension de la décomposition de Leonard est utilisée : l'identité de Germano [49].

$$\mathcal{L} = \mathbb{F} - \widetilde{\mathbb{T}}_{\mathcal{L}}$$

où \mathcal{L} est le tenseur de Leonard basé sur une autre filtrage que le filtrage implicite. \mathbb{T}_s et \mathbb{F} représentent respectivement les tenseurs de sous mailles du premier et deuxième niveau de filtrage. De manière classique, il est possible d'associer le premier niveau de filtrage au filtrage implicite du maillage. Le modèle de Smagorinsky est appliqué à chaque niveaux menant à la modélisation suivante

$$\begin{cases} \mathbb{T}_{s} = \underline{\mathbf{u}}^{\mathrm{R}} \otimes \underline{\mathbf{u}}^{\mathrm{R}} - [\underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{u}}]^{\mathrm{R}} = \mathcal{L} + \mathcal{C} + \mathcal{R} \\ = 2C_{d}\Delta^{2} \| [\underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}}]^{\mathrm{R}} \| [\underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}}]^{\mathrm{R}} = C_{d}\underline{\mathbf{d}} \\ \mathbb{F} = \underline{\widehat{\mathbf{u}}^{\mathrm{R}}} \otimes \underline{\widehat{\mathbf{u}}^{\mathrm{R}}} - [\underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{u}}]^{\mathrm{R}} \\ = 2C_{d}\widehat{\Delta^{2}} \| [\underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}}]^{\mathrm{R}} \| [\underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}}]^{\mathrm{R}} = C_{d}\underline{\mathbf{D}} \end{cases}$$

où Δ est une longueur caractéristique du filtrage. Ces expressions sont réinjectées dans l'identité de Germano afin de trouver

$$\mathcal{L} = C_d \underline{\underline{\mathbf{D}}} - C_d \underline{\underline{\mathbf{d}}} \\ \simeq C_d \left(\underline{\underline{\mathbf{D}}} - \underline{\widehat{\underline{\mathbf{d}}}} \right)$$

ce qui revient à considérer que le coefficient C_d est constant sur un domaine de l'ordre de grandeur du filtrage $\widehat{\Delta}$.

La solution donnant C_d est déterminée en minimisant l'erreur commise sur l'équation. Cette simple détermination amène à considérer 9 coefficients dont 6 sont indépendants. Afin de n'obtenir qu'une solution et d'écarter les problèmes d'indétermination, une régression moindres-carrées est proposée par Lilly [101] permettant de simplifier le problème

$$C_{d} = \frac{\left[\mathcal{L}\right]_{ij} \left[\underline{\mathbf{D}} - \underline{\widehat{\mathbf{d}}}\right]_{ij}}{\left[\underline{\mathbf{D}} - \underline{\widehat{\mathbf{d}}}\right]_{kl}^{2}}$$

Cette formulation est intéressante car elle permet d'obtenir des valeurs négatives pour ce coefficient pouvant être interprétées comme l'effet d'un *backscattering* qui est le transfert inverse d'énergie, des petites structures vers les grandes [96, 97]. Cependant l'ajout numérique d'énergie mais aussi certaines indéterminations du coefficient à cause du dénominateur, rend le calcul trop instable pour être considéré dans une utilisation industrielle robuste. De nouveaux modèles visent à améliorer l'estimation de la procédure dynamique afin de la rendre plus stable comme par exemple des saturations des valeurs négatives, des corrections des valeurs non définies ou encore des moyennes aux nœuds proches. Voir Zang *et al* [160] pour plus d'information. Il est aussi possible d'améliorer la modélisation des échelles de filtrage et leur convergence en proche paroi, voir Nicoud [116]. Le problème majeur de ce modèle réside dans la forme fonctionnelle en Laplacien, propre au terme diffusif des équations de Navier-Stokes et qui est conservé dans tous les modèles structuraux présentés. De part cette forme fonctionnelle, les modèles appliquent une diffusion sur toutes les échelles et détruisent donc les structures correctement maillées. Ces larges structures possèdent la majorité de l'énergie de l'écoulement et sont donc responsables de l'initialisation et de la quantification de la cascade et du transfert d'énergie. Si une partie de ces structures sont détruites par la diffusion du modèle, alors la cascade et la répartition de l'énergie vers les petites structures *i.e.* les spectres, sont alors dénaturés.

Il est aussi possible de constater cette remarque mathématiquement. Les différents modèles structuraux visant à modéliser uniquement la viscosité turbulente, ont l'avantage de présenter une simplification mathématique des équations. Cette simplification permet de montrer aussi leur faiblesse. En effet, par la modification unique de ν_t , le modèle est linéaire selon les variables du problème. Ainsi le terme de diffusion de Navier-Stokes peut être fusionné avec celui du modèle pour créer un terme de diffusion total.

$$\underbrace{\underline{\operatorname{div}}\left(\widetilde{\mathcal{T}}\right)}_{Navier-Stokes} + \underbrace{\underline{\operatorname{div}}\left(\mathbb{T}_{s}\right)}_{Modélisation} = \underline{\operatorname{div}}\left(\widetilde{\mathcal{T}} + \mathbb{T}_{s}\right)$$
$$= \underline{\operatorname{div}}\left(2\mu \left[\underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}}\right]^{\mathrm{R}} + 2\mu_{t} \left[\underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}}\right]^{\mathrm{R}}\right)$$
$$= \underline{\operatorname{div}}\left(2(\mu + \mu_{t}) \left[\underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}}\right]^{\mathrm{R}}\right)$$
$$= \underline{\operatorname{div}}\left(\widetilde{\mathcal{T}}\left[\mu + \mu_{t}\right]\right)$$

Cette formulation montre que conserver finalement la forme fonctionnelle des équations de Navier-Stokes et modifier uniquement l'intensité de la diffusion par l'intermédiaire de la viscosité turbulente, ne réalise pas exactement l'effet souhaité pour la modélisation. L'écoulement finalement simulé n'a pas les mêmes propriétés que celui souhaité car la viscosité équivalente est en fait augmentée localement de la viscosité turbulente. Ainsi, il est clair maintenant que l'ensemble des structures sont impactées par le flux diffusif modélisé, expliquant par exemple le retard qu'il est possible d'apercevoir dans le développement des couches de cisaillement. Ceci montre clairement que ce type d'approche peut pêcher en précision de restitution des phénomènes de l'écoulement par une modification des propriétés intrinsèques de ce dernier.

4.4 Le modèle VMS

4.4.1 Introduction

Les modèles de sous-mailles classiques sont généralement soit trop dissipatifs, soit difficiles à stabiliser. D'autres méthodes permettent de modéliser ou de calculer les échelles manquantes de la SGE. Il est par ailleurs possible d'utiliser des méthodes spectrales permettant d'avoir une meilleure utilisation des échelles de l'écoulement. Cependant dans les modèles basés sur l'espace physique cherchant à améliorer le modèle de Smagorinsky, ceux-ci réduisent ou adaptent uniquement l'intensité du flux diffusif incarné par ν_t sans s'attaquer à la colinéarité du flux avec le tenseur des déformations. De manière générale, ces améliorations se basent sur des filtrages physiques comme le critère sélectif ou mathématiques comme le processus dynamique, permettant d'activer et de calculer plus intelligemment l'intensité du flux diffusif. Toutefois, le support spectral et la direction du modèle incarnés par la colinéarité avec \underline{S}^{D} restent inchanger. Ce type d'approche ne permet pas d'introduire un filtrage vraiment explicite sur la solution qui permettrait d'évacuer les hauts nombres d'onde mal résolus afin d'éviter leur interaction avec les échelles correctement calculées. Un manière différente de voir les choses est que ce flux diffusif s'applique sur l'ensemble des échelles résolues. Le transfert d'énergie physique de la cascade est donc faussé, car un sur-flux non nécessaire est appliqué à ces échelles par l'intermédiaire

de l'opérateur $\underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}}(\underline{\mathbf{u}}^{\mathrm{R}})$. Comment est-il possible de calculer les flux modélisés sur un support spectral réduit?

L'idée intrinsèque aux modèles variationnels multi-échelles ou Variational Multi-Scale (VMS) est de diminuer le support spectral du modèle pour que le flux diffusif ne s'applique qu'aux échelles résolues proches de la coupure dans la cascade de Kolmogorov. Pour cela le champs résolu est séparé en un certain nombre de supports spectraux. En effet, les interactions ne se font physiquement que d'échelle en échelle de manière récurrente présentant ainsi un découpage naturel de l'espace des nombres d'onde : les petites échelles n'influent pas directement sur les grosses échelles trop éloignées spectralement. De plus, celles-ci sont maillées de manière à être bien calculées. Il serait néfaste de rajouter un flux diffusif à toutes les échelles sous peine de mal résoudre les transferts d'énergie. Hughes *et al* [71, 72] proposent au lieu de modifier la constante du modèle de Smagorinsky de réduire le support en rendant plus locales les interactions triadiques.

La VMS repose sur trois principes. Tout d'abord une reconstruction partielle des effets des petites échelles de sous-maille permettant de sélectionner la partie haut nombres d'onde de l'écoulement. Deuxièmement une projection variationnelle *a priori* préférée à une opération de filtrage pour séparer les grandes échelles des petites échelles résolues, permet d'introduire un contrôle sur la fréquence de coupure. Enfin les grandes échelles résolues et les échelles de sous-mailles sont supposées suffisamment distantes de sorte qu'elles n'interagissent pas entre elles. En pratique, les échelles reconstruites correspondent aux plus petites tailles du maillage.

Ainsi dans un calcul VMS, une partie de l'information des plus petites échelles calculées est utilisée pour reconstruire *a priori* une partie des échelles non-résolues ou du moins leur influence à travers la modélisation du tenseur de sous maille. Lors du calcul éléments finis, que se passet-il formellement? La solution continue est projetée sur l'espace des fonctions d'interpolation de dimension finie \mathcal{V} égale à la dimension de l'espace des fonctions de pondération. Cette méthode implique forcément une perte d'information car seule une infinité de fonctions polynômiales peut approcher une fonction continue quelconque. Cette perte d'information impacte directement les plus petites échelles. Ainsi, reconstruire une partie des échelles de sous-mailles se traduit par

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}^{\mathrm{R}} \otimes \mathcal{V}'$$

où \mathcal{V} est l'ensemble classique des éléments finis. Comme \mathcal{V}' reste de dimension finie, il ne permet pas de capter toutes les échelles de l'écoulement. Un terme supplémentaire de modélisation est quand même requis. En revanche, les grandes échelles et les échelles de sous-mailles sont supposées suffisamment éloignées pour que le champ à grandes échelles puisse être calculé grâce à l'information contenue dans les petites échelles résolues.

Définissons les nombres d'ondes de coupure k_m et k_f correspondant respectivement à la coupure entre échelles résolues et échelles non résolues et à la coupure entre grandes et petites échelles résolues. Les tailles de maillages Δ_m longueur caractéristique de la taille de maille et Δ_f longueur caractéristique de coupure du filtre sont associées respectivement aux nombres d'onde k_m et k_f tels que $k \sim \pi/\Delta$. Enfin $\underline{\mathbf{U}}^{\mathrm{R}}$ représente le champ total résolu, décomposé en $\underline{\mathring{\mathbf{U}}}$ et $\underline{\mathbf{U}}''$, respectivement les bas et hauts nombres d'onde du champ résolu. La figure 4.4 présente ce concept.

Les vecteurs associés aux variables conservatives vérifient les relations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{U}}^{\mathrm{R}} + \underline{\mathbf{U}}' \\ \underline{\mathbf{U}}^{\mathrm{R}} = \underline{\mathring{\mathbf{U}}} + \underline{\mathbf{U}}'' \end{array} \right.$$

A posteriori une opération de filtrage numérique est préférée à une projection variationnel pour éviter les critiques adressées généralement aux méthodes VMS : les supports spectraux nuls.



FIGURE 4.4 – Méthodologie de la VMS : à gauche une approche SGE classique, sur la droite la séparation des échelles résolues. k_m est le nombre d'onde de coupure du maillage et k_f est le nombre d'onde de coupure du filtrage.

4.4.2 Approche filtrée par les variables entropiques

L'idée du filtrage en variables entropiques se base sur celle issue des variables conservatives. Comme le changement de variable n'est pas linéaire, appliquer le filtre avant ou après n'est absolument pas équivalent. Ces deux approches n'amènent pas à résoudre le même système linéaire bien que la solution soit sensée rester identique. L'approche consistant à filtrer d'abord puis faire le changement de variable sur les inconnues filtrées est préférée. En effet, elle conserve la même forme pour les équations SGE en variables entropiques qu'en variables conservatives. En particulier, les termes ajoutés sont identiques.

Les équations de Navier-Stokes filtrées (4.1) ont la particularité de conserver la forme analytique du problème non filtré déjà traité. En effet, la variable conservative filtrée par le premier niveau de filtrage est définie par

$$\underline{\mathbf{U}}^{\rm R} = \rho^{\rm R} \begin{pmatrix} 1 \\ u^{\rm R}{}_1 \\ u^{\rm R}{}_2 \\ u^{\rm R}{}_3 \\ e^{\rm R}_t \end{pmatrix}$$

Il est possible d'exprimer le problème de Navier-Stokes filtré en variables conservatives de manière non développée et matricielle sous la forme suivante

$$\underbrace{\mathbf{U}_{,t}^{\mathrm{R}} + \left(\underline{\mathbf{A}}_{i} \underline{\mathbf{U}}_{,i}\right)^{\mathrm{R}}}_{\mathbf{C},t} = \left(\underline{\mathbf{K}}_{ij} \underline{\mathbf{U}}_{,j}\right)_{,i}^{\mathrm{R}} - \underbrace{\left(\underline{\mathbf{M}}_{i} \underline{\mathbf{U}}_{,i}\right)^{\mathrm{R}} - \underline{\mathbf{A}}_{i}^{\mathrm{R}} \underline{\mathbf{U}}_{,i}^{\mathrm{R}}\right) + \left(\left(\underline{\mathbf{K}}_{ij} \underline{\mathbf{U}}_{,j}\right)^{\mathrm{R}} - \underline{\mathbf{K}}_{ij}^{\mathrm{R}} \underline{\mathbf{U}}_{,j}^{\mathrm{R}}\right)_{,i}}_{\mathrm{Termes de sous mailles}}$$

Les matrices $\underline{\mathbf{A}}_{i}^{\mathrm{R}}$ et $\underline{\mathbf{K}}_{ij}^{\mathrm{R}}$ ont les mêmes expressions que leurs analogues mais avec les variables filtrées. Le terme de sous maille correspond aux termes supplémentaires qui apparaissent dans les équations.

Le changement de variable entropique est appliqué afin d'obtenir les équations de la SGE en variables entropiques

$$\widehat{\underline{\mathbf{V}}}^{T} = \frac{\partial \mathcal{H}\left(\underline{\mathbf{U}}^{\mathrm{R}}\right)}{\partial \underline{\mathbf{U}}^{\mathrm{R}}}$$

La nouvelle variable devient

$$\widehat{\underline{\mathbf{V}}} = \frac{1}{\mathbf{T}^{\mathbf{R}}} \begin{pmatrix} h^{\mathbf{R}} - \mathbf{T}^{\mathbf{R}} s^{\mathbf{R}} - e_{c}^{\mathbf{R}} \\ u^{\mathbf{R}}{}_{1} \\ u^{\mathbf{R}}{}_{2} \\ u^{\mathbf{R}}{}_{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

En redéfinissant les mêmes matrices que dans le cas non filtré, il vient

$$\underline{\underline{\underline{A}}}_{0}^{R} = \underline{\underline{U}}_{,\underline{\underline{V}}}^{R} \\
 \underline{\underline{\underline{A}}}_{i}^{R} = \underline{\underline{A}}_{i}^{R} \underline{\underline{\underline{A}}}_{0} \\
 \underline{\underline{\underline{K}}}_{ij}^{R} = \underline{\underline{\underline{K}}}_{ij}^{R} \underline{\underline{\underline{A}}}_{0}$$

où les notations des matrices entropiques filtrées ont été simplifiées en enlevant $\tilde{}$. Ainsi le problème matriciel en variables entropiques filtrées devient

$$\underline{\widehat{\mathbf{A}}_{0}}\widehat{\mathbf{V}_{,t}} + \underline{\widehat{\mathbf{A}}_{i}}\widehat{\mathbf{V}_{,i}} = \left(\underline{\widehat{\mathbf{K}}_{ij}}\widehat{\mathbf{V}}_{,j}\right)_{,i} - \underbrace{\left(\left(\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{i}\mathbf{V}_{,i}\right)^{\mathrm{R}} - \underline{\widehat{\mathbf{A}}_{i}}\widehat{\mathbf{V}}_{,i}\right) + \left(\left(\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij}\mathbf{V}_{,j}\right)^{\mathrm{R}} - \underline{\widehat{\mathbf{K}}_{ij}}\widehat{\mathbf{V}}_{,j}\right)_{,i}}_{\text{Termes de sous mailles}}$$

Les termes de sous mailles sont l'expression des termes ajoutés dans les équations de Navier-Stokes mais en variables entropiques.

Attention 2 Il faut noter que $\widehat{\underline{\mathbf{V}}}$ n'est pas la partie grandes échelles de $\underline{\mathbf{V}}$ à cause du choix de l'ordre du filtrage par rapport au changement de variable entropique. En effet

$$\underline{\widehat{\mathbf{V}}}^{T} = \frac{\partial \mathcal{H}\left(\underline{\mathbf{U}}^{\mathrm{R}}\right)}{\partial \underline{\mathbf{U}}^{\mathrm{R}}} \neq \underline{\mathbf{V}}^{\mathrm{R}\,T} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}\left(\underline{\mathbf{U}}\right)}{\partial \underline{\mathbf{U}}}\right)^{\mathrm{R}}$$

Pour plus de simplicité, les mêmes notations que les variables conservatives sont dès lors utilisées pour les variables entropiques même si leur signification ne sont pas identiques.

$$\underline{\widehat{\mathbf{V}}} \rightarrow \underline{\mathbf{V}}^{\mathrm{R}}$$

4.5 Formulation matricielle entropique de la VMS

L'approche de la VMS consiste maintenant à savoir comment décomposer le champ résolu pour utiliser à chaque fois seulement les bonnes contributions. D'une part les grandes échelles et d'autre part les petites échelles résolues influencées par les échelles de sous-mailles *i.e.* calculer $\underline{\mathring{V}}$ et \underline{V}'' . Le problème est que cette approche s'avèrerait coûteuse car elle reviendrait à résoudre 2 systèmes linéaires séparément. Une approche filtrée permet de réduire le problème au calcul de la solution unique de \underline{V}^{R} au lieu des deux systèmes d'équation sur $\underline{\mathring{V}}$ et \underline{V}'' . Vreman [154] détaille cette approche dans le cas incompressible que Levasseur [99] généralise aux écoulements compressibles en variables entropiques. En effet, considérer que chacune des échelles résolues sont en relation avec une expression analytique d'un filtre, revient à résoudre une seule équation sans augmenter le nombre de degrés de liberté du problème. D'autres problèmes sont à prévoir dans la suite sur le choix du filtre.

4.5.1 Équation du champ total résolu

Soit le champ total résolu qui n'est en fait que l'ancien champ calculé de la SGE classique. Ainsi il est possible d'appliquer la formulation de la SGE sur ce champ

$$\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{0}^{\mathrm{R}} \mathbf{\underline{V}}_{,t}^{\mathrm{R}} + \underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{i}^{\mathrm{R}} \mathbf{\underline{V}}_{,i}^{\mathrm{R}} = \left(\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij}^{\mathrm{R}} \mathbf{\underline{V}}_{,j}^{\mathrm{R}} \right)_{,i} - \left(\left[\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{i} i \underline{\mathbf{V}}_{,i} \right]^{\mathrm{R}} - \underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{i}^{\mathrm{R}} \mathbf{\underline{V}}_{,i}^{\mathrm{R}} \right) \\ + \left(\left[\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij} \underline{\mathbf{V}}_{,j} \right]^{\mathrm{R}} - \underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij}^{\mathrm{R}} \mathbf{\underline{V}}_{,j}^{\mathrm{R}} \right)_{,i} \right)$$

où $\mathbb{T}_s^{\mathrm{R}} = -([\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_i \underline{\mathbf{V}}_{,i}]^{\mathrm{R}} + \underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_i^{\mathrm{R}} \underline{\mathbf{V}}_{,i}^{\mathrm{R}}) - ([\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij} \underline{\mathbf{V}}_{,j}]^{\mathrm{R}} - \underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij}^{\mathrm{R}} \underline{\mathbf{V}}_{,j}^{\mathrm{R}})_{,i}$ est le terme de sous-maille de la SGE classique correspondant au niveau de filtrage du maillage. Un filtrage SGE est ensuite appliqué pour les grandes échelles résolues

$$\underline{\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}}_{0}^{\circ}\underline{\mathbf{\widetilde{V}}}_{,t} + \underline{\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}}_{i}^{\circ}\underline{\mathbf{\widetilde{V}}}_{,i} = \left(\underline{\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}}_{ij}^{\circ}\underline{\mathbf{\widetilde{V}}}_{,j}\right)_{,i} - \left(\left[\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{i}^{\circ}\underline{\mathbf{\widetilde{V}}}_{,i}\right] - \underline{\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}}_{i}^{\circ}\underline{\mathbf{\widetilde{V}}}_{,i}\right) + \left(\left[\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij}^{\circ}\underline{\mathbf{\widetilde{V}}}_{,j}\right] - \underline{\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}}_{ij}^{\circ}\underline{\mathbf{\widetilde{V}}}_{,j}\right)_{,i}$$

Les termes de sous-mailles de l'équation sur les grandes échelles peuvent être divisés en deux contributions : l'une des petites échelles résolues, l'autre des échelles non maillées.

$$\overset{\circ}{\mathcal{C}}_{1}\left(\underbrace{\overset{\circ}{\mathbf{V}}}, \underbrace{\mathbf{V}}^{\mathrm{R}}\right) = \left(\left[\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{i}^{\mathrm{R}} \underbrace{\overset{\circ}{\mathbf{V}}}_{,i}^{\mathrm{R}}\right] - \underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{i}^{\mathrm{R}} \underbrace{\overset{\circ}{\mathbf{V}}}_{,i}\right) - \left(\left[\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij}^{\mathrm{R}} \underbrace{\overset{\circ}{\mathbf{V}}}_{,j}\right] - \underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij}^{\mathrm{R}} \underbrace{\overset{\circ}{\mathbf{V}}}_{,i}\right) \\ \overset{\circ}{\mathcal{C}}_{2}\left(\underline{\mathbf{V}}, \underline{\mathbf{V}}^{\mathrm{R}}\right) = \left(\left[\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{i}^{\mathrm{R}} \underbrace{\overset{\circ}{\mathbf{V}}}_{,i}\right] - \left[\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{i}^{\mathrm{R}} \underbrace{\overset{\circ}{\mathbf{V}}}_{,i}\right]\right) - \left(\left[\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij}^{\mathrm{R}} \underbrace{\overset{\circ}{\mathbf{V}}}_{,j}\right] - \left[\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij}^{\mathrm{R}} \underbrace{\overset{\circ}{\mathbf{V}}}_{,j}\right]\right) \\ \overset{\circ}{_{i}}^{i}$$

En effet, en analysant ces expressions il se trouve que \mathring{C}_1 et \mathring{C}_2 sont respectivement les effets sur les grandes échelles des petites échelles résolues correspondant à la zone spectrale $k \in [k_f, k_m]$ sur la figure 4.4, et des échelles de sous maille correspondant à la zone spectrale $k \ge k_m$. Enfin, il est possible d'appliquer le même raisonnement SGE mais seulement sur les petites échelles résolues

$$\underline{\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}}_{0}^{\prime\prime}\underline{\mathbf{V}}_{,t}^{\prime\prime} + \underline{\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}}_{i}^{\prime\prime}\underline{\mathbf{V}}_{,i}^{\prime\prime} = \left(\underline{\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}}_{ij}^{\prime\prime}\underline{\mathbf{V}}_{,j}^{\prime\prime}\right)_{,i} - \mathcal{C}_{1}^{\prime\prime}\left(\underline{\mathbf{V}}^{\prime\prime},\,\underline{\mathbf{V}}^{\mathrm{R}}\right) - \mathcal{C}_{2}^{\prime\prime}\left(\underline{\mathbf{V}},\,\underline{\mathbf{V}}^{\mathrm{R}}\right)$$

où

$$\mathcal{C}_{1}^{\prime\prime}\left(\underline{\mathbf{V}}^{\prime\prime},\underline{\mathbf{V}}^{\mathrm{R}}\right) = \left(\left[\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{i}^{\mathrm{R}}\ \underline{\mathbf{V}}_{,i}^{\mathrm{R}}\right]^{\prime} - \underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{i}^{\prime\prime}\underline{\mathbf{V}}_{,i}^{\prime\prime}\right) - \left(\left[\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij}^{\mathrm{R}}\ \underline{\mathbf{V}}_{,j}^{\mathrm{R}}\right]^{\prime} - \underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij}^{\prime\prime}\underline{\mathbf{V}}_{,j}^{\prime\prime}\right)_{,i}$$
$$\mathcal{C}_{2}^{\prime\prime}\left(\underline{\mathbf{V}},\underline{\mathbf{V}}^{\mathrm{R}}\right) = \left(\left[\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{i}i\underline{\mathbf{V}}_{,i}\right]^{\prime\prime} - \left[\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{i}^{\mathrm{R}}\ \underline{\mathbf{V}}_{,i}^{\mathrm{R}}\right]^{\prime}\right) - \left(\left[\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij}\underline{\mathbf{V}}_{,j}\right]^{\prime\prime} - \left[\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij}^{\mathrm{R}}\ \underline{\mathbf{V}}_{,j}^{\mathrm{R}}\right]^{\prime}\right)_{,i}$$

Encore une fois par analyse, C_1'' et C_2'' représentent respectivement les interactions entre les petites échelles résolues et le champ total résolu et entre les petites échelles résolues et les échelles de sous-maille. En suivant le raisonnement qui amène à considérer la VMS, il est nécessaire de négliger les transferts d'énergie cinétique distants *i.e.* négliger \mathring{C}_2 .

Il serait possible de résoudre les deux systèmes linéaires à cette étape. Numériquement, cette approche est trop coûteuse. Pour appliquer la méthode d'un filtre analytique, il est nécessaire de fusionner les deux systèmes d'équation. Il vient alors

$$\underbrace{\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{0}^{*} \mathbf{\mathbf{\hat{V}}}_{,t} + \underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{i}^{*} \mathbf{\mathbf{\hat{V}}}_{,i} + \underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{0}^{''} \mathbf{\mathbf{V}}_{,t}^{''} + \underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{i}^{''} \mathbf{\mathbf{V}}_{,i}^{''} = \left(\underbrace{\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij}^{*} \mathbf{\mathbf{\hat{V}}}_{,j}}_{\mathbf{\mathbf{\hat{L}}}_{i} \mathbf{\mathbf{\hat{L}}}_{i} \mathbf{\mathbf{\hat{L}}}_{i} \mathbf{\mathbf{\hat{L}}}_{i} + \underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{i}^{''} \mathbf{\mathbf{V}}_{,i}^{''} = \left(\underbrace{\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij}^{*} \mathbf{\mathbf{\hat{V}}}_{,j}}_{\mathbf{\mathbf{\hat{L}}}_{i} \mathbf{\mathbf{\hat{L}}}_{i} \mathbf{\mathbf{\hat{L}}}_{i} \mathbf{\mathbf{\hat{L}}}_{i} + \underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{i}^{''} \mathbf{\mathbf{\hat{V}}}_{,i}^{''} = \left(\underbrace{\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij}^{''} \mathbf{\mathbf{\hat{V}}}_{,j}}_{\mathbf{\mathbf{\hat{L}}}_{i} \mathbf{\mathbf{\hat{L}}}_{i} \mathbf{\mathbf{\hat{L}}}_{i} \mathbf{\mathbf{\hat{L}}}_{i} \mathbf{\mathbf{\hat{L}}}_{i} \mathbf{\mathbf{\hat{L}}}_{i} \mathbf{\mathbf{\hat{L}}}_{i} \mathbf{\mathbf{\hat{L}}}_{i} \mathbf{\mathbf{\hat{L}}}_{i} \mathbf{\mathbf{\hat{L}}}_{i} = \left(\underbrace{\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij}^{''} \mathbf{\mathbf{\hat{L}}}_{,j}^{''} \mathbf{\mathbf{\hat{L}}}_{,j} \mathbf{\mathbf{\hat{L}}}_{,j} \mathbf{\mathbf{\hat{L}}}_{,j} \mathbf{\mathbf{\hat{L}}}_{,j} \mathbf{\mathbf{\hat{L}}}_{,j} \mathbf{\mathbf{\hat{L}}}_{,j} \right)_{,i} - C_{1}^{''} - C_{2}^{''} \\ Champ total résolu - \left(\underbrace{\hat{\mathcal{C}}}_{1}^{'} + C_{1}^{''} \right) \\ - C_{2}^{''}} = 0$$

$$\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{0}^{\mathrm{R}} \, \underline{\mathbf{V}}_{,t}^{\mathrm{R}} + \underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{i}^{\mathrm{R}} \, \underline{\mathbf{V}}_{,i}^{\mathrm{R}} = \left(\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij}^{\mathrm{R}} \, \underline{\mathbf{V}}_{,j}^{\mathrm{R}}\right)_{,i} - \mathcal{C}_{2}^{\prime\prime}\left(\underline{\mathbf{V}}, \underline{\mathbf{V}}^{\mathrm{R}}\right)$$

$$(4.4)$$

Une hypothèse importante est faite ici.

$$\hat{\mathcal{C}}_{1}\left(\underline{\mathbf{\check{V}}}, \underline{\mathbf{V}}^{\mathrm{R}}\right) + \mathcal{C}_{1}^{\prime\prime}\left(\underline{\mathbf{V}}^{\prime\prime}, \underline{\mathbf{V}}^{\mathrm{R}}\right) = 0$$

Cette hypothèse traduit le fait que la cascade de Kolmogorov est continue, c'est-à-dire qu'au nombre d'onde de coupure du filtre k_f le flux venant des grandes échelles à k_f^- est égale au flux allant vers les petites échelles à k_f^+ . C'est une sorte de condition de saut permettant d'affirmer que \mathcal{V}^{R} et \mathcal{V}' peuvent reconstituer \mathcal{V} .

Au final il existe deux formulations de la SGE pour les variables entropiques : l'une classique avec $\mathbb{T}_s^{\mathrm{R}}$, l'autre issue de la VMS avec $\mathbb{T}_s'' = -\mathcal{C}_2'' \left(\underline{\mathbf{V}}, \underline{\mathbf{V}}^{\mathrm{R}}\right)$.

$$\begin{cases} \underline{\widetilde{\underline{A}}}_{0}^{\mathrm{R}} \underline{V}_{,t}^{\mathrm{R}} + \underline{\widetilde{\underline{A}}}_{i}^{\mathrm{R}} \underline{V}_{,i}^{\mathrm{R}} = \left(\underline{\widetilde{\underline{K}}}_{ij}^{\mathrm{R}} \underline{V}_{,j}^{\mathrm{R}}\right)_{,i} + \mathbb{T}_{s}^{\mathrm{R}} \quad \text{SGE classique} \\ \underline{\underline{\widetilde{\underline{A}}}}_{0}^{\mathrm{R}} \underline{V}_{,t}^{\mathrm{R}} + \underline{\underline{\widetilde{\underline{A}}}}_{i}^{\mathrm{R}} \underline{V}_{,i}^{\mathrm{R}} = \left(\underline{\underline{\widetilde{\underline{K}}}}_{ij}^{\mathrm{R}} \underline{V}_{,j}^{\mathrm{R}}\right)_{,i} + \mathbb{T}_{s}^{\prime\prime} \quad \text{SGE VMS} \end{cases}$$
(4.5)

Il semblerait en regardant l'équation (4.5) que la formulation VMS n'apporte aucune amélioration par rapport à la SGE classique. En effet, le même type d'équation est obtenue avec un terme à modéliser. Cependant, l'amélioration est cachée dans le sens à donner à chaque terme de cette équation. Les échelles sont parfaitement séparées car $\underline{\mathbf{V}} = \underline{\mathbf{V}}^{\mathrm{R}} + \underline{\mathbf{V}}' = \underline{\mathbf{V}}' + \underline{\mathbf{V}}'' + \underline{\mathbf{V}}'$. Ainsi la reconstitution de $\underline{\mathbf{V}}^{\mathrm{R}}$ nécessite soit le calcul de deux systèmes linéaires soit l'utilisation d'un filtre. Enfin, le terme de modélisation possède un support spectral très faible contrairement aux modèles généraux qui appliquent arbitrairement la viscosité turbulente à tous les niveaux ou passant par une étude de l'écoulement plus ou moins complexe. Ceci est rendu possible par le fait que seule une partie du champ des vitesses est utilisée pour déterminer l'effet du modèle. Ce qui revient à dire que seules les plus petites échelles agissent sur les échelles de sous-mailles et inversement : c'est l'idée innovante de la VMS.

4.5.2 Formulation de la VMS entropique

La modélisation du terme \mathbb{T}''_s reste cependant nécessaire et peut se baser sur les travaux et les modèles déjà existant. Par exemple, Gravemeier [124] propose une approche complexe démontrant la capacité des méthodes VMS a utilisé des modèles structuraux, qui est dans cet exemple un modèle multi-fractal. Il est possible aussi d'utiliser le modèle *Residual-based model* (RBM) qui semble très utiliser [5, 15, 47, 103, 138, 147]. Cependant une approche plus simple est choisie. Typiquement, il est possible de réutiliser le modèle de Smagorinsky, avec deux variantes

$$\mathbb{T}_{s}'' = 2\mu_{t}\underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}}(\underline{\mathbf{u}}'') \\
\begin{cases}
\nu_{t} = (C_{SS}\Delta_{m})^{2} \|\underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}}(\underline{\mathbf{u}}'')\|, & \text{Modèle Small-Small} \\
\nu_{t} = (C_{LS}\Delta_{m})^{2} \|\underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}}(\underline{\mathbf{u}})\|, & \text{Modèle Large-Small}
\end{cases}$$

Le nom donné à chacune des modélisations correspond à la grandeur qui est utilisée pour calculer le terme de viscosité turbulente. En effet, le modèle Large-Small utilise la vitesse des grandes échelles pour pouvoir calculer la viscosité turbulente. Le modèle Small-Small quant à lui, utilise la vitesse des plus petites structures calculées. Cependant, il est plus physiquement raisonnable de penser que les plus petites structures n'influencent pas les grandes échelles. Il parait donc logique de considérer le modèle Small-Small car il statue que seules les vitesses des petites structures influent sur le comportement des structures de sous mailles. En effet, une formulation presque équivalente à la SGE classique serait $\nu_t = (C_{\text{VMS}}\Delta_m)^2 \|\underline{\mathbf{S}}_{D}(\underline{\mathbf{u}}_{R})\|$. Mais il apparait que ce modèle est sur-dissipatif car il prend en compte trop d'interactions avec les grandes échelles. C'est en fait la formulation du modèle de Smagorinsky classique. Pour plus de détails sur les différences numériques induites par la VMS, se reporter à [99]. La problématique de la VMS avec un modèle basique de Smagorinsky revient à résoudre les deux systèmes réunis en un

$$\begin{cases} \underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{0}^{\mathrm{R}} \mathbf{V}_{,t}^{\mathrm{R}} + \underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{i}^{\mathrm{R}} \mathbf{V}_{,i}^{\mathrm{R}} = \left(\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij}^{\mathrm{R}} \mathbf{V}_{,j}^{\mathrm{R}}\right)_{,i} + \left(\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij}'' \mathbf{V}_{,j}''\right)_{,i} \\ \underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij}'' = \underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij}^{\mathrm{R}} \left(\mu_{t}, \kappa_{t}, \underline{\mathbf{u}}'', \mathrm{T}^{\mathrm{R}}\right) \\ \underline{\mathbf{V}}'' = \frac{1}{\mathrm{T}^{\mathrm{R}}} \begin{pmatrix} \mathrm{T}^{\mathrm{R}} V_{1}^{\mathrm{R}} \\ u_{1}'' \\ u_{2}'' \\ u_{3}'' \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Contrairement aux modèles dynamique ou sélectif du Smagorinsky, le modèle VMS Small-Small a le mérite non plus seulement d'étudier le support de la viscosité turbulente mais aussi de modifier la forme fonctionnelle du flux modélisé. De plus, elle introduit un filtrage explicite permettant de mieux contrôler le champ résolu. Ainsi, le tenseur de sous-maille n'est plus colinéaire au tenseur des déformations grâce au filtrage. Mieux encore, l'ordre du gradient correspondant au tenseur de sous-maille est supérieur à celui d'un Laplacien. La VMS peut donc s'apparenter à des modèles d'hyperviscosité, voir Chollet [18], Ferziger [39], Lesieur et Métais [98], Deschamps [29], Borue et Orzag [8, 9, 10, 11], Winckelmans *et al* [23, 158, 157] et Layton [91]. La formulation explicite du modèle VMS en formulation matricielle entropique est la suivante

$$\underbrace{\widetilde{\underline{A}}_{0}^{\mathrm{R}} \, \underline{V}_{,t}^{\mathrm{R}} + \underline{\widetilde{\underline{A}}}_{i}^{\mathrm{R}} \, \underline{V}_{,i}^{\mathrm{R}} = \left(\underline{\widetilde{\underline{K}}}_{ij}^{\mathrm{R}} \left(\nu, \underline{V}^{\mathrm{R}}\right) \, \underline{V}_{,j}^{\mathrm{R}}\right)_{,i} + \left(\underline{\widetilde{\underline{K}}}_{ij}^{\mathrm{R}} \left(\nu_{t}, \underline{V}^{\prime\prime}\right) \, \underline{V}_{,j}^{\prime\prime}\right)_{,i}} \\
\nu_{t} = \left(C_{\mathrm{VMS}} \Delta_{m}\right)^{2} \sqrt{2 \underline{\underline{S}}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{D}} \left(\underline{V}^{\prime\prime}\right) : \underline{\underline{S}}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{D}} \left(\underline{V}^{\prime\prime}\right)} \\
C_{\mathrm{VMS}} \Delta_{m} \approx C_{S} \Delta_{f} \left[\left(\frac{\Delta_{f}}{\Delta_{m}}\right)^{\frac{4}{3}} - 1 \right]^{-\frac{3}{4}} \\
\underbrace{\underline{V}^{\prime\prime}}_{\mathrm{T}} = \frac{1}{\mathrm{T}^{\mathrm{R}}} \begin{pmatrix} \mathrm{T}^{\mathrm{R}} \, V_{1}^{\mathrm{R}} \\ u_{1}^{\prime\prime} \\ u_{2}^{\prime\prime} \\ u_{3}^{\prime\prime} \\ -1 \end{pmatrix} \\$$
(4.6)

où Δ_f est la longueur de coupure du filtre. La formule de C_{VMS} est déterminée de la même manière que celle pour le Smagorinsky. Son expression est démontrée en annexe C.4. Il est possible de donner une formulation dynamique du modèle de la VMS voir Farhat *et al* [37] et Oberai et Sondak [119]. Mais il semble toutefois étrange de procéder avec deux filtres différents.

La détermination des grandeurs Δ_f et Δ_m est soumise encore à débat et plusieurs modélisations sont proposées. L'expression de Δ_f sera présentée dans la partie dédiée au filtrage. Plusieurs familles de représentation de la longueur Δ_m existent. Elles oscillent entre une représentation purement géométrique et une représentation physique de l'écoulement indépendante des caractéristiques du maillage. Un résumé de la zoologie des longueurs peut être trouvé dans Spalart [136].

La première modélisation la plus classique est celle de la longueur volumique où $\Delta^{\text{Vol}} = \sqrt[3]{\Omega^e} = \sqrt[3]{\Delta_x \Delta_y \Delta_z}$. Dans le cas d'un maillage isotrope utilisé couramment en SGE, cette définition est tout à fait licite et la plus optimale en coût de calcul. Cependant, la majorité des maillages utilisés en pratique n'est pas isotrope. Or les directions les plus fines d'une maille ne sont pas celles qui influencent la fréquence de coupure implicite du maillage. Les autres approches sont présentées plus loin.

4.5.3 Particularité de la VMS entropique

De manière générale, les modèles structuraux ne modifiant que l'expression de la viscosité turbulente ne sont pas un problème pour l'implémentation en variables entropiques. En effet, la modélisation n'est ramenée alors qu'à un scalaire qui est linéaire vis-à-vis de la matrice diffusive $\underline{\widetilde{K}}_{ij}$. Ainsi le problème se retrouve simplement exprimé par

$$\begin{cases} \underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{0}^{\mathrm{R}} \ \underline{\mathbf{V}}_{,t}^{\mathrm{R}} + \underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{i}^{\mathrm{R}} \ \underline{\mathbf{V}}_{,i}^{\mathrm{R}} &= \left(\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij}^{\mathrm{R}} \left(\nu, \underline{\mathbf{V}}^{\mathrm{R}}\right) \underline{\mathbf{V}}_{,j}^{\mathrm{R}}\right)_{,i} + \left(\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij}^{\mathrm{R}} \left(\nu_{t}, \underline{\mathbf{V}}^{\mathrm{R}}\right) \underline{\mathbf{V}}_{,j}^{\mathrm{R}}\right)_{,i} \\ &= \left(\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij}^{\mathrm{R}} \left(\nu + \nu_{t}, \underline{\mathbf{V}}^{\mathrm{R}}\right) \underline{\mathbf{V}}_{,j}^{\mathrm{R}}\right)_{,i} \end{cases}$$

De fait, le système de Navier-Stokes conserve alors les propriétés de symétrie. Les termes modélisés sont alors $\underline{\operatorname{div}}(\mathbb{T}_s)$ pour l'équation vectorielle de la quantité de mouvement et $\underline{u}^{\mathrm{R}} \cdot \underline{\operatorname{div}}(\mathbb{T}_s)$ pour l'équation de l'énergie. L'équation de conservation de la matière reste intacte. Le tenseur de sous-maille aura par construction de l'équation matricielle entropique, la forme du modèle de Smagorinsky compressible

$$\mathbb{T}_s = 2\mu_t \underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}}\left(\underline{\mathbf{u}}^{\mathrm{R}}\right)$$

Cependant, le changement de variable non linéaire ainsi que l'introduction du filtrage avec le modèle VMS empêchent la simplification du système linéaire. En effet en plus de modifier l'intensité scalaire du flux ν_t , les directions du tenseur de sous-mailles sont modulées.

$$\begin{cases} \underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{0}^{\mathrm{R}} \ \underline{\mathbf{V}}_{,t}^{\mathrm{R}} + \underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{i}^{\mathrm{R}} \ \underline{\mathbf{V}}_{,i}^{\mathrm{R}} &= \left(\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij}^{\mathrm{R}} \left(\nu, \underline{\mathbf{V}}^{\mathrm{R}}\right) \ \underline{\mathbf{V}}_{,j}^{\mathrm{R}}\right)_{,i} + \left(\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij}^{\mathrm{R}} \left(\nu_{t}, \underline{\mathbf{V}}''\right) \ \underline{\mathbf{V}}_{,j}''\right)_{,i} \\ &\neq \left(\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij}^{\mathrm{R}} \left(\nu + \nu_{t}, \underline{\mathbf{V}}^{\mathrm{R}} + \underline{\mathbf{V}}''\right) \left(\underline{\mathbf{V}}_{,j}^{\mathrm{R}} + \underline{\mathbf{V}}_{,j}''\right)\right)_{,i} \end{cases}$$

Cette approche permettant de conserver une forme de système matricielle canonique et des matrices aux propriétés intéressantes impose que la matrice du flux diffusif modélisé soit symétrique. Ceci change le modèle équivalent du système conservatif.

$$\begin{bmatrix}
\frac{\partial \rho^{R}}{\partial t} + \mathbf{div} \left(\rho^{R} \ \underline{\mathbf{u}}^{R} \right) = 0 \\
\frac{\partial \rho^{R} \ \underline{\mathbf{u}}^{R}}{\partial t} + \underline{\mathbf{div}} \left(\rho^{R} \ \underline{\mathbf{u}}^{R} \otimes \underline{\mathbf{u}}^{R} + p^{R} \ \underline{\mathcal{I}} - \mathcal{T}^{R} \right) = \underline{\mathbf{div}} \left(\mathbb{T}_{s} \right) \\
\frac{\partial \rho^{R} \ e_{t}^{R}}{\partial t} + \mathbf{div} \left(\left(\rho^{R} \ e_{t}^{R} + p^{R} \right) \ \underline{\mathbf{u}}^{R} + \underline{\mathbf{q}}^{\mathbf{T}^{R}} - \mathcal{T}^{R} \ \underline{\mathbf{u}}^{R} \right) = \underline{\mathbf{u}}^{R} \cdot \underline{\mathbf{div}} \left(\mathbb{T}_{s} \right) - \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{div}} \left(\mathbb{T}_{s} \right)$$

où la notation de moyenne de Favre est remplacée par la notation simplifiée et $\underline{\mathbf{u}}^{\mathrm{R}} \cdot \underline{\mathbf{div}}(\mathbb{T}_s)$ – $\mathbf{\underline{u}} \cdot \mathbf{\underline{div}}(\mathbb{T}_s) = \mathbf{\underline{u}}'' \cdot \mathbf{\underline{div}}(\mathbb{T}_s)$. L'équation sur l'énergie cinétique n'est plus l'équivalent du produit scalaire de l'équation de quantité de mouvement avec le champ de vitesse résolu. Un terme supplémentaire apparait $-\underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{div}}(\mathbb{T}_s)$. Ce terme est analogue à un ajout d'énergie qui est contrôlé par les échelles bien maillées. Globalement, le terme de diffusion est moins important que le terme issue d'un modèle classique de Smagorinsky de part le calcul du tenseur \mathbb{T}_s sur les petites échelles et du produit scalaire avec la vitesse de ces mêmes échelles. Cependant si seulement le terme de la VMS classique *i.e.* $\underline{\mathbf{u}}^{\mathrm{R}} \cdot \underline{\mathbf{div}}(\mathbb{T}_s)$ est conservé, il se trouve que la dissipation de l'énergie est maximale lorsque la convection des structures résolues est alignée avec la déformation des petites échelles résolues. Cet effet de la modélisation classique de la VMS semble étrange dans les cas où la convection globale de l'écoulement est perpendiculaire aux déformations des petites structures. Cela mènerait à un système mécanique non optimal pour le transfert de l'énergie. Cependant, avec la version VMS entropique symétrique définie juste au dessus, la dissipation de l'énergie $\underline{\mathbf{u}}'' \cdot \underline{\operatorname{div}}(\mathbb{T}_s)$ est maximale uniquement lorsque la convection des petites échelles résolues est alignée avec leur déformation, ce qui semble plus mécaniquement acceptable. Cet effet permet de déclencher plus intelligemment la diffusion de l'énergie dans des écoulements possédant un champ convectif moyen important.

4.5.4 Exemple de séparation des échelles résolues

L'équation précédente pose un problème d'application : comment est-il possible de séparer les échelles résolues ? Une des méthodes est de déterminer une relation analytique entre les échelles résolues *i.e.* un filtre explicite. De nombreuses approches ont visé à élaborer des méthodes de filtrage pour la VMS, appelées courrament des *scale separator*, permettant de garder en tête la notion d'échelle propre à cette problématique. Gravemeier [54] propose une approche très simple permettant à partir de coefficients, d'obtenir les vitesses filtrées. John & Kindl [78] proposent l'utilisation d'un filtre gaussien pour séparer les échelles. Cette partie vise à présenter succinctement le point de départ de la VMS introduit par Levasseur [99].

À cette étape, de nombreuses approximations sont faites sur l'expression du filtre et aussi sur le nombre d'onde de coupure des échelles résolues en plus de celles faites sur les modélisations classiques des modèles de sous-mailles. Levasseur [99] montre la pertinence de l'utilisation d'un filtre gaussien. En effet, si la projection du champ \underline{U}^{R} sur \underline{U}'' était orthogonale, numériquement il se déclencherait une accumulation d'énergie au niveau de la fréquence de séparation des échelles. Ce phénomène est appelé *cusp*. Il apparait car il existe des interactions localement distantes et non seulement ponctuelles qui permettent de représenter le flux de la cascade de Kolmogorov. S'il s'agit d'une projection orthogonale, seules les interactions limitrophes sont prises en compte, donc seulement une partie du flux est calculée, et donc il y a un "bouchon" d'énergie. Le filtre gaussien permet de relâcher cette contrainte et d'augmenter le support des interactions. Le noyau d'un tel filtre est de la forme

$$\mathbf{G}\left(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}\right) = \left(\frac{\gamma}{\pi\Delta_f^2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\gamma \|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}\|^2}{\Delta_f^2}}$$

où γ est classiquement égal à 6 et Δ_f est la taille du filtre. L'intérêt de cette forme gaussienne est sa simplicité d'implémentation mais aussi son support spectral étendu.

Il est possible de donner une forme différentielle à ce filtre. Soit Φ une fonction de \mathbb{R} et infiniment dérivable. Grâce au développement de Taylor il vient

$$\Phi\left(\underline{\mathbf{y}},t\right) = \Phi\left(\underline{\mathbf{x}},t\right) + \|\underline{\mathbf{y}}-\underline{\mathbf{x}}\|\frac{\partial\Phi}{\partial x_{i}}\left(\underline{\mathbf{x}},t\right) + \frac{\|\underline{\mathbf{y}}-\underline{\mathbf{x}}\|^{2}}{2}\frac{\partial^{2}\Phi}{\partial x_{i}\partial x_{j}}\left(\underline{\mathbf{x}},t\right) + \cdots$$

Ainsi, la fonction Φ filtrée par G a pour expression

$$\overset{\circ}{\Phi} (\underline{\mathbf{x}}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi (\underline{\mathbf{y}}, \tau) \operatorname{G} (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}, t - \tau) d\tau d^{3} \underline{\mathbf{y}}$$

$$= \Phi (\underline{\mathbf{x}}, t) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\alpha^{(l)}}{l!} \frac{\partial^{l} \Phi (\underline{\mathbf{x}}, t)}{\partial \underline{\mathbf{x}}^{l}}$$

car le filtre Gaussien est spatial et $\alpha^{(l)} = (-1)^l \int_{-\infty}^{+\infty} z^l G(z) dz$. En calculant à l'ordre deux en 1D l'expression différentielle du filtre gaussien, il découle

$$\begin{cases} \alpha^{1} = 0\\ \alpha^{2} = \frac{\Delta_{f}^{2}}{24}\\ \leftrightarrow \quad \mathring{\Phi}(x,t) \simeq \Phi(x,t) + \frac{\Delta_{f}^{2}}{24} \frac{\partial^{2} \Phi}{\partial x^{2}} \end{cases}$$

En 3D, ce terme devient

$$\mathring{\Phi}\left(\underline{\mathbf{x}},t\right) \simeq \Phi\left(\underline{\mathbf{x}},t\right) + \frac{\Delta_{f}^{2}}{24}\nabla^{2}\Phi$$
(4.7)

La séparation des grandes et des petites échelles résolues peut donc être faite de la manière suivante

$$\begin{cases} \mathbf{\underline{u}}'' = -\frac{\Delta_f^2}{24} \nabla^2 \mathbf{\underline{u}}^{\mathrm{R}} \\ \Delta_f \sim \frac{\pi^{24}}{k_f} > \Delta_m \sim \frac{\pi}{k_m} \end{cases}$$

Pour déterminer l'expression du filtre en éléments finis, il suffit de multiplier l'équation (4.7) par les fonctions de pondération $W = \sum_{a} N_a \mathbf{W}_a$. De plus en reprenant les mêmes approximations faites pour la méthode des éléments finis dans AETHER, il découle

$$\int_{\Omega} \sum_{a=1}^{n_p} \mathcal{N}_a \underline{\mathbf{W}}_a \mathring{\Phi} d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{a=1}^{n_p} \mathcal{N}_a \underline{\mathbf{W}}_a \Phi d\Omega - \frac{\Delta_f^2}{24} \left[\int_{\Omega} \sum_{a=1}^{n_p} \mathcal{N}_{a,i} \underline{\mathbf{W}}_a \Phi_{,i} d\Omega - \int_{\Gamma} \sum_{a=1}^{n_p} \mathcal{N}_a \underline{\mathbf{W}}_a \Phi_{,i} d\Gamma \right]$$

Si en plus la fonction Φ est discrétisée, il vient comme pour toute formulation éléments finis une relation du type $\sum \mathbf{W}_a \cdot \mathbf{F}_a = 0$ pour toutes fonctions de pondération. Ceci permet de les évacuer du calcul en plus de réduire le support de l'étude aux éléments. Ainsi

$$\forall a \in \llbracket 1, \dots n_p \rrbracket, \ \underline{\mathbf{F}}_a = \underline{\mathbf{0}}$$

Avec

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{F}}_{a} = \sum_{b=1}^{n_{p}} \underline{\mathbf{M}}_{ab} \underline{\mathring{\mathbf{\Phi}}}_{b} - \underline{\mathbf{M}}_{ab} \underline{\mathbf{\Phi}}_{b} + \frac{\Delta_{f}^{2}}{24} \left(\int_{\Omega} \mathbf{N}_{a,i} \mathbf{N}_{b,i} d\Omega \underline{\mathbf{\Phi}}_{b} - \int_{\Gamma} \mathbf{N}_{a} \mathbf{N}_{b,i} n_{i} d\Gamma \underline{\mathbf{\Phi}}_{b} \right) \\ \underline{\mathbf{M}}_{ab} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_{a} \mathbf{N}_{b} d\Omega \end{cases}$$

La matrice masse obtenue est celle apparaissant lors de la projection L_2 au paragraphe 2.5.2. Les solutions pour résoudre ce problème sont discutées dans le chapitre suivant mais une matrice diagonale $\underline{\mathbf{M}}_L$ plus facile à inverser est utilisée. Elle est définie comme le préconise Hughes [66] de façon élémentaire en faisant un *Mass Lumping* par

$$\left[\underline{\mathbf{M}}_{L}^{e}\right]_{ab} = \begin{cases} \frac{\int_{\Omega^{e}} \mathbf{N}_{a}^{2} d\Omega^{e}}{\sum_{c=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^{e}} \mathbf{N}_{c}^{2} d\Omega^{e}} & \mathbf{s} \mathbf{i} \mathbf{a} = \mathbf{b} \\ \sum_{c=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^{e}} \mathbf{N}_{c}^{2} d\Omega^{e} & \mathbf{s} \mathbf{i} \mathbf{n} = \mathbf{b} \\ 0 & \mathbf{s} \mathbf{i} \mathbf{n} \mathbf{n} \end{cases}$$

Cela défini, il suffit alors d'isoler l'inconnue et il découle

$$\underline{\mathbf{u}}_{a}^{\prime\prime} = \frac{\Delta_{f}^{2}}{24} \left[\underline{\mathbf{M}}_{L}^{e-1} \right]_{aa} \sum_{b=1}^{n_{el}} \left(\int_{\Omega} N_{a,i} N_{b,i} d\Omega - \int_{\Gamma} N_{a} N_{b,i} n_{i} d\Gamma \right) \underline{\mathbf{u}}_{b}^{\mathrm{R}}$$
(4.8)

Comme le précise Levasseur [99], ce modèle présente de temps en temps des instabilités numériques. Pour remédier à cela, il suffit de relâcher la contrainte du filtre gaussien lorsque la viscosité devient anormalement élevée pour re-obtenir localement une SGE classique telle que le modèle de Smagorinsky.

$$\left[\sum_{a} \left(\int_{\Omega^{e}} \mathbf{N}_{a,i} \, \underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij}^{\mathbf{R}} \, \underline{\mathbf{V}}_{,j}^{\mathbf{R}} \, d\Omega^{e}\right)^{2}\right]_{5} \leq \alpha \left[\sum_{a} \left(\int_{\Omega^{e}} \mathbf{N}_{a,i} \underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij}'' \underline{\mathbf{V}}_{,j}'' d\Omega^{e}\right)^{2}\right]_{5}$$

avec $\alpha = 0,05$ valeur basée sur les travaux [99]. Si cette relation n'est pas vérifiée alors le filtre est relâché. Les travaux de Levasseur sont une très bonne base pour généraliser la notion de filtrage en éléments finis à la montée des schémas aux ordres plus élevés. Par exemple, cette méthode est inapplicable à l'ordre 2 si l'intégration par partie n'est pas faite pour abaisser l'ordre du Laplacien. Cette étape rajoute des problématiques de conditions limites. De plus, la résolution de ce système peut demander une étape de moyenne des dérivées calculées aux nœuds afin de réaliser le filtrage, ce qui alourdit le coût de résolution. Le chapitre suivant présente les méthodes de filtrage généralisées et développées dans cette thèse et applicables aux éléments finis utilisés dans AETHER et à la montée en ordre des schémas spatiaux.

Chapitre 5

Filtrage en éléments finis

Sommaire

La p	problématique du filtrage et sa définition locale	85
5.1.1	D'une approche spectrale à une approche réelle \hdots	86
5.1.2	L'approche éléments finis	87
5.1.3	Simplification du problème local	88
Mét	hodes de résolution	89
5.2.1	L'inversion globale de la matrice	89
5.2.2	L'inversion locale de la matrice	89
5.2.3	L'utilisation de la projection L_2 et des éléments symétriques	90
5.2.4	Moyenne volumique	90
5.2.5	Calcul direct aux points d'intégration	90
Équ	ivalence des approches de filtrage	90
5.3.1	Hypothèses	91
5.3.2	Les filtres par <i>interpolation</i>	92
5.3.3	Développement de Taylor pour un filtrage différentiel	94
5.3.4	Développement en série de Fourier et filtre de Vasilyev	95
Le f	lltrage numérique par <i>interpolation</i> en pratique	96
5.4.1	Le filtrage implicite	97
5.4.2	La précision du filtrage <i>polynômial</i>	97
5.4.3	Un filtrage efficace mais coûteux : filtrage par <i>fraction rationnelle</i>	98
5.4.4	Une meilleure implémentation contre un filtre analytique : le filtre par in	terpolation 98
Bila	n sur le filtrage	100
	La p 5.1.1 5.1.2 5.1.3 Mét 5.2.1 5.2.2 5.2.3 5.2.4 5.2.5 Équi 5.3.1 5.3.2 5.3.3 5.3.4 Le fi 5.4.1 5.4.2 5.4.3 5.4.4 Bila	La problématique du filtrage et sa définition locale5.1.1D'une approche spectrale à une approche réelle5.1.2L'approche éléments finis5.1.3Simplification du problème local5.1.3Simplification du problème localMéthodes de résolution5.2.1L'inversion globale de la matrice5.2.2L'inversion locale de la matrice5.2.3L'utilisation de la projection L_2 et des éléments symétriques5.2.4Moyenne volumique5.2.5Calcul direct aux points d'intégration5.2.6Calcul direct aux points d'intégration5.3.1Hypothèses5.3.2Les filtres par interpolation5.3.3Développement de Taylor pour un filtrage différentiel5.3.4Développement en série de Fourier et filtre de Vasilyev5.4.1Le filtrage implicite5.4.2La précision du filtrage polynômial5.4.3Un filtrage efficace mais coûteux : filtrage par fraction rationnelle5.4.4Une meilleure implémentation contre un filtre analytique : le filtre par in Bilan sur le filtrage

Les conditions de réalisation d'une VMS efficace sont intrinsèquement liées à la séparation des échelles, c'est-à-dire au filtrage et donc finalement à la méthode numérique. Pour chaque méthode numérique, il existe une approche de filtrage qui lui est le mieux adaptée. Cette partie présente les choix qui ont amené à déterminer cette approche de filtrage pour les éléments finis utilisés dans AETHER.

5.1 La problématique du filtrage et sa définition locale

La VMS requiert d'extraire du champs résolu $\underline{\mathbf{V}}^{\mathrm{R}}$ la valeur du champ filtré $\underline{\mathring{\mathbf{V}}}$. Les petites structures résolues sont obtenues grâce à la complémentarité des échelles $\underline{\mathbf{V}}^{\mathrm{R}} = \underline{\mathring{\mathbf{V}}} + \underline{\mathbf{V}}''$. Cependant si aucune attention n'est portée à la méthode de filtrage et à son implémentation, la résolution de l'équation de filtrage peut être aussi coûteuse que la résolution d'un deuxième champ Navier-Stokes. Il faut trouver une méthode assez générale utilisant tous les avantages de la méthode des éléments finis et permettant de maîtriser le filtrage réalisé.

5.1.1 D'une approche spectrale à une approche réelle

Une formulation générale pour le filtrage est tout d'abord considérée. Elle est simplifiée progressivement durant ce chapitre en fonction de trois critères. Le premier est la complexité de la méthode qui peut entraîner des difficultés d'implémentation et d'entretien dans le code. Le deuxième est la maîtrise de la forme spectrale du problème permettant d'avoir un filtrage le plus précis possible afin de contrôler la sélection des échelles. Enfin, le dernier est son adaptation à la méthode des éléments finis.

Le dimensionnement du filtre doit tout d'abord être étudié dans son espace naturel de définition *i.e.* le domaine spectral. Grâce à l'expression spectrale du filtrage, il est possible de trier parfaitement les différentes échelles de l'écoulement. Posons \hat{f} l'évolution spectrale d'une fonction f et $\mathcal{F}[f]$ sa transformée de Fourier définie par $\mathcal{F}[f] = \hat{f}$. Soit Φ^{R} le champ à filtrer et $\mathring{\Phi}$ son équivalent filtré. La forme de filtrage suivante est recherchée

$$\widehat{f_1}\left(\widehat{\Phi}\right) = \widehat{f_2}\left(\widehat{\Phi^R}\right) \tag{5.1}$$

 $\widehat{f_1}$ et $\widehat{f_2}$ sont deux fonctions analytiques permettant de définir le filtrage. Deux fonctions sont utilisées, l'une pour $\widehat{\Phi}$ l'autre pour $\widehat{\Phi^R}$ afin de pouvoir bénéficier de plus de coefficients pour déterminer le filtrage numérique plus loin. Cette formulation permet de définir un équivalent non linéaire du filtrage dans l'espace spectral.

De manière générale, les calculs sont réalisés dans l'espace réel. Cette définition dans l'espace réel obligatoire pour l'implémentation, n'est pas sans difficulté. Elle introduit des contraintes sur la forme du filtrage afin de pouvoir travailler avec une expression simple dans l'espace réel et éviter les erreurs numériques associées aux transformées de Fourier inverse \mathcal{F}^{-1} []. De manière générale, l'implémentation numérique dicte la forme réelle du filtre. Dans une formulation Navier-Stokes réelle comme celle d'AETHER, seule la valeur réelle du champs est utilisable et seule la valeur réelle du champs filtré peut être utilisée. Une formulation réelle du filtrage (5.1) est donc préférée

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\widehat{f_1}\left(\mathcal{F}\left[\mathring{\Phi}\right]\right)\right] = \mathcal{F}^{-1}\left[\widehat{f_2}\left(\mathcal{F}\left[\Phi^{\mathrm{R}}\right]\right)\right]$$
(5.2)

où $\mathring{\Phi}$ et Φ^{R} sont respectivement le champs et son filtrage dans l'espace réel. La résolution du système (5.2) en $\mathring{\Phi}$ connaissant Φ^{R} peut s'avérer très fastidieuse voir impossible dans certains cas non linéaires. Cela signifie que la création d'un filtrage adéquat dans l'espace réel nécessite la connaissance de l'effet spectral de $\widehat{f_1}$ et $\widehat{f_2}$ des deux fonctions réelles f_1 et f_2 telles que le champ Φ^{R} soit filtré de manière précise. Le filtrage explicite devient donc analytiquement

$$f_1\left(\mathring{\Phi}\right) = f_2\left(\Phi^{\mathrm{R}}\right) \tag{5.3}$$

où il est plus facile de définir f que $\mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}\left(\mathcal{F}\right)\right]$ en connaissant \hat{f} . Les formes analytiques des \hat{f}_i peuvent être déterminées a posteriori.

Un tel problème peut se décomposer sous la forme d'un problème différentiel non linéaire plus adapté à la résolution en éléments finis grâce à un développement en série de Taylor

$$f_{1}\left(\overset{\circ}{\Phi}\right) = \sum_{m} c_{1m}\left(\underline{\mathbf{x}}, \overset{\circ}{\Phi}, ..., \mathcal{D}^{n}\left(\overset{\circ}{\Phi}\right), ...\right) \mathcal{D}^{m}\left(\overset{\circ}{\Phi}\right)$$
$$=$$
$$\sum_{k} c_{2k}\left(\underline{\mathbf{x}}, \Phi^{\mathrm{R}}, ..., \mathcal{D}^{n}\left(\Phi^{\mathrm{R}}\right), ...\right) \mathcal{D}^{k}\left(\Phi^{\mathrm{R}}\right) = f_{2}\left(\Phi^{\mathrm{R}}\right)$$

où $\mathcal{D}^{i}()$ représente la $i^{\text{ième}}$ différentielle et les c_{ij} sont les coefficients du développement de Taylor. Ces coefficients sont en fait très importants car ils représentent les coefficients du filtrage

et sont à l'origine de la performance de ce traitement numérique. En éléments finis, la résolution d'un problème non linéaire non différentiel comme (5.3) reviendrait à résoudre ce problème non linéaire en chaque nœud de manière découplée les uns des autres. Cette manière de procéder serait inadaptée à la méthode numérique de cette thèse.

La définition d'un tel problème est soumise à l'existence d'un développement de Taylor de notre équation et donc à certaines hypothèses sur les fonctions f_1 et f_2 et sur les champs $\mathring{\Phi}$ et Φ^{R} . C'est le cas dans les problèmes de filtrages étudiés en pratique.

Il est maintenant important d'adapter cette forme analytique à la résolution en éléments finis.

5.1.2 L'approche éléments finis

De la même manière que pour les équations de Navier-Stokes, il est possible de transformer l'équation de filtrage en un problème matriciel non linéaire en fonction des coefficients à appliquer aux différentes directions des dérivées. Soit W les fonctions de pondération du problème de filtrage. Il vient pour tout W

$$\int_{\Omega} W \sum_{m} c_{1m} \mathcal{D}^{m} \left(\mathring{\Phi} \right) d\Omega = \int_{\Omega} W \sum_{k} c_{2k} \mathcal{D}^{k} \left(\Phi^{\mathbf{R}} \right) d\Omega$$

La méthode des éléments finis consiste maintenant à projeter les champs sur des bases de fonctions d'interpolation associées aux nœuds du maillage. Cette projection n'est pas anodine et a un impact sur le filtrage. En effet, la projection de la solution est alors un filtrage implicite qu'il est très difficile de contrôler. C'est le filtrage implicite du maillage.

Le filtrage implicite des éléments finis est défini par la projection de la solution sur la base des fonctions d'interpolation qui détermine alors le vecteur solution du problème considéré. Cependant, ce filtre est global à toute la résolution car il ne dépend que du choix des bases. Comme un filtrage est appliqué à la solution numérique, il est possible de comparer des méthodes de filtrage relativement les unes aux autres pour une même base. En pratique, l'effet de notre filtrage n'est pas contrôlé exactement mais relativement à une base de fonction d'interpolation. Par cette projection, les variations de la solution sont en fait portées par les fonctions d'interpolation qui sont connues uniquement sur l'élément de référence.

Au final, la construction du problème éléments finis du filtrage consiste à construire deux matrices $\underline{\mathbf{F}}_1$ et $\underline{\mathbf{F}}_2$ par la même méthode. Les projections du champ et des fonctions de pondération sur des fonctions d'interpolation localisent alors le problème à l'étude sur l'élément. Ces matrices de filtrage sont définies localement par une matrice élémentaire de filtrage à l'image de la stabilisation SUPG/GMC, voir Hughes [68]. Le problème peut être défini localement à partir des fonctions d'interpolation

$$\int_{\Omega^{e}} \mathbf{N}_{a}^{e} \sum_{n} \left[\underline{\underline{\mathbf{F}}}^{en}\right]_{ab} \mathcal{D}^{n}\left(\mathbf{N}_{b}^{e}\right) d\Omega^{e}$$

car l'opérateur différentiel est totalement linéaire vis à vis de l'interpolation et où Ω^e représente l'élément local du problème, N^e les fonctions d'interpolation définies sur l'élément réel associées à notre problème et la matrice $\underline{\mathbf{F}}^{en}$ est la matrice de filtrage élémentaire non linéaire en $\Phi^{\mathbf{R}}$ et $\mathring{\Phi}$. Les matrices du problème global sont obtenues en sommant la contribution à un nœud donné de chaque problèmes locaux. Ce problème est donc analogue à celui des équations de Navier-Stokes qui peut être étudié localement. Cette conclusion revient à reprendre l'analyse faite sur la stabilisation SUPG/GMC dans la partie sur la présentation de la méthode numérique. En effet, le filtrage peut être défini localement à partir de la problématique analytique et avoir un effet global non négligeable. Le problème global à résoudre par construction locale devient

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}}_{1} \underline{\underline{\mathbf{\Phi}}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}_{2} \ \underline{\underline{\mathbf{\Phi}}}^{\mathrm{R}}$$

où $\underline{\mathring{\Phi}}$ et $\underline{\Phi}^R$ représentent les vecteurs des fonctions filtrée et non filtrée aux nœuds du maillage et

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}}_{i} = \sum_{\Omega^{e}} \int_{\Omega^{e}} \underline{\mathbf{N}}^{e} \otimes \sum_{n} \underline{\underline{\mathbf{F}}}_{i}^{en} \mathcal{D}^{n} \left(\underline{\mathbf{N}}^{e} \right) d\Omega^{e}$$

où \otimes est le produit tensoriel défini dans la nomenclature. Cette définition locale à l'élément dépendant des fonctions d'interpolation n'est pas anodine. L'approche très appliquée qui est proposée, peut trouver un cadre plus générale dans Hughes [65] qui définit les effets des différentes échelles d'une simulation éléments finis par l'estimation de la fonction de Green associée au problème. L'estimation de la fonction de Green est définie uniquement localement sur les éléments à cause de la forme de Dirac de la solution interpolée intrinsèque aux éléments finis, menant à des termes volumiques et surfaciques sur l'élément. Cette approche peut servir à détruire de l'information pour les modèles de sous-maille ou bien à stabiliser les problèmes possédant de nombreuses échelles en éléments finis.

5.1.3 Simplification du problème local

Le problème local peut être encore simplifié à l'aide d'une étude unique sur l'élément de référence grâce à la transformation jacobienne comme expliqué dans le chapitre consacré à la méthode numérique. Ainsi l'étude locale du filtrage sur chaque élément peut être réduite à l'étude locale sur un seul élément par le changement de variable suivant

$$\int_{\Omega^{e}} \mathbf{N}_{a}^{e} \sum_{n} \left[\underline{\mathbf{F}}^{en}\right]_{ab} \mathcal{D}^{n}\left(\mathbf{N}_{b}^{e}\right) d\Omega^{e} = \int_{\Omega_{\mathrm{ref}}} \det\left[\underline{\mathbf{J}}^{e}\right] \mathbf{N}_{a} \sum_{n} \left[\underline{\mathbf{F}}^{en}_{\mathrm{ref}}\right]_{ab} \mathcal{D}^{n}\left(\mathbf{N}_{b}\right) d\Omega_{\mathrm{ref}}$$

Dans ce cas, le problème du filtrage n'est donc défini que par la base des fonctions d'interpolation N définies sur l'élément de référence, par la transformation jacobienne $\underline{\mathbf{J}}^e$ et par la fonction de filtrage f représentée par son équivalent matriciel $\underline{\mathbf{F}}^{en}$. Par ailleurs, il est possible d'exprimer la différentielle \mathcal{D}^n ($\underline{\mathbf{N}}^e$) de l'espace réel dans l'espace de référence. Selon les méthodes de dérivation vues précédemment, la différentielle introduit des puissances de la matrice jacobienne et des dérivées de cette dernière. Pour plus d'information, voir la partie numérique sur l'estimation de la dérivée. Ainsi, en posant \mathcal{D}_{ref}^n ($\underline{\mathbf{N}}$) la différentielle dans l'espace de référence, la dépendance suivante est vérifiée

$$\int_{\Omega^{e}} \mathbf{N}_{a}^{e} \sum_{n} \left[\underline{\underline{\mathbf{F}}}^{en}\right]_{ab} \mathcal{D}^{n} \left(\mathbf{N}_{b}^{e}\right) d\Omega^{e}$$

$$=$$

$$\int_{\Omega_{\mathrm{ref}}^{e}} \mathbf{det} \left[\underline{\mathbf{J}}^{e}\right] \mathbf{N}_{a} \sum_{n} \left[\underline{\underline{\mathbf{F}}}^{en}_{\mathrm{ref}} \left(\underline{\mathbf{J}}^{e}, \cdots, \left[\underline{\mathbf{J}}^{e}\right]^{n}, \mathcal{D}_{\mathrm{ref}} \left(\underline{\mathbf{J}}^{e}\right), \cdots, \mathcal{D}_{\mathrm{ref}}^{n} \left(\underline{\mathbf{J}}^{e}\right)\right)\right]_{ab} \mathcal{D}_{\mathrm{ref}}^{n} \left(\mathbf{N}_{b}\right) d\Omega_{\mathrm{ref}}^{e}$$

La dépendance des $\underline{\underline{\mathbf{F}}}^{en}$ en $\underline{\underline{\mathbf{J}}}^{e}$ sera omise dans les notations suivantes et $\underline{\underline{\mathbf{F}}}^{en}_{ref}$ est notée de manière transparente comme $\underline{\underline{\mathbf{F}}}^{en}$.

Il apparait maintenant que l'approche du filtrage en éléments finis se découpe en deux problèmes. Le premier consiste à construire une méthode de résolution du système de filtrage. C'est-à-dire comment obtenir le vecteur $\underline{\Phi}$. Le deuxième consiste à trouver une expression de la matrice locale de filtrage qui est l'estimation de la fonction de Green des petites échelles associées à ce problème éléments finis. C'est-à-dire comment définir les matrices élémentaires $\underline{\mathbf{F}}$ représentant les coefficients de filtrage.

5.2 Méthodes de résolution

Une fois le problème reconstruit globalement, il devient une équation matricielle de la forme

$$\underline{\mathbf{F}}_1 \underline{\mathbf{\Phi}} = \underline{\mathbf{F}}_2 \ \underline{\mathbf{\Phi}}^{\mathrm{F}}$$

où $\underline{\underline{\mathbf{F}}}_1$ et $\underline{\underline{\mathbf{F}}}_2$ sont cette fois-ci des matrices globales de filtrage construites localement sur l'élément de référence.

Pour résoudre correctement le problème du filtrage, il est impératif d'inverser la matrice $\underline{\mathbf{F}}_1$. L'inversion de cette matrice globale peut être lourde pour la résolution du problème. Elle a cependant un effet important : l'inversion globale permet d'étendre l'effet du filtrage d'un élément sur les autres et donc à augmenter le support du filtrage.

La simplification de ce problème vise à éviter l'inversion coûteuse de la matrice masse $\underline{\mathbf{F}}_1$. Afin d'éviter une distorsion trop grande du filtre, une hypothèse importante doit être faite sur la matrice $\underline{\mathbf{F}}_1$: f_1 est la fonction identité. De cette manière, aucun des coefficients du filtrage n'est supporté par la matrice $\underline{\mathbf{F}}_1$ et la non inversion globale du système a ainsi moins d'impact sur le traitement numérique. Seul le support du filtre est alors tronqué. La matrice $\underline{\mathbf{F}}_1$ devient alors

$$\underline{\mathbf{F}}_{1} = \sum_{\Omega^{e}} \int_{\Omega^{e}} \mathbf{N}_{a}^{e} \mathbf{N}_{b}^{e} d\Omega^{e}$$

L'inconvénient de cette hypothèse est d'enlever des degrés de liberté permettant de définir le filtrage. Cependant, la matrice $\underline{\underline{\mathbf{F}}}_1$ ne représente plus qu'une influence géométrique de chaque éléments qu'il est possible de simplifier de différentes manières.

Deux familles d'approches sont préconisées. La première revient à introduire directement l'expression de la variable filtrée dans le calcul des intégrales. En effet, définir f_1 comme l'identité revient à pouvoir calculer directement son expression aux points d'intégration, et ainsi contourner la résolution du système. La deuxième famille revient à simplifier le calcul du problème matriciel afin d'avoir les valeurs de $\mathring{\Phi}$ aux nœuds. Cette approche nécessite donc une étape de normalisation aux nœuds pour imposer un champ filtré C^0 . Elle a le mérite d'étendre le support du filtrage au macro élément mais nécessite des étapes de calcul supplémentaires.

5.2.1 L'inversion globale de la matrice

Cette approche permet de résoudre exactement l'équation de filtrage en élément finis. La fonction de filtrage f_1 peut être quelconque uniquement dans ce cas. L'inversion globale de la matrice est un problème plus immédiat permettant d'avoir une résolution numérique plus précise mais moins optimale. Le filtrage possède instantanément l'ensemble du domaine comme support et posséder une fonction f_1 quelconque permet d'accéder à des processus de filtrage plus variés. Comme il a été mentionné, cette approche est toutefois très coûteuse en temps de calcul et en implémentation.

5.2.2 L'inversion locale de la matrice

Comme le préconise Hughes [66], il est possible de remplacer $\underline{\mathbf{F}}_1$ par une matrice équivalente diagonale issue du *Mass Lumping* définie par

$$\left[\underline{\mathbf{F}}_{1}^{e}\right]_{ab} = \int_{\Omega^{e}} \mathbf{N}_{a}^{e} \mathbf{N}_{b}^{e} d\Omega^{e} \simeq \begin{cases} \int_{\Omega^{e}} \mathbf{N}_{a}^{e} \mathbf{N}_{b}^{e} d\Omega^{e} \\ \sum_{c}^{n_{en}} \int_{\Omega^{e}} \mathbf{N}_{c}^{e} \mathbf{N}_{c}^{e} d\Omega^{e} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cependant, même l'auteur estime que cette méthode n'est pas très adaptée à la mécanique des fluides qui présente certaines instabilités. De plus, il n'est pas démontré qu'elle soit toujours adaptée aux calculs à l'ordre élevé.

5.2.3 L'utilisation de la projection L_2 et des éléments symétriques

L'étude de la projection L_2 et des éléments symétriques permet aussi de résoudre localement l'équation de filtrage et de donner une valeur locale non \mathcal{C}^0 du champs filtré. Le coefficient z_a défini dans l'équation (2.15), est utilisé pour définir la meilleure approximation du filtrage au sens de la norme L_2 . Il vient alors

$$\mathring{\Phi}_{a}^{e} = \sum_{i} \left[z_{a} \sum_{n} \left[\underline{\mathbf{F}}_{2}^{en} \right]_{ab} \mathcal{D}^{n} \left(\mathbf{N}_{b} \right) \right] \left(\underline{\boldsymbol{\xi}}_{i} \right) \Phi^{\mathbf{R}}{}_{b}$$

avec *i* définissant le point d'intégration et $\underline{\xi}_i$ ses coordonnées. Cette méthode permet de s'affranchir de la moyenne volumique tout en donnant la meilleure approximation du filtrage au sens de la norme L_2 .

5.2.4 Moyenne volumique

La matrice $\underline{\mathbf{F}}_1$ est en fait un équivalent du volume du macro élément entourant le nœud considéré. Il est alors aussi possible de remplacer l'inversion de cette matrice par une moyenne des valeurs discontinues du filtrage pondérées par le volume de chaque éléments compris dans le macro élément. Le macro élément est défini plus loin à la section 6.1.2. Concrètement, la construction globale de $\underline{\mathbf{F}}_2 \underline{\boldsymbol{\Phi}}^{\mathrm{R}}$ revient à calculer un équivalent volumique du filtrage sur le macro élément. Il suffit donc de diviser par ce volume. Cette méthode introduit cependant un filtrage supplémentaire sur la solution qui consiste à lisser encore plus le champ filtré mais à étendre son effet au macro élément. Le filtrage devient donc

$$\mathring{\Phi}_{a} = \frac{1}{\Omega_{a}^{\text{macro}}} \sum_{a \in \Omega^{e}} \int_{\Omega^{e}} \sum_{n} \left[\underline{\mathbf{F}}_{2}^{en} \right]_{ab} \mathcal{D}^{n} \left(\mathbf{N}_{b} \right) d\Omega^{e} \Phi^{\mathbf{R}}{}_{b}$$

Cette méthode est à préférer si une estimation aux nœuds du champs filtré est recherchée. Elle a le mérite de conserver le champ filtré continu et de ne pas trop dénaturer l'estimation des champs de gradients.

5.2.5 Calcul direct aux points d'intégration

Il est aussi possible de calculer directement le filtrage aux points d'intégration sans passer par la résolution globale du champ filtré. L'inconvénient de cette méthode est qu'un ordre dans le filtrage est perdu car il est nécessaire de dériver le champ filtré pour obtenir la viscosité turbulente. Par exemple, si un filtrage en dérivée seconde est utilisé dans une simulation O_3 , la viscosité turbulente devient uniformément nulle par construction. L'avantage de cette méthode est toutefois de ne passer par aucune résolution globale et donc est directement implémentable dans le calcul Navier-Stokes. Le filtrage est défini sur chaque élément par les mêmes matrices mais sans effet intégré. Le filtrage devient donc

$$\overset{\circ}{\Phi}(\underline{\mathbf{x}}_{i}) = \sum_{n} \left[\left[\underline{\underline{\mathbf{F}}}_{2}^{en} \right]_{ab} \mathcal{D}^{n}(\mathbf{N}_{b}) \right] \left(\underline{\boldsymbol{\xi}}_{i} \right) \Phi^{\mathbf{R}}{}_{b}$$

Une fois la méthode de résolution déterminée, il est important de définir le contenu de la matrice $\underline{\mathbf{F}}_{2}$ et de la matrice $\underline{\mathbf{F}}_{1}$ dans le cas d'une résolution globale.

5.3 Équivalence des approches de filtrage

Les méthodes de résolution de l'équation de filtrage étant présentées, il est important de savoir comment déterminer les coefficients de la matrice de filtrage. S'intéresser au filtrage sur la résolution des équations de Navier-Stokes revient à déterminer localement une matrice de filtrage. Cette dernière ne dépend en fait que des fonctions d'interpolation, de la fonction de filtrage et de gradient et puissance de la transformation jacobienne.

Premièrement, il est très important de noter que cette formulation en plus d'être parfaitement adaptée à la méthode des éléments finis est aussi transparente avec la montée en ordre spatial.

Deuxièmement, un filtrage a été implicitement appliqué à la solution par le fait que celle-ci soit projetée sur l'espace des fonctions d'interpolation et sur les éléments. C'est une contrainte à la maîtrise de la forme du filtrage sur la solution analytique mais pas sur la solution numérique. En effet, les fréquences de sous mailles ne peuvent pas être filtrées car elles sont tuées par les intégrales locales. Cependant si les deux solutions sont comparées dans une même base, le noyau spectral de ce filtre implicite ne doit pas changer, ce qui permet de comparer relativement différentes méthodes. Et cela même si sur la solution analytique, le filtrage réellement appliqué est déformé.

Troisièmement, les hypothèses de résolution numérique des éléments finis telles que les éléments symétriques et iso-paramétriques et le type de fonction d'interpolation, n'ont pas été introduites. Ceci rend cette approche du filtrage encore générale à toute résolution éléments finis. Il apparait dès lors qu'en éléments finis, le filtrage a une forme universelle car il n'est déterminé que par quelques fonctions définies sur l'élément de référence donnant naissance à une matrice de dimension finie. Dans le paragraphe suivant, une méthode pour le filtrage en éléments finis est présentée permettant maîtrise et simplicité d'implémentation du traitement numérique. Ce filtrage s'appuie sur une adaptation des méthodes déjà éprouvées en différences finies et éléments finis.

Dans cette partie, l'équivalence des approches de filtrage pour la méthode éléments finis de AETHER est montrée. Les formes des matrices de filtrage sont discutées. Le filtrage par *interpolation* est finalement la méthode choisie car elle propose la compréhension, l'implémentation et la maîtrise les plus simples du filtrage en élément finis.

5.3.1 Hypothèses

L'expression du filtrage est déterminée par trois paramètres : les fonctions d'interpolation réelles, le déterminant du jacobien et des coefficients du filtrage. Les hypothèses faites sur les éléments finis en introduction permettent de simplifier l'expression analytique et la dépendance envers certains des paramètres des matrices de filtrage.

L'étude du filtrage sur des éléments iso-paramétriques et symétriques

L'utilisation d'éléments iso-paramétriques permet de conclure que la transformée jacobienne est directement liée aux fonctions d'interpolation. Ainsi, le filtrage ne dépend plus que des fonctions d'interpolation et de la fonction de filtrage. Par ailleurs pour plus de simplicité, l'utilisation d'éléments symétriques rend la jacobienne constante sur l'élément. Cela simplifie la détermination des dérivées. Ainsi les matrices de filtrage $\underline{\mathbf{F}}_i$ sont indépendantes des dérivées de la matrice jacobienne qui sont alors nulles. Les dérivées des matrices jacobiennes étant nulles, la simple relation suivante est vraie

$$\frac{\partial^{n} \mathbf{N}_{a}^{e}}{\partial \underline{\mathbf{x}}^{n}} = \left[\underline{\mathbf{J}}^{e}\right]^{n} \frac{\partial^{n} \mathbf{N}_{a}}{\partial \underline{\boldsymbol{\xi}}^{n}}$$

où $\underline{\xi}$ représente les variables d'espace sur l'élément de référence. Cette hypothèse permet de simplifier les calculs et l'analyse, tout en conservant l'effet des matrices jacobiennes qui ne traduisent qu'une transformation géométrique et dans le cadre de cette thèse, une dimension de l'élément. Cette taille de maille est constante sur l'élément et variable suivant la direction de la dérivée.

Le besoin d'une base canonique commune : la base polynômiale

L'utilisation d'une base canonique commune est un ingrédient indispensable pour l'équivalence des méthodes de filtrage. Les différentes bases de fonction d'interpolation sont donc limitées à posséder la même base canonique. Comme des fonctions d'interpolation de Lagrange sont utilisées dans AETHER, les bases sont restreintes à la base canonique des polynômes.

La base des polynômes permet aussi d'exprimer les dérivées des fonctions d'interpolation dans la base de ces même fonctions d'interpolation grâce à une matrice à coefficients constants. De manière plus générale, n'importe quelle base de fonctions polynômiales peut être reliée à une autre par une matrice à coefficients constants.

Toutes les hypothèses présentées permettent d'affirmer que les méthodes de filtrage en éléments finis sont équivalentes. En effet, le filtrage n'est défini que localement sur l'élément de référence et dépend donc seulement de la matrice jacobienne, des fonctions d'interpolation et de la fonction de filtrage. Or si l'élément est iso-paramétrique, la matrice jacobienne ne dépend que des fonctions d'interpolation. De plus, analytiquement les fonctions de filtrage se décomposent en un problème différentiel sur le champ *i.e.* sur les fonctions d'interpolation. Les dérivées des fonctions d'interpolation s'exprimant en fonction des fonctions d'interpolation elles-mêmes. Il en est conclu que le filtrage est une matrice locale dépendante des fonctions d'interpolation, de la géométrie de l'élément et des coefficients de filtrage. Le problème s'écrit donc

$$\left(\sum_{\Omega^{e}} \int_{\Omega_{\mathrm{ref}}} \mathbf{N}_{a} \left[\underline{\mathbf{F}}_{1}^{e}\right]_{ab} \mathbf{N}_{b} d\Omega_{\mathrm{ref}}\right) \underline{\mathbf{\Phi}}_{b}$$

$$=$$

$$\left(\sum_{\Omega^{e}} \int_{\Omega_{\mathrm{ref}}} \mathbf{N}_{a} \left[\underline{\mathbf{F}}_{2}^{e}\right]_{ab} \mathbf{N}_{b} d\Omega_{\mathrm{ref}}\right) \underline{\mathbf{\Phi}}_{b}^{\mathrm{R}}$$

où $\underline{\mathbf{F}}_1^e$ et $\underline{\mathbf{F}}_2^e$ sont définies sur l'élément. Fort des hypothèses utilisées, les différentes approches traditionnelles de filtrage sont toutes équivalentes dans leur implémentation avec les éléments finis et avec des fonctions d'interpolation polynômiales. Il suffit donc de choisir la plus générique pour obtenir le filtrage le plus efficace. La formulation (5.3.1) peut être comparée à la théorie d'estimation de la fonction de Green voir Hughes [68] où il apparait clairement la somme sur les éléments, la matrice locale ainsi que le produit d'encadrement par les fonctions d'interpolation.

L'évolution locale du filtrage entre l'élément de référence et l'élément réel est identique *i.e.* polynomial, aux coefficients des monômes prêts.

5.3.2 Les filtres par *interpolation*

Une première approche du filtrage consiste à étudier les variations de la solution. En éléments finis, les variations de la solution sont simples : elles sont données par les fonctions d'interpolation. Dans un polynôme, les hautes fréquences sont stockées dans les monômes des plus hauts degrés. Cette approche est préconisées par Brazell, Kirby, Stoellinger et Mavriplis [13]. Pour ceux souhaitant réaliser un filtrage explicite en inversant globalement l'équation de filtrage, se reporter aussi à [13]. Ainsi comme le suppose la figure 5.1, il est possible de filtrer les hautes fréquences d'une solution O_3 en l'interpolant par un polynôme d'ordre 1.

Ces deux manières de filtrer ne sont pas équivalentes. Seule l'interpolation de gauche est étudiée car elle donne lieu à un filtrage plus efficace. Pour le filtrage de droite, il suffit de décomposer l'intégrale définie localement sur chacun des éléments linéaires le composant. Des fonctions d'interpolation continues peuvent alors être définies sur chacun des sous éléments linéaires. Pour réaliser le premier filtrage, il est plus simple d'utiliser la base canonique des polynômes qui décompose l'interpolation sur chacun des monômes.



FIGURE 5.1 – Filtrage d'un signal quadratique par une fonction d'interpolation linéaire

Dans tous les cas, il existe une matrice à coefficients constants permettant de relier deux bases polynômiales entre elles. Soit $\underline{\mathbf{B}}_{10}$ la matrice de passage de la base de calcul 1 à la base canonique 0, elle est définie par

$$\underline{\mathbf{N}}_1 = \underline{\underline{\mathbf{B}}}_{10} \underline{\mathbf{N}}_0$$

où \underline{N}_i sont les fonctions d'interpolation dans la base *i*. Comme le problème de filtrage est défini localement par le produit de la matrice de filtrage par les fonction d'interpolation de la base, il vient

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}}_{1}\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{1} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}_{1}\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{10}\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{0} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}_{0}\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{0}$$

où les matrices $\underline{\mathbf{F}}_i$ sont les matrices de filtrage définies sur une base i. Il ne reste alors qu'à définir une unique matrice $\underline{\mathbf{F}}_0$ qui est décomposée sur la base canonique. Il suffit par exemple de mettre des 1 sur la diagonale pour les monômes de plus bas degré puis des zéros ailleurs pour obtenir le filtrage effaçant l'effet des plus grands monômes. De plus, $\underline{\mathbf{F}}$ est souvent définie de manière linéaire ce qui rend le filtrage linéaire en $\underline{\Phi}^{\mathbf{R}}_{a}$.

Cette première méthode de filtrage revient à projeter le champ calculé sur la base canonique et à lui enlever l'effet des hauts monômes des polynômes. Cependant l'effet qu'aura le filtrage dans l'espace spectral est assez difficile à deviner. Le nom faisant référence à cette approche par la suite est filtrage par *interpolation* et les matrices de cette formulation sont notées avec l'indice *Int*.

Pour régler ce problème de précision, il est important de réfléchir dans l'espace spectral avec la transformé de Fourier du noyau $\mathcal{F}[G]$ du filtre, comme il a été sous entendu au début du chapitre. Pour définir un spectre simple à utiliser, il est intéressant de prendre la forme spectrale de filtrage suivante

$$\mathcal{F}\left[\mathring{\Phi}\right] = \mathcal{F}\left[G\right]\mathcal{F}\left[\Phi^{R}\right]$$

Il est possible de parler d'un filtrage linéaire dont la forme analytique peut être très simplement définie. En plus de la simplicité de construction, ce filtre assure des matrices de filtrage linéaires mais aussi une synergie intéressante avec les fonctions d'interpolation polynômiales. L'inconvénient de cette approche est que le filtrage recherché est résolu dans l'espace réel. Ce produit devient alors un produit de convolution par transformée inverse de Fourier. Résoudre un produit de convolution est encore aujourd'hui beaucoup trop coûteux à réaliser numériquement dans un contexte industriel. Pour bien contrôler le filtre, il faut calculer

$$\mathring{\Phi}\left(\underline{\mathbf{x}}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}\left(\underline{\mathbf{y}} - \underline{\mathbf{x}}\right) \Phi^{\mathcal{R}}\left(\underline{\mathbf{y}}\right) d\underline{\mathbf{y}}$$

Les méthodes de filtrage suivantes proposent deux approches pour éviter le calcul du produit de convolution tout en conservant la forme exacte de notre problème théorique : la forme analytique de G.

5.3.3 Développement de Taylor pour un filtrage différentiel

La deuxième idée qu'il est possible de mettre en œuvre pour filtrer un signal consiste à lui enlever ses fluctuations rapides. Une manière évidente de procéder est de considérer uniquement les dérivées de ce signal et d'annuler intelligemment celles qui permettent d'obtenir le filtrage désiré. En effet, la dérivée première de Φ^{R} représente une certaine composante des hautes fréquences. Plus l'ordre de la dérivée augmente, plus de hautes fréquences sont ajoutées.

Il est donc intéressant de décomposer le champ Φ^{R} présent dans le produit de convolution sur chacune de ses dérivées, qui représentent chacune un niveau de filtrage. Pour cela un développement en série de Taylor est utilisé. Cela suppose que le champ Φ^{R} accepte mathématiquement un tel développement jusqu'à l'ordre n. Cette hypothèse est vraie lorsque le développement de Taylor est appliqué à la solution numérique. Soit le développement en série de Taylor du filtrage

$$\mathring{\Phi} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\mathbf{G}}\left(\underline{\mathbf{y}}\right) \underline{\mathbf{y}}^n d\underline{\mathbf{y}} \right) \frac{\partial^n \Phi^{\mathbf{R}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}^n}$$

Il est alors possible de développer une expression permettant de calculer analytiquement l'intégrale en fonction de la forme de $\widehat{\mathbf{G}}$, transformée de Fourier de $\underline{\mathbf{G}}$. Cette analyse est retrouvée dans Sagaut [128]. Au final une expression libre d'intégration est obtenue pour le filtrage réel, sous la forme d'une somme infinie telle que

$$\begin{cases} \mathring{\Phi} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \underline{\alpha}_n \frac{\partial^n \Phi^{\mathrm{R}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}^n} \\ \underline{\alpha}_n = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \frac{\partial^n \widehat{\mathbf{G}}}{\partial \underline{\mathbf{k}}^n} (\underline{\mathbf{k}} = \underline{\mathbf{0}}) \end{cases}$$

La méthode des éléments finis et les fonctions de forme de Lagrange permettent simplement de linéariser la fonction de filtrage obtenue. Une erreur est alors commise : la somme infinie est tronquée par le fait que les dérivées des polynômes d'interpolation sont nulles à partir d'un certain rang. D'ailleurs, il n'est pas possible en pratique de réaliser une somme infinie numériquement. La forme du filtre *différentiel* éléments finis est donc strictement

$$\mathring{\Phi} = \sum_{n=0}^{n_{ordre}} \frac{(-1)^n}{n!} \underline{\alpha}_n \frac{\partial^n \Phi^{\mathrm{R}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}^n}$$

où n_{ordre} est l'ordre spatial de la simulation éléments finis. Ainsi, la forme du filtre est dénaturée par la troncature du développement de Taylor. En effet, en supposant que l'interpolation de Φ est polynômiale *i.e.* de la forme fonctionnelle des fonctions de la base, il vient

$$\widehat{\widehat{\Phi}} = \sum_{n=0}^{n_{ordre}} \frac{(-1)^n}{n!} \underline{\alpha}_n \left(2i\pi \underline{\mathbf{k}}\right)^n \widehat{\Phi^{\mathrm{R}}} \\ = \left[\sum_{n=0}^{n_{ordre}} \frac{(-2i\pi)^n \underline{\alpha}_n}{n!} \underline{\mathbf{k}}^n\right] \widehat{\Phi^{\mathrm{R}}}$$

i.e.

$$\widehat{\underline{\mathbf{G}}} = \sum_{n=0}^{n_{ordre}} \frac{(-2i\pi)^n \,\underline{\boldsymbol{\alpha}}_n}{n!} \underline{\mathbf{k}}^n \qquad \in \mathcal{P}\left[n\right]$$

Le filtre appliqué est donc un polynôme de degré égal à celui des fonctions d'interpolation. Le filtre de noyau $\widehat{\mathbf{G}}$ n'est plus égal à sa forme initiale mais à un polynôme. La méthode de filtrage différentiel dégénère naturellement vers un filtrage qui est appelé polynômial. Dans la suite, la méthode de filtrage différentiel correspond à un filtrage à base de gradient de la fonction à filtrer et où les coefficients $\underline{\alpha}_n$ ne sont pas constants. Les matrices sont indicées par Dif. Dans le cas contraire, cette méthode de filtrage est nommée polynômial et notée avec l'indice Pol.

Ainsi comme les dérivées des fonctions d'interpolation polynômiales peuvent s'exprimer en fonction des fonctions d'interpolation polynômiales et de la matrice jacobienne, alors il existe une matrice à coefficients constants permettant de relier la dérivée $n^{i\rm eme}$ et la fonction de forme. Ainsi la forme du filtrage est

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}}^{Dif}\underline{\mathbf{N}} = \sum_{n=0}^{n_{ordre}} \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{n}\underline{\underline{\mathbf{D}}}^{n}\underline{\mathbf{N}}$$

où $\underline{\mathbf{F}}^n$ correspond aux coefficients de filtrage à appliquer à la dérivée $n^{\text{ième}}$ et $\underline{\mathbf{D}}^n$ la matrice permettant d'exprimer les dérivées $n^{\text{ième}}$ dans la base des fonctions d'interpolation.

Pour maîtriser le filtrage dans l'espace réel, il est important de se donner une forme spectrale de polynôme dont la valeur du degré ne dépasse pas celui de la simulation. En effet, dans le cas où la fonction $\widehat{\mathbf{G}}$ est quelconque ou est un polynôme dont le degré ne respecte pas $||n|| \leq n_{ordre}$ alors le développement de Taylor est tronqué. Le filtre appliqué est donc dénaturé.

Ce type de filtrage fait appel au calcul des dérivées successives en fonction de l'ordre du filtrage choisi. La difficulté repose donc sur le calcul des gradients d'ordre de plus en plus élevé qui peuvent faire apparaître des matrices jacobiennes plus ou moins complexes. Le filtrage analytique est un polynôme si les coefficients sont constants sur l'élément réel et a la forme analytique suivante

$$\mathcal{F}\left[\underline{\mathbf{G}}\right] = \sum_{n=0}^{n_{ordre}} \frac{(-2i\pi)^{n} \,\underline{\alpha}_{n}}{n!} \underline{\mathbf{k}}^{n}$$

Attention, si le filtre $\underline{\widehat{\mathbf{G}}}$ est pris quelconque, il y a une erreur commise à cause de la dégénérescence de la forme du filtre $\underline{\mathbf{G}}$ en un polynôme. La pente et les valeurs importantes au filtrage ne peuvent pas être contrôlées : le filtre dans le domaine spectral doit être égal à 1 aux basses fréquences et égale à 0 après la coupure.

Pour éviter ces erreurs de troncature, le filtre doit être dimensionné sous forme polynômiale en fonction de l'ordre du calcul. La forme spectrale exacte suivante est obtenue

$$\underline{\widehat{\mathbf{G}}} = \sum_{n=0}^{n_{ordre}} \underline{\mathbf{a}}_n \underline{\mathbf{k}}^n$$

Ainsi que l'équation de filtrage suivante

$$\mathring{\Phi} = \sum_{n=0}^{n_{ordre}} \frac{\underline{\mathbf{a}}_n}{(2i\pi)^n} \frac{\partial^n \Phi^{\mathrm{R}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}^n}$$

Par ailleurs la méthode par *interpolation* est équivalent au filtrage *différentiel* à travers la méthode des éléments finis. En effet, toutes deux reviennent à considérer l'évolution polynômiale par morceaux de la solution du problème. Pour avoir un ordre d'idée de l'équivalence se reporter à l'annexe D.

5.3.4 Développement en série de Fourier et filtre de Vasilyev

La méthode précédente se base sur un développement en série de Taylor pour pouvoir échapper au calcul du produit de convolution. La problématique se reporte donc au calcul des dérivées. Estil possible de trouver une autre décomposition du produit de convolution qui permettrait d'éviter le calcul de l'intégrale? Une troisième idée pour filtrer un signal, reviendrait à décomposer les fluctuations en série de Fourier pour pouvoir bien isoler le contenu spectral de la fonction, voir Vasilyev [153]. L'approche du problème est tout d'abord de partir du domaine spectral. Soit un filtre \widehat{G} de la forme $\sum c_j e^{-i\underline{\mathbf{k}}\cdot\underline{\Delta}_{\underline{\mathbf{r}}}j}$. Il est simple de trouver le filtrage réel de la forme suivante

$$\mathring{\Phi} = \sum_{i} c_{i} \Phi^{\mathrm{R}} \left(\underline{\mathbf{x}} - \frac{\underline{\mathbf{\Delta}}_{\mathbf{f}}}{2\pi} i \right)$$

Ces filtres sont très utilisés en différences finies car les maillages étant structurés, il est très simple de trouver les valeurs voisines issues de ce décalage $\underline{\mathbf{x}} - \underline{\Delta}_{\mathbf{f}}/(2\pi)i$. Cependant même si ces filtres sont très intéressants, l'application directe en éléments finis est plus compliquée.

L'utilisation des nœuds voisins est difficile pour les éléments finis car en réfléchissant élément par élément en non structuré, le nombre de voisin est limité et ceux-ci ne sont pas répartis selon des directions privilégiées. La première contrainte force l'utilisateur à borner la fréquence de coupure $\Delta_{\mathbf{f}}$ de son filtre de manière à ce que le voisin ne soit pas hors de l'élément. De plus, un maillage non structuré implique une conséquence pratique qui introduit une erreur inévitable : s'il est souhaitable d'avoir une fréquence de coupure stable *i.e.* des voisins équirépartis, les coordonnées qui ne tombent pas sur des nœuds du maillage doivent être interpolées. Sous quelles hypothèses ou approximations est-il possible d'utiliser ce type de filtre ?

La contrainte de discrétisation des éléments finis est directement appliquée sur ce filtrage. Grâce à sa projection sur l'ensemble des fonctions de forme, il vient

$$\mathring{\Phi} = \sum_{i} c_{i} \sum_{a} \mathcal{N}_{a} \left(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\boldsymbol{\tau}}_{i} \right) \underline{\boldsymbol{\Phi}}^{\mathcal{R}}_{a}$$

où $\underline{\tau}_i = \underline{\Delta}_{\mathbf{f}}/(2\pi)i$. Or comme les éléments sont de Lagrange, ce sont des polynômes qui possèdent un développement limité fini, il est possible d'en déduire que

$$N_a \left(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\boldsymbol{\tau}}_i \right) = \sum_{n=0}^{n_{ordre}} \frac{\left(-\underline{\boldsymbol{\tau}}_i \right)^n}{n!} \; \frac{\partial^n N_a}{\partial \underline{\mathbf{x}}^n}$$

Ainsi

$$\begin{pmatrix} \mathring{\Phi} &= \sum_{n=0}^{n_{ordre}} \underline{\mathbf{a}}_n \sum_{a} \frac{\partial^n \mathbf{N}_a}{\partial \underline{\mathbf{x}}^n} \, \Phi^{\mathbf{R}}_a \\ \underline{\mathbf{a}}_n &= \sum_{i} c_i \frac{(-\underline{\tau}_i)^n}{n!}
\end{pmatrix}$$

Après calcul, une fonction de filtrage de la forme suivante est obtenue

$$\begin{cases} \overset{\circ}{\Phi} = \sum_{n=0}^{n_{ordre}} \frac{(-1)^n}{n!} \underline{\alpha}_n \frac{\partial^n \Phi^{\mathrm{R}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}^n} \\ \underline{\alpha}_n = \sum_i c_i \left(\underline{\boldsymbol{\tau}}_i\right)^n \end{cases}$$

La première chose à remarquer est que grâce à l'utilisation de la méthode des éléments finis, les familles de filtrage de Vasilyev et *différentiel* ont le même effet et la même implémentation à cause de la dégénérescence analytique qu'entraine l'utilisation de fonction d'interpolation polynômiales. En effet, la fonction de filtrage analytique est identique dans les deux cas aux coefficients près. Coefficients qui comme il est possible de voir, peuvent être différents en fonction de la direction.

5.4 Le filtrage numérique par *interpolation* en pratique

Le choix de l'implémentation d'une approche de filtrage pour AETHER est ici argumenté pour les calculs VMS.

5.4.1 Le filtrage implicite

La première remarque concerne l'exactitude du filtrage. Comme précisé, il n'est pas possible de contrôler exactement la forme du filtrage car la méthode des éléments finis introduit un filtrage implicite à cause de la projection de la solution sur une base de fonction d'interpolation. Cependant si cette base reste la même, le noyau implicite reste identique. Ainsi il est possible de déduire relativement l'effet d'un filtrage par rapport à un autre. La forme spectrale réelle obtenue est

$$\overset{\circ}{\Phi} = \widehat{G}_{expl} \circ \widehat{G}_{impl} \left(\widehat{\Phi} \right)$$

où \widehat{G}_{impl} est inconnue et \circ désigne la composée de fonction. Ainsi si $\widehat{G}_{impl}(\widehat{\Phi}) = \widehat{\Phi^R}$ où Φ^R est bien la solution numérique résolue, il est possible d'étudier plusieurs filtrages relativement les uns aux autres pour un même maillage.

5.4.2 La précision du filtrage polynômial

Les méthodes précédentes peuvent se ramener à un noyau spectral *différentiel i.e.* un filtre *polynômial* à coefficient non constant, qui est intrinsèque à la méthode des éléments finis et de ses fonctions d'interpolation polynômiales. Dans le cas d'autres bases, il est cependant nécessaire de vérifier cette universalité.

Les hypothèses sur la méthode éléments finis faites en début de partie sont ici très importantes. Cette universalité n'est valable que dans le cas où les fonctions de forme sont polynômiales. Si les fonctions de forme ne sont pas polynômiales, elles ne possèdent pas de développement de Taylor nul à partir d'un certains rang et donc de développement de Taylor exacte. Les méthodes *différentiel* et de Vasilyev ne sont donc plus équivalentes. De plus, il ne serait peut être pas possible d'exprimer les dérivées des fonctions de forme en fonction d'une base de degré moindre pour filtrer les variations. La méthode par *interpolation* ne serait plus équivalente aux deux autres non plus.

Finalement comme toutes ces méthodes dégénèrent vers un noyau *différentiel*, il parait donc nécessaire de construire le noyau comme un polynôme et ainsi maîtriser les erreurs analytiques. Pour cette famille d'éléments finis, un filtrage *polynômial* est donc le plus optimal. En effet, définir la matrice de filtrage locale sans plus d'étude peut donner un effet spectral non désiré. La définition d'un filtrage *polynômial* permet de maîtriser le filtrage. Utiliser un filtre spectral polynômial possède un autre avantage : les coefficients du filtrage réel sont proportionnels aux coefficients du filtre spectral. En effet

$$\widehat{\mathbf{G}} = \sum_{n=0}^{n_{ordre}} \underline{\mathbf{a}}_n \underline{\mathbf{k}}^n \Rightarrow \mathring{\Phi} = \sum_{n=0}^{n_{ordre}} \frac{\underline{\mathbf{a}}_n}{(2i\pi)^n} \frac{\partial^n \Phi^{\mathrm{R}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}^n}$$

Ainsi, le filtre polynômial visé peut être paramétré dans l'espace spectral et être utilisé précisément dans l'espace réel. Plus l'ordre du filtre augmente, plus les degrés de liberté pour déterminer le polynôme augmentent. Sur la figure 5.2, il est possible de voir quelques formes de filtres polynomiaux qu'il est possible d'obtenir en fonction de la montée en ordre.

Le grand intérêt de cette méthode est que le filtre spectral utilisé ne subit aucune perte lors de la projection sur la base de fonction d'interpolation si le polynôme est dimensionné pour qu'il ne soit pas tronqué. C'est-à-dire si l'ordre de la dérivée la plus élevée n'est pas supérieur à l'ordre spatial de la simulation. Ainsi l'erreur restante lors du filtrage n'est à imputer qu'au filtrage implicite. Le polynôme spectral doit aussi être paramétré afin d'obtenir les caractéristiques suivantes. Premièrement le polynôme doit être égale à 1 le plus longtemps aux petits nombres d'onde pour ne pas dénaturer la quantité d'énergie du système stockée généralement à ces fréquences. Deuxièmement, le polynôme doit être égal à zéro à la coupure et au delà pour



FIGURE 5.2 – Forme du filtre spectral dans le cas de différents ordres de filtrage : ordre 2 (---), ordre 4 (---), ordre 6 (---) et ordre 8 (---).

tuer les petites échelles. Troisièmement les degrés de liberté supplémentaires doivent permettre d'adapter la pente du filtre.

5.4.3 Un filtrage efficace mais coûteux : filtrage par fraction rationnelle

Un des points négatifs de ce filtrage *polynômial* se voit sur la figure 5.2. En effet le polynôme plonge et en pratique il tend vers plus ou moins l'infini au delà de la fréquence de coupure $(k/k_f > 1)$. Ceci rajoute de l'énergie à la coupure car le noyau du filtre est nul seulement pour $k/k_f = 1$ et possède une pente de plus en plus raide. En effet k_f n'est jamais parfaitement maîtrisé à cause de la déformation introduite par le filtre implicite de la méthode des éléments finis. Pour résoudre ce problème, il faut revenir à la définition du filtrage définie par l'équation (5.3.1). Si les noyaux \widehat{G}_1 et \widehat{G}_2 associés aux fonctions de filtrage f_1 et f_2 sont définis comme des polynômes et de manière à ce que le degré de polynôme G_1 soit supérieur à celui du polynôme G_2 , alors le filtrage tendra irrémédiablement vers 0. Cela permet donc d'éviter la remontée d'énergie due au filtrage proche de la fréquence de coupure. Cette méthode reste toujours polynômiale bien que cette fois-ci une fraction rationnelle soit dimensionnée. En effet, $\underline{\underline{F}}_1$ est appliquée aux champ filtré Φ et $\underline{\mathbf{F}}_{2}$ au champ Φ mais il est important de dimensionner la fraction rationnelle définie par G_2/G_1 . Elle doit alors toujours vérifier les contraintes ci-dessus. Le second avantage est l'ajout de degrés de liberté associés à l'introduction d'un second polynôme. La nouvelle forme du filtre devient alors beaucoup plus intéressante, voir figure 5.3. Cela justifie la définition des deux fonctions f_1 et f_2 au début du chapitre pour l'équation de filtrage.

Cependant cette méthode est lourde en coût de calcul. En effet, l'inversion exacte des matrices issues du polynôme \widehat{G}_1 est rarement réalisée. Il manque alors les effets des nœuds hors de l'élément et fait dégénérer le filtrage par *fraction rationnelle* en un filtrage *polynômial*. Pour réaliser en pratique un filtrage par *fraction rationnelle*, il est indispensable d'inverser globalement la matrice $\underline{\mathbf{F}}_1$ de filtrage associée au champ filtré.

5.4.4 Une meilleure implémentation contre un filtre analytique : le filtre par *interpolation*

Le filtrage *différentiel* requiert le calcul des dérivées successives du champ à filtrer. Ce calcul peut devenir lourd avec la montée en ordre du filtrage. Une approche simplifiée du filtrage par *interpolation* permet quant-à-elle une montée naturelle de l'ordre du filtre avec la montée en ordre de la simulation. En reprenant l'idée de la figure 5.1, la variable filtrée peut simplement être obtenue en interpolant les solutions avec des fonctions linéaires. Grâce à cela le filtrage est



FIGURE 5.3 – Forme du filtre spectral par fraction rationnelle dans le cas d'un polynôme d'ordre 2 au dénominateur et d'ordre 0 au numérateur.

d'ordre 1 si la solution O_3 est interpolée par des polynômes d'ordre 1. Il sera d'ordre 2 si la solution est O_4 etc ... L'équation de filtrage devient donc

$$\overset{\circ}{\Phi}(\underline{\mathbf{x}}_{i}) = \sum_{a}^{n_{sommet}} \mathbf{N}_{a}^{O_{2}}\left(\underline{\boldsymbol{\xi}}_{i}\right) \Phi^{\mathbf{R}}{}_{a}$$

Il est important de noter que pour la méthode des éléments finis, la performance du filtrage est directement déterminée au premier ordre par la plus haute dérivée. Cela définit alors l'ordre du filtrage. En effet, l'ordre du filtrage décrit le support spectral pris en compte par le traitement numérique.

Le seul problème de cette approche vient justement de l'effet spectral du filtrage. Le filtrage est généralement identique à un filtrage *différentiel* à coefficients non constants. Ainsi la forme spectrale est

$$\mathring{\Phi} = \sum_{n=0}^{n_{ordre}} \underline{\mathbf{a}}_n\left(\underline{\mathbf{x}}\right) \frac{\partial^n \Phi^{\mathrm{R}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}^n} \Longrightarrow \widehat{\mathring{\Phi}} = \sum_{n=0}^{n_{ordre}} \underline{\mathbf{c}}_n\left(\underline{\mathbf{k}}\right) \frac{\partial^n \widehat{\Phi^{\mathrm{R}}}}{\partial \underline{\mathbf{k}}^n}$$

La forme spectrale de ce filtrage est quasiment impossible à déterminer dans le cas général. Cependant il est composé d'un filtrage linéaire ne dépendant pas de la solution, puis d'un filtrage correspondant aux variations spectrale de la solution

$$\widehat{\hat{\Phi}} = \widehat{\mathbf{G}}^{Pol} \widehat{\Phi^{\mathbf{R}}} + \sum_{n=1}^{n_{ordre}} \underline{\mathbf{c}}_{n} \left(\underline{\mathbf{k}} \right) \frac{\partial^{n} \widehat{\Phi^{\mathbf{R}}}}{\partial \underline{\mathbf{k}}^{n}}$$

Cette dernière composante est rangée dans l'erreur numérique induite par la méthode de filtrage car elle peut être difficile à estimer.

Comme il est montré par la suite, cette approche du filtrage est moins précise comparée à une autre définition de matrice de filtrage ou d'une méthode de résolution plus globale. D'ailleurs une manière simple de l'améliorer est de procéder à une méthode de résolution type moyenne comme décrit plus haut. De plus, l'ordre du filtrage est limité à $O_{\rm sim} - 1$ ne permettant pas de bénéficier de la totalité de l'ordre de la simulation. Toutefois, cette approche présente des avantages comparée à un filtrage et un modèle de sous-maille classique. Premièrement, le filtrage par *interpolation* préconisé présente une amélioration drastique en terme de coût de calcul. Deuxièmement, la sélection des structures fines de l'écoulement est amplement satisfaisante comme il est démontré par la suite. Troisièmement, cette approche présente l'avantage de stabiliser le calcul.

Ainsi face à ces arguments, c'est cette approche qui est implémentée dans le code AETHER.

5.5 Bilan sur le filtrage

Au final, le traitement numérique du filtrage en éléments finis revient à définir une matrice locale aux éléments. La dimension de cette matrice augmente donc avec l'ordre de la simulation permettant ainsi d'augmenter le support spectral du filtre mais aussi la quantité d'information au sein de l'élément permettant d'accéder à des formes de filtrage plus exotiques.

Les matrices de filtrage sont de dimension finie et peuvent être déterminées à partir des méthodes classiques de filtrage. Pour la définition de ces matrices, le filtre *polynômial* semble être le plus précis mais le filtrage par *interpolation* semble être le plus efficace en terme de coût de calcul.

En effet, l'ingénieur en méthodes numériques doit choisir un équilibre entre performance et précision de la résolution de l'équation filtrage. D'un côté, la résolution globale de l'équation matricielle du filtrage présente de nombreux avantages. Elle est exacte au sens des éléments finis et donc globale pour un coût de calcul élevé, elle propose une généralisation de la méthode et plus de coefficients pour choisir le filtrage. De l'autre côté, il est possible de choisir une approximation dont la plus efficace est l'estimation du champs filtré aux points d'intégration.

Ainsi dans la suite de cette thèse, le choix a été porté sur la construction d'une matrice de filtrage grâce à l'interpolation de la solution par les fonctions de forme d'ordre O_2 et une résolution par une estimation du champs filtré aux points d'intégration.

Chapitre 6

L'hybridation avec modèle de paroi

Sommaire

6.1	\mathbf{Filt}	rage et formulation VMS 101		
	6.1.1	Choix d'une approche de filtrage en variables entropiques $\ . \ . \ . \ . \ . \ 101$		
	6.1.2	Le choix des longueurs de filtrage		
	6.1.3	Implicitation de la VMS		
	6.1.4	VMS et stabilisation $\dots \dots \dots$		
6.2	La s	aturation de la méthode VMS 103		
6.3 La gestion proche paroi : une méthode hybride				
	6.3.1	SGE et gestion proche paroi		
	6.3.2	Choix d'une méthode de gestion proche paroi \hdots 107		

Les idées introduites par la VMS et le filtrage permettent de mettre en place un modèle de sous-maille efficace et précis pour la méthode des éléments finis. Cependant, la SGE ne permet pas de résoudre correctement l'écoulement proche paroi. En effet, les contraintes en précision de maillage sont telles que les tailles de mailles doivent égaler celles de la DNS dans ces zones. De plus, les modèles classiques comme le Smagorinsky ne sont pas construits mathématiquement pour gérer l'anisotropie, voir [116]. Pour cela une méthode d'hybridation faible a été développée.

6.1 Filtrage et formulation VMS

En ayant toutes les méthodes numériques en main pour implémenter la version hybride de la VMS, les choix fait à propos de la méthode filtrage et les méthodes d'implémentation de la VMS sont présentés.

6.1.1 Choix d'une approche de filtrage en variables entropiques

La premier problème à prendre en compte est la base d'interpolation pour le filtrage locale. En effet, les fonctions d'interpolation de Lagrange sont utilisées pour décrire les variables entropiques qui sont elles-mêmes une transformation non linéaire des variables conservatives. Ainsi, si les variables entropiques ont une évolution polynomiale, les variables conservatives ne peuvent être interpolées par les mêmes fonctions. Or le filtrage est appliqué sur les vitesses qui sont des variables conservatives.

Toutefois, il s'agit ici d'un choix de filtrage. Les fonctions interpolant les variables conservatives pour le filtrage peuvent être prises quelconques. Il est donc légitime d'utiliser les mêmes fonctions d'interpolation que le calcul en variables entropiques, en supposant que le filtrage soit



FIGURE 6.1 – Macro élément 2D

fait sur une base d'interpolation polynomiale indépendante de celle du calcul. Par ailleurs, s'agissant ici d'un filtrage sur les vitesses, leurs gradients en fonction de ceux des variables entropiques correspondantes sont simples à exprimer, voir section 2.5.2.

Dans le but de faire un choix éclairé, chacune des approches de filtrage développées précédemment a été implémentée et testée : filtrage par *interpolation*, *polynômial* et *différentiel*. Chacune des méthodes de résolution a aussi été étudiée : *Mass Lumping*, moyenne volumique, résolution totale ou résolution aux points d'intégration.

L'inversion globale de la matrice masse de filtrage reste la plus précise comme la simulation des tourbillons de Taylor-Green le montre par la suite. Mais elle reste aussi la plus coûteuse au point d'être inapplicable encore dans un contexte industriel. La méthode de filtrage par moyenne sur le macro élément est intéressante et possède un coût raisonnable. C'est un bon compromis entre précision, maîtrise et rapidité de filtrage.

Il est possible d'implémenter explicitement l'équation du filtre *polynômial*. Cependant sur certains maillages grossiers ou mal conçus cette approche présente des instabilités empêchant la réalisation du calcul. De plus, les filtrages d'ordre plus élevés peuvent être coûteux à implémenter à cause des différentielles d'ordre élevé. Dans une optique industrielle, l'approche du filtrage par *interpolation* aux points d'intégration est choisie. Cette méthode a la caractéristique d'être très stable même sur des maillages grossiers. Elle a une implémentation optimale dans les codes éléments finis : pour tout ordre spatial et de filtrage, seules des fonctions de formes linéaires, les sommets des éléments et peu de points d'intégration sont nécessaires. De plus avec la montée en ordre, l'ordre du filtrage augmente de manière naturelle. La contre-partie d'un tel choix est la forme analytique équivalente du filtrage qui ne peut être précisément exprimée.

6.1.2 Le choix des longueurs de filtrage

Comme précisé dans la partie sur les modèles de sous-mailles, la détermination des longueurs Δ_m et Δ_f peut être délicate. Dans le cas de la VMS, les maillages utilisés dans les zones d'intérêt sont quasiment isotropes permettant ainsi de prendre $\Delta_m = \Delta_m^{\text{Vol}} = \sqrt[3]{\Omega^e} = \sqrt[3]{\Delta_x \Delta_y \Delta_z}$. C'est cette modélisation qui est choisie par la suite.

La détermination de Δ_f pose des problèmes plus fondamentaux. Tout d'abord pour des méthodes peu précises en filtrage et des maillages non structurés, l'utilisation d'une longueur de filtrage fixe peut introduire une divergence. En effet dans le cas de la VMS, si Δ_f devient inférieur à Δ_m le coefficient de la viscosité turbulente est alors mathématiquement indéterminé ou est uniquement piloté par le bruit numérique. Cependant dans le cas du filtrage local, la longueur la plus naturelle à prendre en compte est celle du macro élément introduit dans le chapitre sur les éléments finis lors de la reconstruction des dérivées aux nœuds, visible sur la voir figure 6.1. Le calcul de ce volume est très simple en éléments finis et peut être calculé une unique fois durant la simulation. De plus, cette définition assure que $\Delta_f > \Delta_m$ et donc l'existence mathématique et la validité du coefficient de la VMS $C_{\rm VMS}$.

6.1.3 Implicitation de la VMS

L'implicitation du terme VMS est importante à prendre en compte pour faciliter la convergence du calcul. Cette implicitation est directement implémentable grâce à la formulation de filtrage choisie. En effet, le filtrage est linéaire selon les variables du calcul. Il suffit de déterminer une expression matricielle entre $\underline{\mathbf{V}}_{,i}^{\prime\prime}$ et $\underline{\mathbf{V}}^{\mathrm{R}}$. L'approche locale du filtrage permet alors de trouver cette relation matricielle entre le gradient des variables entropiques résolues et le gradient des variables entropiques filtrées.

Soit $\underline{\mathbf{V}}'' = \underline{\underline{\mathbf{F}}}'' \underline{\mathbf{V}}^{\mathrm{R}}$, il vient pour $i \in [1, ...3]$

$$\frac{\partial V_{i+1}^{\prime\prime e}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} = \sum_{b} \left(\sum_{a} \frac{\partial \mathcal{N}_{a}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} \left[\underline{\underline{\mathbf{F}}}^{e} \right]_{ab}^{\prime\prime} \frac{V_{5a}^{\mathrm{Re}}}{V_{5b}^{\mathrm{Re}}} \right) V_{(i+1)b}^{\mathrm{Re}}$$

En effet seules les variables de l'équation de la quantité de mouvement sont filtrées. Cette équation est toujours vérifiée sur l'élément car la cinquième variable entropique ne peut s'annuler sous peine d'avoir une température infinie.

Ainsi la matrice implicite à introduire dans l'implicitation du problème est la suivante

$$\begin{split} \mathbf{\underline{V}}_{,j}'' &= \sum_{a} \underline{\underline{\mathbf{E}}}_{a,j}'' \mathbf{\underline{V}}_{a}^{\mathrm{R}} a \\ \mathbf{\underline{F}}_{a,j}'' &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathrm{N}_{a}}{\partial x_{j}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_{a,j}'' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{a,j}'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{a,j}'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \mathrm{N}_{a}}{\partial x_{j}} \end{bmatrix} \\ F_{a,j}'' &= \sum_{b} \frac{\partial \mathrm{N}_{b}}{\partial x_{j}} \left[\underline{\mathbf{\underline{F}}}_{b}^{e} \right]_{ba} \frac{V_{5a}^{\mathrm{Re}}}{V_{5a}^{\mathrm{Re}}} \end{split}$$

6.1.4 VMS et stabilisation

L'interaction du modèle de sous-maille et de la stabilisation est très importante à prendre en compte. En effet, la méthode SUPG/GMC compare l'ensemble de la diffusion avec la convection afin d'estimer au plus juste la dissipation supplémentaire à introduire, nécessaire au bon déroulement du calcul. D'ailleurs dans certains cas, les idées des approches VMS peuvent être utilisés pour stabiliser le calcul, Hughes [34, 35, 57, 58, 63, 64]. Comme le présente l'étude sur les tourbillons de Taylor-Green, la bonne interaction des deux méthodes est nécessaire et doit être prise en compte sous peine de sur-diffuser les grosses structures de l'écoulement, comportant le plus d'énergie.

Dans le but de résoudre ce problème, la matrice diffusive introduite pour le calcul de la stabilisation est la somme des deux matrices de diffusion, respectivement $\underline{\widetilde{K}}_{ij}$ et $\underline{\widetilde{K}}_{ij}''$. Il est à noter que pour l'effet du modèle VMS, seule sa matrice diffusive est prise en compte dans la stabilisation. En effet au premier ordre, seuls ces termes représentent l'intensité de la diffusion. Le terme \underline{V}_{ii}'' ne représente que le support spectral du modèle.

6.2 La saturation de la méthode VMS

Cette approche de la VMS peut souffrir de certaines instabilités dépendant du choix d'implémentation du filtrage. Il est possible que certaines valeurs du modèle divergent dans des zones mal maillées ou lors de très forts cisaillements. En effet si le champ change très fortement sur une même maille, l'estimation des gradients est de plus en plus incorrecte. Cette erreur augmente avec l'ordre du gradient. De plus comme le filtrage faisant intervenir des dérivées est adimensionné par une norme du volume de l'élément, les valeurs résultantes peuvent êtres beaucoup trop intenses. La saturation du modèle de la VMS est réalisée en étudiant une norme de la plus haute des dérivées du calcul, typiquement la viscosité turbulente. Cette viscosité turbulente doit être comparée à une valeur connue irrémédiablement stable : la viscosité du modèle de Smagorinsky. Grâce à la méthode hybride développée après, la viscosité du modèle DES est un bon candidat. La fonction de saturation est prise égale à

$$\theta_{\rm S} = \tanh\left[\left(\alpha \frac{\nu_t^{\rm VMS}}{\nu_t^{\rm Ref}}\right)^4\right]$$

où ν_t^{Ref} représente la viscosité de référence. Cette fonction permet d'avoir une transition rapide mais continue entre les différentes valeurs de viscosité. Si la viscosité de la VMS devient trop grande ($\theta_{\text{S}} = 1$) la fonction de saturation doit rapidement imposer la viscosité correspondante au modèle le plus stable. Le coefficient α sert à adapter la zone d'activation de la saturation.

Cette fonction de saturation est appliquée à trois grandeurs du calcul. Tout d'abord à la viscosité afin d'éviter une explosion dans l'intensité du transfert d'énergie. Mais aussi aux vitesses qui définissent l'intensité matricielle du modèle utilisée dans la stabilisation. Et enfin, il est aussi important de saturer le support spectral. Ainsi, la fonction θ_S s'applique de la manière suivante

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{V}}_{a}^{\prime\prime e} \longrightarrow (1-\theta_{\rm S}) \, \underline{\mathbf{V}}_{a}^{\prime\prime e} + \theta_{\rm S} \, \underline{\mathbf{V}}_{a}^{{\rm R}\, e} \\ \frac{\partial \underline{\mathbf{V}}_{a}^{\prime\prime e}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} \longrightarrow (1-\theta_{\rm S}) \, \frac{\partial \underline{\mathbf{V}}_{a}^{\prime\prime e}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} + \theta_{\rm S} \frac{\partial \, \underline{\mathbf{V}}_{a}^{{\rm R}\, e}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} \\ \nu_{t}^{{\rm VMS}} \longrightarrow (1-\theta_{\rm S}) \, \nu_{t}^{{\rm VMS}} + \theta_{\rm S} \nu_{t}^{{\rm Ref}} \end{cases}$$

Cette saturation est à éviter pour des méthodes de filtrage stables comme l'est le filtrage par *interpolation*. Il est recommandé alors de la désactiver ou de mettre le coefficient α très faible. En effet au cours des itérations temporelles, les variables filtrées interagissent avec le champ utilisé pour la détermination du système turbulent proche paroi DES. La VMS peut prendre judicieusement des valeurs d'intensités plus importante que celles de la DES comme il a pu être observé durant certains calcul. Dans ces cas, la méthode peut intempestivement imposer le modèle de Smagorinsky dans des zones non voulues menant alors à une sur-dissipation des écoulements cisaillés.

L'intérêt de la forme du système de saturation est dans sa linéarité avec le système matriciel entropique menant alors à une implicitation très simple. Une autre approche de la stabilisation du modèle est introduite par Levasseur [99].

Au final, comme le filtre par *interpolation* et sa résolution aux points d'intégration est une approche très stable en pratique, le coefficient α est imposé à zéro dans les calculs présentés dans cette thèse.

6.3 La gestion proche paroi : une méthode hybride

6.3.1 SGE et gestion proche paroi

Les approches SGE sont encore aujourd'hui très difficilse à appliquer pour approcher la solution des écoulements proche paroi dans un contexte industriel. En effet, de telles méthodes requiert un maillage pratiquement aussi fin que la DNS afin de pallier l'anistropie de la turbulence dans la direction de la paroi. De plus, la couche limite nécessite une modélisation différente de celle de la turbulence homogène et isotrope et dont les caractéristiques sont résumées dans Bailly et Comte-Bellot [4]. En effet, à cet endroit la zone inertielle d'équilibre du transfert d'énergie est repoussée vers les hauts nombres d'onde, voire disparait.

Dans cette optique, il est plus judicieux d'utiliser en proche paroi les modèles URANS éprouvés donnant des résultats satisfaisants sur les grandeurs aérodynamiques en paroi. Cependant plusieurs approches peuvent être préconisées :

- l'utilisation de lois de parois analytiques n'utilisant aucun modèle RANS, et connue sous le nom de Wall Modeled Large Eddy Simulation (WMLES);
- l'utilisation de la forme du filtrage de la SGE afin de la pratiquer jusqu'à la paroi, et connue sous le nom de *Wall Adaptative Large Eddy Simulation* (WALES);
- l'utilisation de la dégénérescence des équations URANS loin de la paroi (DES);
- l'utilisation d'une approche hybride couplée faiblement;
- l'utilisation d'une approche hybride couplée fortement.

Chacune de ces approches présente ses avantages et inconvénients.

WMLES et WALES

Le but de la WMLES est de décrire très précisément la physique de la zone proche paroi, voir [32, 81, 80, 117, 120, 121, 155]. Typiquement, ce modèle peut être introduit par le moyen d'une condition limite. De manière générale il est difficile d'être générique avec une loi de paroi pour un coût acceptable, ce qui est un frein dans leur utilisation industrielle. De plus, l'utilisation de conditions limites peut s'avérer fastidieuse avec la méthode des éléments finis et particulièrement en variables entropiques.

La deuxième méthode WALES [60, 116, 123, 131] est l'utilisation directe du filtrage afin de résoudre cette problématique. Ce sont des méthodes visant à pratiquer et modifier les modèles SGE jusqu'à la paroi. En effet, il serait possible d'introduire de l'anisotropie dans le filtrage afin d'adapter le modèle SGE aux différentes directions de l'écoulement et ainsi adapter la modélisation des échelles de sous-mailles à l'écoulement. De plus, la méthode de filtrage n'est pas encore assez précise et la gestion algorithmique de l'anisotropie peut augmenter le coût de calcul et les erreurs numériques à imputer au filtrage. Par ailleurs dans certaines zones de la couche limite la production de structures turbulentes est liée majoritairement à des phénomènes de cascade inverse d'énergie, rendant alors certains modèles VMS classiques inadaptés à ce type de physique.

Cependant, les méthodes WMLES et WALES nécessitent des maillages très fins ou la résolution de problèmes analytiques complexes ou algorithmiquement difficiles.

Méthode DES

Une approche très intéressante consiste à réutiliser les équations RANS depuis longtemps éprouvées. Dans cette optique, un terme instationnaire est ajouté donnant lieu à une équation URANS. Ces équations possèdent des termes de longueur qui sont modifiés afin d'obtenir une distance à la paroi. Ainsi loin de cette paroi, les termes de production et de dissipation tendent à s'équilibrer. L'effet résultant est généralement celui d'un modèle de Smagorinsky. Cette approche permet alors avec le même nombre d'équation d'obtenir un modèle robuste proche paroi et un modèle de sous-maille loin de la paroi. Pour plus d'information se reporter à [117, 129, 148, 149]. Cette approche est généralisable à plusieurs modèle URANS tels les modèles de Spalart-Allmaras, K-KL, K- ϵ etc ...

Cependant, cette approche souffre d'un problème lié au maillage. Dans certains cas, la zone intermédiaire ni totalement en URANS ni totalement en SGE peut venir perturber la couche limite. Cette zone est appelée la grey area et est discutée dans Spalart et al [140]. C'est dans ce but que la Detached Delayed Eddy Simulation (DDES) [139, 150] est proposée. L'idée est de reformuler la variable de la distance à la paroi en appliquant une fonction de protection de la couche limite. Spalart propose pour une telle fonction

$$\begin{cases} f_d = 1 - \tanh\left[(8r_d)^3\right] \\ r_d = \frac{\nu_t + \nu}{\sqrt{u_{i,j}u_{j,i}\kappa^2 d^2}} \end{cases}$$

$$(6.1)$$

qui transitionne progressivement de 0 présentant la zone purement URANS, à 1 représentant la zone purement SGE.

Bien que ces modèles s'avèrent pertinents, certains problèmes persistent. Tout d'abord, les modèles URANS sont connus pour êtres sur dissipatifs. Cet inconvénient devient problématique pour des simulations acoustiques notamment dans les zones de cisaillement. En effet l'écoulement sortant de cette zone URANS est beaucoup trop visqueux et cohérent, introduisant un retard dans l'établissement d'un écoulement totalement turbulent du fait de l'absence de fluctuations amonts. Différentes approches visent aujourd'hui à résoudre ce problème.

Tout d'abord, il est possible de continuer de modifier l'échelle de longueur du maillage Δ_m afin de l'adapter encore mieux à l'écoulement. Il est d'ailleurs possible de lui donner une formulation ne dépendant que des grandeurs de l'écoulement, permettant alors de découpler le modèle des caractéristiques du maillage [136]. Comme précisé précédemment la première modélisation de Δ_m est celle de Δ_m^{Vol} . Cependant, cette formulation n'est pas conservative pour les maillages anisotropes. Pour cela, la définition $\Delta_m^{\text{max}} = \max(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$ est préférée. Cette définition peut être sur-dissipative dans certains cas menant à la destruction trop rapide des tourbillons de Kelvin-Helmholtz selon Lesieur [93]. De plus dans une formulation éléments finis anisotrope, la détermination des échelles de longueur dans chacun des éléments est difficile à obtenir et surtout soumise à interprétation. Pour pallier à ces problèmes et se rapprocher d'une définition universelle, des modélisations basées sur des grandeurs de l'écoulement sont introduites comme le propose Chauvet [17]. La définition la plus en vogue est celle de Δ_m^w se basant alors sur la direction de la vorticité. De nombreuses autres définitions voient régulièrement le jour comme Δ_m^{SLA} de Spalart [136] permettant d'accélérer le développement des couches de cisaillement ou encore Δ_m^{dw}

Une autre approche plus complexe consiste à adopter une approche zonale afin d'imposer plus strictement la zone SGE [27]. Cette dernière approche pose encore de nombreux problèmes sur différents points. Tout d'abord sur le choix des zones à définir qui nécessite *a priori* d'avoir une connaissance de l'écoulement. Deuxièmement, il est nécessaire d'introduire une reconstruction des fluctuations manquantes à l'interface de la zone URANS vers la zone SGE. La génération de turbulence ou *stimulated* DDES est particulièrement indispensable pour la transition de l'écoulement de la zone URANS vers la zone SGE pour éviter le retard dans l'établissement de structures turbulentes. Cependant, les méthodes de génération de turbulence sont difficiles à introduire numériquement. Elles sont encore aujourd'hui très difficiles à implémenter dans un contexte aéroacoustique car le traitement numérique génère des sources numériques plus puissantes que les sources acoustiques physiques.

Depuis, l'ensemble de ces méthodes est regroupé dans la dénomination de ZDES expliquée par Deck [27]. Différents modes sont introduits afin de modifier la fonction de transition basée sur une estimation de la taille de maille Δ_m en fonction de l'écoulement. Approximativement le mode 1 correspond à une DES classique, le mode 2 à une DDES et enfin le mode 3 introduit des zones strictes entre URANS et SGE qui sont interfacées avec des méthodes de génération de turbulence. C'est la DDES (ZDES mode 2) qui est particulièrement utilisée aujourd'hui chez Dassault Aviation.

Du point de vue de la méthode hybride VMS, il est possible que l'introduction des fluctuations manquantes dans la couche limite mène alors à des couches de cisaillement plus instationnaires. Cela peut se traduire par l'établissement plus rapide des instabilités de Kelvin-Helmholtz. Il est toutefois important de vérifier la consistance avec la détermination des grandeurs aérodynamiques proche paroi. Combinées avec un modèle de sous-maille plus intelligent, les zones de cisaillement devraient être restituées plus fidèlement menant à une décorrélation et une tridimensionalisation de l'écoulement plus rapide.

Par ailleurs, un des points mis jusqu'alors en suspens est l'équivalence mathématique du modèle de sous-maille dégénérant des équations de la DES en général. Tacitement l'équivalent de ce modèle est celui du Smagorinsky. Pour une démonstration, voir Sagaut *et al* [129] dans le cas du modèle de Spalart-Allmaras. Pour ce modèle, l'équation de la turbulence converge

en réalité vers un pseudo Smagorinsky. En effet loin de la paroi, la viscosité turbulente est proportionnelle à

$$\nu_t \sim \Delta_m^2 \|\underline{\mathbf{\Omega}}\| \neq \Delta_m^2 \|\underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}}\|$$

où le terme de droite est l'expression du modèle de Smagorinsky en écoulement compressible. L'égalité avec un modèle de Smagorinsky classique est réalisée uniquement dans des écoulements incompressibles et où la turbulence est isotrope, voir [26, 128]. Cependant, en pratique la différence reste minime. Par ailleurs comme précisé dans la partie sur la VMS, les modèles DES conservent les travers sur-diffusifs du modèle de Smagorinsky dans le volume. Ainsi comme l'écoulement sortant de la zone URANS est peu instationnaire, l'écoulement a tendance à conserver sa stationnarité longtemps dans le volume. Ceci conduit aux problèmes observés dans les couches de cisaillement. Le modèle de sous-maille ne devrait-il pas être amélioré au lieu de continuer à complexifier le modèle proche paroi?

Il serait possible par ailleurs de modifier le terme à l'origine de la forme mathématique du modèle de sous-maille *i.e.* le terme de production d'énergie afin d'y introduire les fluctuations des vitesses filtrées. Ainsi les modèles DES convergeraient vers un modèle VMS dans le volume. Cependant la convergence des équations DES ne serait plus garantie et l'équilibre entre terme de production et de destruction pourrait être déstabilisé. Une étude plus approfondie pourrait être menée dans cette optique.

Approche hybride couplée faiblement

L'approche hybride couplée faiblement consiste à calculer séparément les différents modèles : ceux performants dans la couche limite et ceux dans le volume. Ensuite, ces deux modèles sont superposés afin de remplir leur rôle. Pour un exemple, il est possible de se référer à [74, 151, 152]. L'idée consiste à introduire les fluctuations du champs SGE dans le champ calculé par la méthode DDES. En effet, les fluctuations manquantes aux simulations URANS sont sensées être bien modélisées par les modèles de sous-mailles.

L'intérêt de cette approche réside dans la simplicité de couplage avec tout les types de modèle de paroi. De plus, le meilleur de chaque modèle est utilisé dans les zones où ceux-ci sont performants. Ainsi, il est possible de corriger les problèmes du modèle SGE de la DES en le remplaçant par un modèle VMS. La question subsistante est celle de la superposition. De quelle façon introduire les fluctuations manquantes de la SGE dans la zone URANS sans détruire la couche limite?

Une des réponses est fournie dans le paragraphe précédent. En effet, la fonction f_d du modèle DDES de Spalart semble une très bonne candidate pour réaliser cette transition et introduire les fluctuations désirées.

Approche hybride couplée fortement

L'approche hybride couplée fortement consiste cette fois-ci à calculer en un système d'équation, les deux modèles ensemble. La première partie du système consiste à calculer la partie grandes échelles et proche paroi du champ de vitesse. La deuxième partie du système vise à calculer la partie petites échelles à partir d'un terme bas nombres d'onde. Ainsi le champ final devient alors la somme des solutions du système. Pour plus d'informations voir [159]. Cette approche prometteuse reste cependant coûteuse à réaliser dans un contexte industriel.

6.3.2 Choix d'une méthode de gestion proche paroi

D'un point de vue industriel, l'approche hybride couplée faiblement semble très prometteuse sur différents points. Premièrement, elle propose un coût de résolution raisonnable vis-à-vis des méthodes analytiques et des méthodes hybrides couplées fortement. Deuxièmement, elle permet une gestion des modèles très simple car l'interface est universelle. Il est possible de changer simplement le modèle proche paroi ou le modèle de sous-mailles. Finalement comparer aux modèles DES existants dans les codes industriels, la modification des modèles de sous-mailles des zones SGE semble prometteuse pour un moindre effort.

Ainsi d'une manière analogue à la fonction de saturation, la VMS et le modèle DES lui étant associé sont interfacés par la fonction f_d . Il est possible d'introduire les fluctuations de la VMS dans la zone URANS afin de la rendre plus instationnaire et surtout proposer un modèle SGE plus intelligent que le simple modèle de Smagorinsky. Cette approche pourrait résoudre les problèmes de stationnarité proche paroi pour les simulations acoustiques et dans les débuts des couches de cisaillement qui sont aujourd'hui trop visqueuses. La fonction de transition θ_I choisie est

$$\theta_I = \begin{cases} 0 & \text{si } f_d < \alpha_d \\ \frac{f_d - \alpha_d}{\alpha_f - \alpha_d} & \text{si } f_d \in [\alpha_d, \alpha_f] \\ 1 & \text{si } f_d > \alpha_f \end{cases}$$

où α_d et α_f sont respectivement des coefficients permettant d'imposer une simulation URANS et une simulation VMS.

Comme pour la fonction de saturation, la transition doit être appliquée à chacun des champs importants de la VMS. Ainsi, la superposition de la fonction de saturation et de transition est naturelle menant au système suivant

$$\begin{cases} \theta_T &= (1 - \theta_S) \,\theta_I \\ \underline{\mathbf{V}}_a^{\prime\prime e} &\longrightarrow \theta_T \underline{\mathbf{V}}_a^{\prime\prime e} + (1 - \theta_T) \, \underline{\mathbf{V}}_a^{\mathrm{R}^{\,e}} \\ \frac{\partial \underline{\mathbf{V}}_a^{\prime\prime e}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} &\longrightarrow \theta_T \frac{\partial \underline{\mathbf{V}}_a^{\prime\prime e}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} + (1 - \theta_T) \, \frac{\partial \, \underline{\mathbf{V}}_a^{\mathrm{R}^{\,e}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} \\ \nu_t^{\mathrm{VMS}} &\longrightarrow \theta_T \nu_t^{\mathrm{VMS}} + (1 - \theta_T) \, \nu_t^{\mathrm{Ref}} \end{cases}$$
Troisième partie

Application à deux écoulements (académique et industriel)

Chapitre 7

Les tourbillons de Taylor Green

Sommaire

7.1 Présentation de l'étude						
7.1.1	Initialisation					
7.1.2	Maillage					
7.1.3	Grandeurs à analyser					
7.1.4	Explication du phénomène physique					
7.2 Prés	sentation des résultats numériques					
7.2.1	Résultats DNS					
7.2.2	Résultats MILES					
7.2.3	Résultats SGE					
7.2.4	Comparaison entre méthodes de filtrage					
7.3 Conclusion						

Le calcul des tourbillons de Taylor Green constitue un écoulement académique alternatif à la classique simulation d'une boîte de turbulence homogène et isotrope (THI). Cet écoulement permet d'étudier le phénomène de cascade de Kolmogorov et de transfert d'énergie. Cette étude cherche à quantifier le fonctionnement du filtrage et l'effet du modèle de sous-maille. Contrairement à la THI, les tourbillons de Taylor Green permettent de contrôler très précisément l'énergie de la simulation. Ainsi en plus de pouvoir comparer qualitativement les spectres, il est possible de les comparer quantitativement grâce à une solution DNS. Il n'existe toutefois pas de solution analytique. Il est important de savoir que ce problème donne lieu à une turbulence homogène mais non isotrope. Ceci rend le calcul des spectres plus difficile et des grandeurs globales telles que la dissipation sont ici utilisées. Cette étude est très utile pour valider le modèle hybride VMS en mode SGE.

7.1 Présentation de l'étude

7.1.1 Initialisation

Le calcul des tourbillons de Taylor-Green est un cas introduit par Brachet *et al* [12] et repris par Fauconnier [38]. Ce dernier sert de référence pour comparer nos résultats. Les tourbillons de Taylor-Green sont un écoulement homogène, anisotrope, périodique et 3D gouverné par les équations de Navier-Stokes incompressibles. L'écoulement devient progressivement turbulent et



FIGURE 7.1 – Solution initiale des tourbillons de Taylor Green : critère λ_2 colorié par la vorticité selon z (Rouge : vorticité positive, Bleu : vorticité négative). λ_2 est la seconde plus grande valeur propre du problème $\underline{\mathbf{S}}^2 + \underline{\mathbf{\Omega}}^2$.

présente un pic de dissipation. La solution initiale générale de l'écoulement est la suivante

$$\begin{cases} \frac{u_1\left(\underline{\mathbf{x}},t\right)}{u_0} &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{x}{L_0}\right)\cos\left(\frac{y}{L_0}\right)\cos\left(\frac{z}{L_0}\right)\\ \frac{u_2\left(\underline{\mathbf{x}},t\right)}{u_0} &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{x}{L_0}\right)\sin\left(\frac{y}{L_0}\right)\cos\left(\frac{z}{L_0}\right)\\ \frac{u_3\left(\underline{\mathbf{x}},t\right)}{u_0} &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\gamma\right)\cos\left(\frac{x}{L_0}\right)\cos\left(\frac{y}{L_0}\right)\sin\left(\frac{z}{L_0}\right)\\ \frac{p\left(\underline{\mathbf{x}},t\right)}{\rho_0 u_0^2} &= \frac{p_0}{\rho_0 u_0^2} + \frac{1 - \cos\left(2\gamma\right)}{24}\left[\cos\left(\frac{2x}{L_0}\right)\cos\left(\frac{2y}{L_0}\right) + \cos\left(\frac{2z}{L_0}\right)\right] + \\ \frac{2 + \cos\left(2\gamma\right) + \sqrt{3}\sin\left(2\gamma\right)}{48}\left[\cos\left(\frac{2x}{L_0}\right)\cos\left(\frac{2z}{L_0}\right) + \cos\left(\frac{2y}{L_0}\right)\right] + \\ \frac{2 + \cos\left(2\gamma\right) - \sqrt{3}\sin\left(2\gamma\right)}{48}\left[\cos\left(\frac{2y}{L_0}\right)\cos\left(\frac{2z}{L_0}\right) + \cos\left(\frac{2x}{L_0}\right)\right] \end{cases}$$

où γ est le facteur de forme, dimensionnant la forme et la taille de la structure du tourbillon à l'instant initial. Les grandeurs indexées par l'indice 0 sont les grandeurs de référence, utilisées pour l'adimensionnement. Dans cette thèse, seul le cas où $\gamma = 0$ est étudié. Ainsi, les équations précédente se réduisent à

$$\begin{cases}
 u_1(\mathbf{x},t) = u_0 \sin\left(\frac{x}{L_0}\right) \cos\left(\frac{y}{L_0}\right) \cos\left(\frac{z}{L_0}\right) \\
 u_2(\mathbf{x},t) = u_0 \cos\left(\frac{x}{L_0}\right) \sin\left(\frac{y}{L_0}\right) \cos\left(\frac{z}{L_0}\right) \\
 u_3(\mathbf{x},t) = 0 \\
 p(\mathbf{x},t) = p_0 + \frac{\rho_0 u_0^2}{16} \left(\cos\left(\frac{2x}{L_0}\right) + \cos\left(\frac{2y}{L_0}\right)\right) \left(\cos\left(\frac{2z}{L_0}\right) + 2\right)
\end{cases}$$
(7.1)

Sur la figure 7.1, il est possible de voir l'allure de la solution à l'instant t = 0. Elle possède une condition initiale très forte : une vitesse selon z nulle. Sur cette figure, le critère λ_2 correspond à la seconde valeur propre du problème $\underline{\mathbf{S}}^2 + \underline{\mathbf{\Omega}}^2$ et est colorié par la vorticité selon z. Pour plus d'information sur le critère λ_2 voir Jeong et Hussain [76]. Afin de pouvoir se comparer aux résultats incompressibles, il est important de choisir un nombre de Mach $\mathbf{M} = u_0/\sqrt{\gamma^{\mathrm{air}}p_0/\rho_0}$ inférieur à 0,3. Les grandeurs de référence sont prises égales à

$$\begin{cases} u_0 = 100 \text{ m/s} \\ p_0 = 10^5 \text{ Pa} \\ \rho_0 = 1,2 \text{ kg/m}^3 \end{cases}$$

Dans le cas de AETHER, la condition d'incompressibilité est vérifiée pour les valeurs initiales prises ci-dessus. Une méthode de validation de cette hypothèse consiste à remplacer $\underline{\underline{S}}$ par $\underline{\underline{S}}^{\underline{D}}$ dans les expressions des grandeurs globales ci-dessous, et de vérifier si elles sont identiques au cours du temps.

Cet écoulement a pour caractéristique de dégénérer progressivement vers une turbulence homogène pour un nombre de Reynolds $R_{e_{L_{\text{ref}}}} = u_0 L_{\text{ref}} \rho_0 / \mu$ supérieur à 500, où L_{ref} est la longueur L_0 d'un motif élémentaire. Des résultats ont été publiés par Fauconnier dans le cas d'un Reynolds de 1500 [38]. Ainsi ce nombre de Reynolds est visé et dimensionne le nombre de nœuds nécessaire à la réalisation de la DNS. Dans le cas de codes compressibles, la viscosité moléculaire peut être modifiée afin de réunir toutes les conditions nécessaires à la réalisation de la simulation. Pour le cas d'AETHER, $\nu = 8$ et est prise constante.

7.1.2 Maillage

Cet écoulement possède de nombreuses symétries : sur tous les cubes $\pi L_0 \times \pi L_0 \times \pi L_0$ l'écoulement est identique et n'influe pas sur son voisin. C'est pour cela qu'il est possible d'utiliser des conditions limites périodiques. Ainsi, la grandeur L_0 est définie par la longueur de l'arête du cube de simulation $\pi \times L_0$. Le domaine de calcul est pris dans notre cas égale à $(x, y, z) \in [0, 200\pi]^3$ *i.e.* $L_0 = 100$, définissant ainsi 8 cubes.

Par ailleurs, le nombre de points minimal de cette DNS est $N = 256^3$ et la discrétisation temporelle est $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$ secondes selon Fauconnier. Ces caractéristiques sont liées au choix du Reynolds et rendent l'étude de la DNS abordable même dans un contexte industriel.

Dans la suite, les calculs sont réalisés sur 2 maillages différents. Ces deux maillages ont la même taille, c'est-à-dire une boîte cubique d'arête $2\pi \times L_0$ et possédant des conditions limites périodiques. Le premier maillage est celui utilisé pour comparer les résultats DNS à ceux de Fauconnier permettant ainsi de valider notre méthode numérique. C'est un maillage structuré tel que $N = 256^3$. Le second maillage est aussi structuré tel que $N = 64^3$. Il est utilisé afin de réaliser les calculs SGE sur un maillage plus grossier et ainsi vérifier le comportement du modèle de sous-maille.

Chacun de ces maillages possède plusieurs connectivités différentes permettant un passage à des ordres plus élevés en espace tout en gardant le même nombre de degré de liberté. Les maillages d'ordre élevé sont conçus chez Dassault Aviation en rajoutant les nœuds nécessaires dans les éléments de manière équidistante. Ainsi la construction du maillage d'ordre élevé est associé à un maillage squelette et un maillage iso- \mathcal{P}_2 qui correspond au maillage d'ordre élevé vu comme un maillage d'ordre simple. Typiquement pour construire un maillage O_3 il faut suivre les étapes de la figure 7.2. Ainsi le maillage d'ordre élevé possède autant de nœuds que le maillage iso- \mathcal{P}_2 mais 4 fois moins d'éléments en 2D et 8 fois moins en 3D. De plus sur la maille du centre, des fonctions quadratiques sont utilisées contrairement aux deux autres, faisant appels des fonctions linéaires.

7.1.3 Grandeurs à analyser

La dissipation physique ϵ et l'énergie cinétique E_c du domaine sont utilisées pour comparer les calculs. Toutes les grandeurs sont adimensionnées par les grandeurs de référence. Plus précisément t sera adimensionné par le temps de convection $t_c = L_0/u_0$, E_c sera adimensionnée par u_0^2 et ϵ sera adimensionnée par u_0^2/t_c .



FIGURE 7.2 – Construction du maillage d'ordre élevé par le maillage squelette et iso- \mathcal{P}_2 . Les points rouges sont les nœuds d'ordre élevé.

L'énergie cinétique

La définition de l'énergie cinétique est prise sous sa forme suivante

$$E_c = \frac{1}{\rho_0 \Omega} \int_{\Omega} \rho \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} d\Omega$$

où comme la simulation est incompressible, il est possible de simplifier ρ par ρ_0 . L'étude de l'énergie cinétique montre une erreur d'ordre zéro en terme de gradient de champs de vitesse. Cependant, il est plus discriminant d'étudier la dissipation qui est directement corrélée au comportement du modèle de sous-maille.

La dissipation totale

La dissipation est la dérivée temporelle de l'énergie cinétique. En effet, la dissipation traduit directement la perte d'énergie dans notre problème. Ainsi, la dissipation totale se calcule grâce à

$$\epsilon^T = -\frac{\partial E_c}{\partial t}$$

Cette indicateur n'est pas le plus pertinent car il est sensible à l'intégration temporelle. La dissipation totale peut être décomposée en plusieurs sources, ici en trois qui sont expliquées ci-dessous.

La dissipation résolue

Tout d'abord, grâce à l'incompressibilité et à l'équation de conservation de l'énergie cinétique (1.9) sur les échelles résolues, la dissipation résolue ϵ^{R} se calcul grâce à l'expression

$$\epsilon^{\mathrm{R}} = \frac{2\nu}{\rho_0 \Omega} \int_{\Omega} \rho \underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}} \left(\underline{\mathbf{u}}^{\mathrm{R}} \right) : \underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}} \left(\underline{\mathbf{u}}^{\mathrm{R}} \right) d\Omega$$

Notons que $\underline{\mathbf{S}}^{\underline{\mathbf{D}}}$ peut être remplacée par $\underline{\mathbf{S}}$ grâce à l'hypothèse d'incompressibilité et que ν est la viscosité cinématique moléculaire.

La dissipation des échelles résolues ϵ^{R} est une grandeur traduisant la capacité du code à calculer correctement les échelles résolues sur un maillage donné. Cette grandeur est à comparer avec celle de la DNS. Cependant la solution DNS comporte toutes les échelles de l'écoulement même celles qui ne sont pas calculables avec un maillage déraffiné. La comparaison directe de ϵ^{R} des modèles SGE avec ϵ^{T} de la DNS est donc biaisée. Pour comparer les résultats de manière objective, la solution DNS doit être filtrée sur le maillage de la SGE *i.e.* qu'il est nécessaire

d'enlever à la DNS les échelles non supportées par le maillage SGE. Cette dernière grandeur est l'optimum à viser pour la dissipation résolue des modèles SGE.

L'interprétation des résultats sur une grandeur globale peut être difficile. En effet, si $\epsilon^{\rm R}$ est en dessous de la courbe optimale alors la modélisation est sur-dissipative et à l'inverse elle est sous-dissipative si elle est au dessus de la courbe optimale. Cependant les causes peuvent être diverses. En effet, si $\epsilon^{\rm R}$ qui représente l'intégrale du spectre, est en dessous de la courbe optimale, cela signifie soit qu'il y a moins de petites structures présentes dans notre spectre résolu, soit qu'il y a moins d'énergie dans les larges structures, ou soit les deux à la fois. Les premières sont tuées par un flux diffusif excessif appliqué à ces échelles dû à un coefficient ν_t trop intense. Les autres sont tuées par l'application spectrale du flux car par exemple l'argument de $\underline{S}^{\rm D}$ est basé sur les échelles résolues dans le cas de modèles SGE classiques. Ce sont les critiques qui ont été adressées aux modèles de Smagorinsky et indirectement aux modèles DES.

Dissipation modélisée

La seconde contribution à la dissipation totale est la dissipation issue du modèle de sous-maille ϵ'' . Cette dissipation de la modélisation se calcule donc exactement de la même manière que ϵ^{R} mais avec un changement sur le support de <u>S</u>^D et sur la valeur de ν qui n'est plus la viscosité cinématique moléculaire

$$\epsilon'' = \frac{2}{\rho_0 \Omega} \int_{\Omega} \rho \nu_t \left(\underline{\mathbf{u}}'' \right) \underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}} \left(\underline{\mathbf{u}}'' \right) : \underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}} \left(\underline{\mathbf{u}}'' \right) d\Omega$$

Cette dernière traduit directement l'effet de la modélisation sur le problème. Dans un cas idéal, l'effet de ϵ'' est le complémentaire strict de ϵ^{R} pour obtenir ϵ^{T} . Comme dans une grande partie des modèles, la forme fonctionnelle est calculée avec le tenseur des déformations.

Dissipation résiduelle

La dernière contribution à la dissipation de l'énergie est due à toutes les erreurs numériques existantes dans notre calcul. Elle est notée ϵ^N . Cette dissipation est issue par exemple du terme de stabilisation ou encore des erreurs de calcul des dérivées. Ce terme est difficilement calculable directement car il contient de nombreuses contributions non maîtrisées. Cependant, il est estimable par la formule de bilan suivante

$$\epsilon^T = \epsilon^{\mathbf{R}} + \epsilon'' + \epsilon^N$$

Dans la suite, le critère discriminant est de comparer ϵ^{R} face à la dissipation optimale obtenue en filtrant la solution DNS sur le maillage SGE. Cette dernière est la meilleure solution qu'il est possible d'obtenir avec le maillage SGE.

7.1.4 Explication du phénomène physique

À l'instant initial, si la formule (7.1) est intégrée sur le volume, l'énergie cinétique est égale à $E_c = 0, 125$, ce qui est retrouvé sur la figure 7.3(a). Au début de la simulation, les structures sont cohérentes et non turbulentes ce qui se traduit par un plateau de l'énergie cinétique et de la dissipation résolue. Ces structures tourbillonnaires initiales peuvent être vues sur la figure 7.1. La valeur initiale de la dissipation résolue peut être aussi calculée et dépend du Reynolds utilisé $\epsilon_0 = 3/(4R_{e_{L_{ref}}}) = 5 \times 10^{-4}$, voir figure 7.3(b). Cette grandeur permet de vérifier la valeur du Reynolds de la simulation.

Tout d'abord à t = 2 sur la figure 7.4(a), les structures se décorèlent et transfèrent l'énergie vers de plus petites structures. Toutefois la condition initiale selon z reste toujours présente.

L'analyse de l'écoulement permet de mettre en évidence 3 étapes temporelles majeures montrées par Brachet *et al* [12] et reprises par Fauconnier [38]. Aux alentours de t = 7, l'écoulement



FIGURE 7.3 – Résultats de Fauconnier [38] : (a) Évolution temporelle de l'énergie cinétique. (b) Évolution de la dissipation totale (—), de la dissipation totale DNS filtrée sur le maillage SGE (– – –) et de la dissipation résolue du Smagorinsky dynamique spectral (—).

commence à montrer des tourbillons fortement déformés avec un comportement turbulent, identifié par la présence de nombreuses tailles de structures. Cela traduit l'activation du modèle de sous-maille. À t = 8, les structures cohérentes commencent à se casser et déclenchent ainsi la cascade de Kolmogorov. Ceci se traduit par une augmentation de ϵ^{R} et donc la diminution de l'énergie cinétique. La cascade *i.e.* l'éclatement des structures vers des structures plus fines, continue jusqu'à un pic maximal de ϵ^{R} à t = 9. Sur la figure 7.4(b), toutes les petites structures créées sont visibles. Malgré l'état avancé de la turbulence, l'écoulement peine néanmoins à effacer la condition initiale de symétrie.

Au final, l'ensemble des macro structures finissent par disparaitre car elles ont transféré leur énergie aux petites structures qui sont alors dissipées à l'échelle moléculaire. La dissipation totale tend donc à diminuer car de moins en moins de structures y contribuent. La figure 7.4(c) montre les structures de la solution numérique DNS à t = 15. La trace de la condition initiale commence à disparaitre.

Cette analyse permet d'expliquer l'évolution des courbes sur la figure 7.3(b). Les courbes des modèles SGE *i.e.* ϵ^{R} , sont comparées à la dissipation totale de la DNS filtrée sur le maillage SGE. En effet, l'intensité de cette dissipation est plus faible que la dissipation totale car elle ne prend pas en compte les plus petites structures de l'écoulement, que seul le maillage DNS peut décrire. La courbe de la DNS filtrée est récupérée des résultats de Fauconnier [38].

Cette grandeur est la cible optimale pour ϵ^{R} car elle représente le champ résolu optimal qu'il est possible de calculer avec le maillage SGE : il prend en compte les bonnes interactions de sous-mailles comme si le modèle était parfait. Par exemple, une simulation SGE avec un modèle de Smagorinsky dynamique calculé spectralement est considérée par Fauconnier [38], voir figure 7.3(b). ϵ^{R} n'est pas sur la courbe idéale. En effet, l'erreur doit être majoritairement due à une modélisation de sous-maille imparfaite car les schémas spectraux assurent une erreur numérique très faible *i.e.* $\epsilon^{N} \simeq 0$. Cela signifie que la valeur de la dissipation du modèle ϵ'' est trop importante. Il revient ici l'idée que le modèle de Smagorinsky bien que réalisé de manière dynamique reste cependant trop dissipatif. Le modèle dynamique a pour objectif de changer la valeur de l'intensité du flux en fonction de l'écoulement. Cependant, ce flux est toujours appliqué à l'ensemble du spectre résolu à cause de sa colinéarité avec le tenseur des déformations. La différence entre le modèle de Smagorinsky spectral et la courbe DNS filtrée est donc à imputer à ce problème de support spectral. Il est peut être plus judicieux de changer la forme fonctionnelle



FIGURE 7.4 – Structures de l'écoulement par DNS à (a) t = 2 secondes, (b) à t = 9 secondes et (c) à t = 15 secondes. Les structures de l'écoulement sont tracées avec le critère λ_2 fixé à 0, 4 et colorié par la vorticité selon <u>z</u>. Échelles identiques à la figure 7.1.

de la modélisation comme peut le faire la VMS, plutôt que de continuer sur une modélisation visant à adapter la norme du flux.

Dans la suite, les résultats basés sur le modèle sélectif ou des modèles DES ne sont pas montrés. En effet d'une part, le modèle sélectif est basé sur la comparaison avec un écoulement moyen. Or ici il n'y a pas d'écoulement moyen, menant à un modèle sélectif qui ne s'active jamais. Ainsi un modèle de Smagorinsky sélectif est un simple Smagorinsky classique dans cette simulation. C'est la première limitation de ce senseur physique. D'autre part, dans le cas de AETHER les modèles DES sont inconditionnellement nuls à cause de l'inexistence de la paroi pour ce cas. Ces modèles sont donc équivalents à une approche de type *Monotone Integrated Large Eddy Simulation* (MILES).

7.2 Présentation des résultats numériques

La première partie de cette section consiste à présenter un calcul DNS réalisé grâce à AETHER pour s'assurer de la capacité du code à obtenir des résultats comparables à la DNS de référence. Cette étude permet aussi d'étudier l'approche MILES introduite par Grinstein et Fureby [43, 44, 55] donnant de très bons résultats sur ce type d'écoulement. La dissipation résolue ϵ^{R} est étudiée car la dissipation totale ϵ^{T} n'est pas assez discriminante. Ce n'est que la dérivée temporelle de l'énergie cinétique. De plus dans l'optique de cette thèse, il est plus intéressant de tracer la dissipation résolue qui est directement liée au modèle de sous-maille et démontre la capacité du code à correctement simuler l'écoulement pour un maillage donné.

Les modèles SGE et la montée en ordre spatial sont aussi comparées. Les trois versions de la VMS étudiées ici sont premièrement celle utilisant la meilleure résolution de l'équation de filtrage *i.e.* l'inversion globale de l'équation de filtrage *polynômial* d'ordre 2. La seconde VMS utilise un filtrage intermédiaire qui est le filtrage par *interpolation* étendu au macro élément par une moyenne pondérée volumiquement aux nœuds. Enfin la dernière VMS est la plus optimale en terme de coûts calcul et est celle préconisée et utilisée pour les cas industriels : le filtrage par *interpolation* avec les fonction d'interpolation O_2 aux points d'intégration. Cette étape permet de comparer les modèles VMS aux modèles classiques mais aussi de comparer cette approche à un filtrage optimal.

7.2.1 Résultats DNS

Tout d'abord, il est important de comparer les résultats DNS obtenus avec AETHER par rapport à des cas de référence. La DNS présentée ici est calculée avec le pas de temps de référence de $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$ secondes. Elle est calculée sur le maillage $N = 256^3$ et pour différents ordres spatiaux : O_2 et O_3 . L'évolution temporelle de l'énergie cinétique et celle de la dissipation résolue $\epsilon^{\rm R}$ sont présentées sur la figure 7.5. La première chose visible est que l'énergie du calcul est très bien restituée par AETHER ce qui est une étape importante de validation du code. Toutefois, l'étude de l'énergie cinétique ou de la dissipation totale n'est pas pertinente car la première présente peut de différence pour discriminer les calculs et la seconde est égale à la dissipation résolue dans le cas de la DNS. En effet, $\epsilon'' = 0$ strictement car il n'y a pas de modèle. Il est possible de constater sur la dissipation résolue que le passage à l'ordre élevé O_3 est comparable à celle de la DNS de référence contrairement à la simulation O_2 qui en est loin. Ainsi $\epsilon^N \simeq 0$ pour la simulation O_3 car le problème est suffisamment bien maillé pour que les erreurs numériques se ressentent peu sur le champs résolu.

La simulation DNS de référence et la DNS O_3 sont en accord tant en niveau qu'en dynamique. Une petite différence subsiste au niveau du pic maximal à t = 9 où la DNS AETHER O_3 n'est pas aussi haute, ce qui impacte forcément la partie de la courbe à droite de ce point.

La simulation AETHER O_3 peut être considérée comme comparable à la référence et comme



FIGURE 7.5 – Évolution temporelle de l'énergie cinétique et (b) de la dissipation résolue pour la DNS de référence de Fauconnier (—), les DNS AETHER d'ordre spatial O_2 (—) et O_3 (—).

l'apport de l'ordre est très clairement démontré, seules des simulations à l'ordre O_3 AETHER SGE sont analysées afin de pouvoir être comparées à la DNS filtrée de référence. De plus, la courbe sur l'énergie cinétique n'apportant pas plus d'information que la dissipation résolue, seule cette dernière suffit à étudier notre problème et discriminer les modèles.

7.2.2 Résultats MILES

Les modèles MILES considèrent que la forme de la dissipation des erreurs numériques est liée à la forme tensorielle de la viscosité de sous-maille. Ainsi, les approches MILES consistent à ne pas mettre de modèle de sous-mailles *i.e.* $\epsilon'' = 0$ et à ne laisser que la dissipation et les erreurs numériques comme modélisation. Le problème de cette approche est qu'elle ne donne pas la bonne forme fonctionnelle au spectre de dissipation. Comme le montre Levasseur [99] sur une THI, le spectre n'a pas de pente en -5/3 mais simplement un spectre droit. Cependant dans le cas des tourbillons de Taylor-Green, l'étude de la simulation MILES montre l'effet que peut avoir le code AETHER sans modèle et celui-ci obtient de très bons résultats. Le résultat du modèle MILES est calculé sur un maillage $N = 64^3$ et le même pas de temps que la DNS et est visible sur la figure 7.6. Les résultats sont très proches de ceux de la DNS filtrée comparés au modèle Smagorinsky dynamique spectral. Dans cet écoulement précis, la diffusion de la stabilisation et des erreurs numériques suffisent à retranscrire la diffusion de sous-maille, ce qui nécessiterait une analyse plus approfondie. Cependant, cet écoulement est loin d'être représentatif des écoulements réels et le modèle MILES n'a été pas validé dans le cas de la THI. L'écoulement des tourbillons de Taylor-Green n'est pas isotrope, n'a pas de champ/gradient moyens et n'a pas de paroi. Le premier et deuxième points pourraient expliquer la performance du MILES dans ce type d'écoulement. Cependant, le dernier est discriminant et empêche l'utilisation du MILES en contexte industriel car il n'est pas assez robuste dans des configurations complexes telle que LEISA II.

La conclusion de cette étude est que cet écoulement est très sensible à l'intensité du flux modélisé, à son activation mais aussi à l'interaction de la diffusion modélisée avec la stabilisation. Le modèle doit s'activer pertinemment, être judicieusement pris en compte dans la stabilisation et ne pas être trop diffusif car la stabilisation suffit parfaitement à traduire la diffusion DNS. Les simulations SGE sont calculées avec le même pas de temps que la DNS pour mettre de



FIGURE 7.6 – Évolution temporelle de la dissipation résolue pour le MILES O_3 ($\rightarrow \rightarrow$), le Smagorinsky dynamique spectral ($\rightarrow \rightarrow$) et la DNS de référence de Fauconnier filtrée (\rightarrow).

Nom	Modèle	Ordre spatial	Ordre de filtrage	Courbes
Résultats de Fauconnier, DNS filtrée sur le maillage SGE	DNS	/	0	
Résultats de Fauconnier, Smagorinsky dynamique spectral	Smago. dyn. spec.	/	?	
Résultats AETHER, Smagorinsky	Smago.	O_3	0	-
Résultats AETHER, VMS filtrage Polynômial global	VMS 1	O_3	2	–
Résultats AETHER, VMS filtrage Interpolation étendu	VMS 2	O_3	1/2	
Résultats AETHER, VMS filtrage Interpolation	VMS 3	O_3	1	

TABLE 7.1 – Tableau récapitulatif des modèles SGE comparés.

côté la problématique de la discrétisation en temps et faire émerger encore plus clairement les problèmes liés à la résolution et les modèles spatiaux. Le maillage utilisé est $N = 64^3$. Sur le tableau 7.1 sont récapitulés les différents modèles SGE. Les courbes pleines représentent la dissipation résolue $\epsilon^{\rm R}$ et les courbes en pointillées représentent la dissipation du modèle ϵ'' .

7.2.3 Résultats SGE

La première comparaison a pour but de montrer les problématiques liées aux modèles de sousmailles classiques et l'intérêt de développer un modèle VMS. Les résultats sont montrés sur la figure 7.7.

Sans surprise le modèle de Smagorinsky classique est trop diffusif. Il n'arrive pas à simuler le bon transfert d'énergie afin d'obtenir une dissipation résolue proche de la DNS. La pente de croissance de ϵ^{R} est la même au début entre le modèle dynamique et classique jusqu'à un décrochage de ce dernier. La dissipation résolue finit par plafonner à un maximum plus bas que le modèle dynamique. En effet, la viscosité du modèle classique s'active dès l'apparition du gradient et s'applique sur toutes les échelles. Les petites structures sont tuées trop tôt et les



FIGURE 7.7 – Évolution temporelle de la dissipation résolue et du modèle pour le Smagorinsky AETHER O_3 (---), la VMS 1 (---), le Smagorinsky dynamique spectral (---) et la DNS de référence de Fauconnier filtrée (----). La dissipation du modèle VMS 1 est multipliée par ×100 et les pointillés désignent la dissipation du modèle.

grosses structures sont dissipées en amont de la cascade. Les historiques temporel et spatial de l'écoulement sont ainsi modifiés car le Reynolds effectif est globalement impacté par la viscosité turbulente. Par ailleurs, la dissipation introduite par le modèle a exactement la même forme que la dissipation résolue. En effet, ces deux dissipations sont basées sur la même forme fonctionnelle à un scalaire près ν_t . À cause de cela, la dissipation du modèle de Smagorinsky est activée dès t = 2, c'est-à-dire bien trop tôt dans les événements temporels décrits par Brachet *et al.* Modifier le scalaire ν_t contrôlant le modèle ne peut pas efficacement corriger celui-ci. Ainsi le support spectral du modèle est directement mis en cause dans cette première phase de l'évolution de la dissipation. Cependant même en corrigeant cela, le modèle dynamique n'arrive pas à atteindre la solution de la DNS filtrée. Il est possible de penser que modifier le support spectral est le delta manquant afin d'atteindre la solution optimale.

Le modèle du Smagorinsky dynamique reste plus performant que le modèle classique. En effet grâce à un niveau de filtrage décrit 4.3.3, le modèle s'active plus tard permettant à la courbe de la dissipation résolue d'atteindre un niveau plus élevé que le modèle classique. Cependant même si le modèle contrôle son activation au début, l'application de la diffusion excessive à toutes les échelles se voit sur la chute de la dissipation résolue. Les modèles de Smagorinsky classique et dynamique ont des courbes finales identiques. Cette remarque confirme alors l'importance de la non colinéarité du modèle de sous-maille avec le tenseur des déformations.

Le modèle VMS a été construit de manière à éviter les défauts cités précédemment. En effet en choisissant les échelles qui activent le modèle *i.e.* les petites échelles filtrées, si celles-ci n'apparaissent pas dans le spectre alors le modèle ne s'active pas. L'activation du modèle VMS doit être retardée comparé au modèle de Smagorinsky. De plus, le champ total résolu doit être moins dissipé car le modèle est aussi choisi pour agir sur les échelles ciblées contrairement au modèle de Smagorinky qui va agir sur tout le spectre. La VMS est aussi efficace que le modèle MILES afin de restituer le comportement de la DNS filtrée. Cela sous-entend d'ailleurs que son interaction avec la stabilisation n'introduit pas plus de diffusion que nécessaire. Une partie de la dissipation de stabilisation du MILES est convertie en dissipation de sous-maille de VMS. La première remarque porte sur l'intensité de la dissipation du modèle VMS qui est 100 fois moins importante que celle du modèle de Smagorinsky. Comme le fait remarquer Levasseur [99], même si la dissipation du modèle de sous-maille est beaucoup moins importante que la dissipation de la stabilisation, la VMS a toutefois un effet non négligeable sur l'écoulement. Elle permet de corriger les défauts du MILES sur la THI et n'a pas le même effet spectral. Ceci sous-entend



FIGURE 7.8 – Spectres d'énergie cinétique pour la DNS AETHER (—), le MILES (—), le Smagorinsky (—) et la VMS 1 (—) à t = 9.

alors que les deux diffusions ne sont pas construites de la même manière, dans le même but et que le MILES ne peut agir correctement sur le spectre en énergie. La VMS est de plus réellement active sur la figure 7.7 car elle suit les étapes temporelles clefs de l'écoulement. Elle introduit la dissipation aux endroits nécessaires et uniquement quand elle est requise. Son activation est très tardive et se traduit par un pic au alentour de t = 7. Un second pic est présent à t = 8 traduisant l'apparition de la cascade. Enfin, le pic du modèle apparait à t = 9 au temps précis où la dissipation résolue est maximale.

Avant de pouvoir valider l'approche de la VMS, il est important de vérifier l'effet spectral du modèle. La difficulté de l'écoulement de Taylor-Green est qu'il n'est pas isotrope. Ainsi afin de voir le spectre d'énergie cinétique, seule une transformée de Fourier spatiale peut être réalisée. Les spectres d'énergie cinétique sont représentés sur la figure 7.8 et sont réalisés sur la solution volumique à t = 9. L'axe des abscisses est adimensionné avec le nombre d'onde maximal de la simulation DNS qui est $k_{max} = 256/L_0$. Les simulations sur le maillage SGE se coupent bien à $k/k_{max} = 0.25$. Comme le cas n'est pas isotrope, la pente des spectres n'est pas en -5/3. De plus comme le spectre est réalisé avec peu de nœuds sur un petit domaine, les extrémités des spectres sont corrompues par les erreurs de la transformée de Fourier spatiale 3D. Cependant, toutes les SGE se superposent à la DNS dans la zone bien résolue. Le spectre du Smagorinsky semble avoir une pente légèrement plus importante venant du fait de sa sur-dissipation. Mais globalement, les modèles se comparent bien et les spectres ne permettent pas d'apporter plus d'information.

Dans tous les cas, cette étude valide l'approche de la VMS. Ce modèle permet de résoudre les problèmes de support spectral et de sur-diffusion associés aux modèles SGE classiques. La VMS semble aussi très bien s'interfacer avec la méthode de stabilisation. De plus son implémentation étant proche des méthodes de stabilisation éléments finis multi-échelles, ce modèle de sous-maille est très stable et peut être utilisé dans des configurations industrielles telles que LEISA II contrairement aux méthodes MILES.

7.2.4 Comparaison entre méthodes de filtrage

Sur la figure 7.9 sont tracées les dissipations résolues et celles des modèles pour chacune des méthodes de filtrage VMS. Cela permet de mettre en évidence les erreurs introduites par un filtrage moins précis. La méthode de filtrage la plus optimale en terme de coût de calcul est celle utilisant un pur filtrage par *interpolation* (VMS 3). C'est la méthode de filtrage choisie à la fin du chapitre sur la VMS. Les erreurs numériques et le problème de maîtrise analytique du filtrage entraine une dégradation du modèle. De plus, l'évolution de la dissipation du modèle est moins



FIGURE 7.9 – Évolution de la dissipation résolue et du modèle pour la VMS 1 (---), 2 (---) et 3 (---) ainsi que pour la DNS filtrée (---). La dissipation du modèle VMS 1 est multipliée par ×100 et celle du modèle VMS 2 multipliée par ×50. Les pointillés représentent la dissipation du modèle.

précise que celle de la VMS 1. Les étapes temporelles sont moins marquées, le modèle s'active trop tôt et son évolution est plus plate. Cela peut s'expliquer par deux effets. Premièrement, l'ordre du filtrage équivalent n'est pas le même. La VMS 1 ayant un ordre de filtrage plus élevé, celle-ci est plus discriminante dans le choix des échelles. Deuxièmement, le filtrage par *interpolation* est un filtrage local et donc par conséquent ayant une résolution imparfaite. Le filtrage est alors contraint sur chaque éléments. Les erreurs introduites mènent alors à la dégénérescence du noyau du filtre car il n'y a plus l'effet des éléments éloignés.

Cependant, l'extension du filtrage par *interpolation* aux macros éléments par l'intermédiaire d'une moyenne volumique réalisée avec la VMS 2 permet de corriger efficacement ce dernier point. La courbe se rapproche du filtrage correctement résolu. Cependant étant issue d'une méthode de filtrage par *interpolation*, l'évolution de la dissipation du modèle est quasiment identique à l'évolution de la VMS 3. Elle est toutefois 50 fois plus faible.

Ainsi, la principale limite de la méthode de filtrage est son support. Le problème de l'extension du support est une question de coût numérique. Obtenir le vrai support spectral du filtre revient à résoudre exactement l'équation de filtrage et donc à augmenter le coût numérique drastiquement, de l'ordre de 20 fois plus dans notre cas non optimisé. Cependant, cela permet de résoudre correctement de filtrage afin d'avoir les effets attendus. Néanmoins, l'utilisation du filtrage par *interpolation* apporte des améliorations conséquentes vis-à-vis des modèles précédents et ceci pour un coût négligeable, voir nul. Cela valide donc cette approche de filtrage et de modélisation de sous-mailles.

7.3 Conclusion

L'étude des tourbillons de Taylor Green permet de valider d'une part la DNS du code AETHER. D'autres part, il a été possible de comparer quantitativement le modèle VMS à des modèles de référence tel que le Smagorinsky dynamique spectral, à un résultat optimal tel que la DNS filtrée et à des modèles utilisés couramment tels que le Smagorinsky classique pour étudier son apport. Un résumé des performances des modèles principaux est tracé sur la figure 7.10.

Il a été possible de vérifier que le déclenchement du modèle est plus tardif que celui du modèle de Smagorinsky car il se base sur des échelles apparaissant plus tardivement dans le calcul. De plus son intensité est moins élevée traduisant un effet moins dissipatif. Spectralement, cette étude ne permet pas de discriminer efficacement les modèles de sous-mailles et en particulier les



FIGURE 7.10 – Résumé de la dissipation résolue des différents modèles de sous-maille : DNS filtré (\longrightarrow), Smagorinsky ($\neg \neg$), Smagorinsky dynamique spectral($\rightarrow \rightarrow$), VMS 3 ($\neg \neg$) choisie pour les calculs AETHER.



FIGURE 7.11 – Évolution de la dissipation résolue pour la VMS O_4 (---) et la DNS filtrée (---).

modèles MILES. Toutefois il n'y a pas d'accumulation d'énergie avant la fréquence de coupure ce qui aurait été du à une diffusion trop faible du modèle VMS construit, voir Levasseur [99].

Ces simulations ont aussi permis de valider l'approche de filtrage développée dans cette thèse qui préserve les bénéfices de la VMS. La dégénérescence du noyau du filtre est inévitable afin de mettre en place une méthode de filtrage efficace et adaptée à la méthode numérique. Ainsi, le filtrage par *interpolation* est transparent en terme de coût de calcul mais apporte un bénéfice inégalé tant en résolution de l'écoulement qu'en compréhension théorique de la SGE.

Finalement, la valeur de CFL critique de l'ordre de $CFL_C \simeq 0, 2$ a aussi été confirmée. En effet si l'ordre O_4 et un CFL optimal de 0, 2 sont combinés, les courbes sont relativement proches de la dissipation résolue optimale, voir la figure 7.11.

Sur le tableau 7.2 il est possible de voir les différents temps de calculs par processeurs et par itérations temporelles pour des simulations présentées et non présentées. Ces calculs sont menés à iso-maillage *i.e.* $N = 64^3$, excepté pour les DNS où $N = 256^3$.

Nom	Coût
DNS O_2	2,30
DNS O_3	6,81
MILES O_3	2,90
Smago O_3	$1,\!69$
Smago Sel O_3	$2,\!85$
VMS 1	$1,\!39$
VMS 2	4,26
VMS 3	31,62

TABLE 7.2 – Temps de calculs pour quelques simulations présentées ou non sur le cas des tourbillons de Taylor-Green. Les temps sont rapportés par GPU, par nombre d'itérations temporelles et sous-itérations temporelles.

Chapitre 8

Aéroacoustique du tricorps hypersustenté : LEISA II

Sommaire

8.1	Prés	entation du cas LEISA II
-	8.1.1	Introduction
-	8.1.2	Calcul et maillage
:	8.1.3	Explication de la physique du bec
8.2	Résu	ltats numériques de l'étude du bruit de bec
	8.2.1	Visualisation de l'écoulement
	8.2.2	Étude des grandeurs proche paroi
	8.2.3	Étude de la dynamique et acoustique de l'écoulement 157
8.3	Effet	s de l'ordre spatial et du modèle
	8.3.1	Modèle de Smagorinsky sélectif
	8.3.2	Effet de l'ordre spatial et du maillage
8.4	Cone	clusion

Il est important de valider la mise en œuvre de la méthode VMS hybride sur un cas proche des configurations industrielles. Le cas d'étude sélectionné est une configuration complexe possédant des parois afin de tester le couplage entre VMS et DES. Il est alors possible de vérifier le bon comportement du modèle dans le volume et de s'assurer que les grandeurs physiques en proche paroi ne sont pas dégradées par l'introduction des fluctuations de la SGE. Par ailleurs, l'étude de l'apport de l'ordre élevé sur un calcul complexe peut être quantifié. Cette dernière étude permet d'estimer le gain en terme de précision mais aussi en terme de restitution des phénomènes physiques. Enfin ce projet a permis de disposer de données expérimentales de bonne qualité et de partager avec d'autres équipes de recherche l'analyse des résultats. Dans cette optique, l'étude d'un tri-corps est pertinente et permet par ailleurs de mieux comprendre la physique de cet l'écoulement.

8.1 Présentation du cas LEISA II

8.1.1 Introduction

Le projet LEISA II a été présenté par Manoha et Pott-Pollenske [108]. Il s'agit d'une base de données expérimentales sur un tri-corps hypersustenté. Ces *workshops* permettent d'évaluer les simulations numériques et de mieux comprendre les écoulements et la génération de bruit de voilure intervenant dans les phases de vol d'approche ou de décollage. La campagne expérimentale a été menée dans deux souffleries dans le cadre d'une coopération ONERA-DLR afin de



FIGURE 8.1 – Résumé de la physique du bruit bec.

disposer de toute la métrologie nécessaire à l'étude. Premièrement, la maquette a été préparée et testée par le DLR dans la soufflerie aérodynamique F2 à l'ONERA-Le Fauga. Ensuite, les tests acoustiques ont été menés dans la veine ouverte et anéchoïque de la soufflerie AWB au DLR-Braunschweig.

L'étude de ce cas s'avère intéressant pour valider le modèle VMS hybride. Il est possible de voir toute la complexité de la physique autour du bec sur la figure 8.1. Une couche de cisaillement se développe entre la cavité du bec et le corps principal à partir de l'intrados du bec. L'historique spatial et temporel de cette couche de cisaillement est particulièrement difficile à restituer et est de plus à l'origine d'une partie du rayonnement acoustique du bec. En effet les structures créées sont convectées, s'appairent et se cassent en de plus petites puis impactent l'intérieur de l'extrados du bec. Cet historique spatial détermine une partie des caractéristiques du signal acoustique rayonné en champ lointain. Il se trouve d'ailleurs que la plage de fréquences correspondant au phénomène d'impact est la plus nuisible dans les rayonnements en champs lointain lors des campagnes d'essais acoustiques sur avion. Afin de bien restituer cette évolution, les simulations doivent présenter les caractéristiques suivantes. Premièrement, la couche limite et l'écoulement amont doivent être bien restitués afin de fournir les bonnes conditions d'entrée à la couche de cisaillement. C'est dans cette étape que le modèle de paroi doit être performant et que la méthode VMS hybride ne doit pas dégrader les prédictions de la zone URANS proche paroi. Deuxièmement, l'historique de développement de la couche de cisaillement doit permettre la bonne apparition des différentes échelles mais aussi la bonne décorrélation des tourbillons.



FIGURE 8.2 – Géométrie du cas LEISA II.

C'est au tour de la partie SGE du modèle hybride de bien restituer la physique de l'écoulement.

La campagne LEISA II permet de comparer les résultats des simulations numériques aux données expérimentales. La géométrie du tri-corps hypersustenté du cas LEISA II est représentée sur la figure 8.2. La configuration étudiée dans les deux souffleries est extrudée sans flèche selon la direction transversale. L'envergure est de 1,4 m pour F2 et 0,8 m pour AWB permettant d'obtenir une zone médiane où les effets de bord peuvent être considérés comme négligeables. Cette zone médiane est de l'ordre de 0,24 m et peut être visible en rouge sur la figure 8.5. Il est possible d'approcher alors les effets d'une aile infinie. Chacun des corps est fixé grâce à des pattes de raccord visibles aussi sur la figure 8.5. Ces dernières sont positionnées par exemple sur le dessus du bec afin d'essayer de ne pas polluer l'écoulement de la cavité.

Les données expérimentales sont fournies sous différentes formes. Tout d'abord des mesures par fil chaud et des acquisitions LDV permettent de récupérer les spectres de vitesses en différents points de la géométrie et tout particulièrement dans la couche de cisaillement et le sillage du bec. La combinaison du fil chaud et de la LDV permet d'obtenir des signaux de corrélations dans chacune de ces zones. Des capteurs de pression instationnaire ont aussi été installés le long du bord d'attaque du corps principal. D'autres capteurs de pression stationnaire sont présents le long de la géométrie permettant par exemple d'obtenir les C_p en paroi. Des plans PIV dans le plan médian dont l'acquisition peut être vue sur la figure 8.5, permettent d'obtenir une visualisation stationnaire de l'écoulement autour du profil. Sur la figure 8.3 il est possible de voir la vitesse longitudinale au profil et un décollement important est visible sur le volet. Ce dernier point est rediscuté plus loin.

Chacune des ces quantités est acquise dans l'une ou l'autre des souffleries. Mais les deux souffleries présentent des caractéristiques différentes permettant de comparer plus précisément les données numériques. La soufflerie AWB étant une veine ouverte anéchoïque, les comparaisons acoustiques sont moins perturbées par l'écoulement aérodynamique et les réverbérations acoustiques. AWB possède une antennerie au sol de la chambre permettant de récupérer le signal acoustique rayonné en champ lointain. Cette antennerie est visible sur la figure 8.4. Les conditions d'entrée de l'écoulement sont légèrement différentes de celles de la soufflerie F2 menant à

AWB
$$\begin{cases} T_0 = 21,93^{\circ}C \\ V_0 = 60 \text{ m/s} \\ \rho_0 = 1,19 \text{ kg/m}^3 \\ \alpha = 14,5^{\circ} \end{cases}$$

où V₀ est la norme de la vitesse, α est l'angle d'incidence utilisé, ρ_0 la masse volumique et T₀ est la température totale.

L'écoulement aérodynamique est toutefois moins propre que dans la soufflerie aérodynamique à cause de sa déflection par la veine. Cependant à l'intérieur de la soufflerie F2, l'antennerie acoustique en paroi est perturbée par des bruits parasites de part le caractère confiné de la chambre. Par exemple, les microphones étant positionnés sur une plaque rigide, il est important



FIGURE 8.3 – Visualisation du champ de vitesse longitudinale moyen \overline{u} par PIV expérimentale.



FIGURE 8.4 – Configuration AWB avec antennerie au sol, voir données de LEISA II [108].



FIGURE 8.5 – Configuration F2 lors d'une PIV avec pattes de raccord installées et l'antennerie présente au plafond, voir données de LEISA II [108].

de corriger cet effet. La position de cette antennerie est visible sur le plafond de la soufflerie dans la figure 8.5. Les caractéristiques de l'écoulement utilisées sont

F2
$$\begin{cases} P_i = 102436 \text{ Pa} \\ P_0 = 100136 \text{ Pa} \\ T_i = 18,196 \text{ }^\circ\text{C} \\ T_0 = 289,46 \text{ K} \\ M = 0,18041 \\ V_0 = 61,53 \text{ }^\circ\text{m/s} \\ \rho_0 = 1,205 \text{ }^\circ\text{kg/m}^3 \\ c_0 = 341 \text{ }^\circ\text{m/s} \\ \alpha = 6.15^\circ \end{cases}$$

où P_i et P_0 sont respectivement la pression statique et totale, T_i et T_0 sont respectivement la température statique et totale, M le Mach, V_0 la norme de la vitesse, ρ_0 la masse volumique, c_0 la vitesse du son et α l'angle d'incidence. Dans l'étude numérique, il est important de prendre en compte ces critères expérimentaux qui permettent de quantifier les forces et faiblesses de chaque soufflerie. Les données acoustiques en champs lointain sont corrigées plus loin grâce aux données ci-dessus.

8.1.2 Calcul et maillage

Pour la restitution par calcul, le profil LEISA II a été extrudé selon l'axe y de y = 0 mm à y = 60 mm. Les conditions aux limites utilisées sont des conditions de champ libre aux bords infinis et des conditions de périodicité sur les plans y. Les conditions aux limites n'ont pas été abordées dans la partie numérique car elles ne sont pas au cœur du sujet de cette thèse. Les conditions aux limites en champs lointain ne sont pas anéchoïques mais un déraffinement de maillage progressif est réalisé afin d'atténuer progressivement les structures et ondes acoustiques



FIGURE 8.6 – Déraffinement progressif à l'infini.

du calcul avant d'atteindre les conditions aux limites qui sont purement aérodynamiques, voir 8.6. De plus sur la durée totale de la simulation instationnaire, les ondes acoustiques n'ont pas le temps d'atteindre les limites du domaine. Pour plus d'information pour les conditions aux limites en éléments finis dans AETHER se reporter à Levasseur [99].

La distance de 60 mm en envergure choisie est plus grande que la longueur de corrélation transverse dans le bec et permet de considérer que la simulation est celle d'une aile infinie. Cette hypothèse est validée *a posteriori* dans la présentation des résultats. Les conditions d'entrée sont choisies comme préconisé par l'équipe de LEISA II où M est le nombre de Mach et α est l'incidence du calcul.

$$\begin{cases} P_0 = 100136 \text{ Pa} \\ M = 0.1804 \\ T_0 = 289.46 \text{ K} \\ \alpha = 6.15^{\circ} \end{cases}$$

Dans le but d'avoir un maillage de taille raisonnable pour la simulation, seule la partie du bec est étudiée en détail permettant de concentrer la distribution des nœuds dans cette zone. En effet, l'étude du volet serait beaucoup trop coûteuse car elle nécessiterait un effort de maillage sur tout le tri-corps afin de simuler correctement l'historique spatial et temporel de l'écoulement jusqu'au volet. L'étude de ce cas consiste donc à valider l'approche de la VMS hybride en capturant le bruit de bec, qui s'est avéré expérimentalement être la source dominante pour ce profil.

La discrétisation spatiale transversale est structurée et régulière de pas $\Delta y = 0,5$ mm. Cependant selon les axes x et z, le maillage est totalement non structuré. Les éléments utilisés sont des tétraèdres d'ordre spatial O_3 utilisant des fonctions d'interpolation quadratiques. La structure globale du maillage est visible sur la figure 8.7.



FIGURE 8.7 – Visualisation globale du maillage O_3 (maillage 1). Par définition, les nœuds sont identiques dans le cas du maillage iso- \mathcal{P}_2 équivalent (maillage 2).

Les pas de maillage Δx et Δz sont contrôlés par métrique dans les zones d'intérêts situées entre le bec et le corps principal afin d'obtenir un maillage progressivement raffiné permettant d'épouser l'évolution physique spatiale de l'écoulement. Ce maillage est visible sur la figure 8.8. Il est isotrope dans le plan xz permettant de simplifier le calcul de la taille de barre mais aussi de mettre de côté les problématiques d'anisotropie du maillage sur les modèles. L'utilisation de la longueur $\Delta^{Vol} = \sqrt[3]{\Omega^e}$ est justifiée dans la section 4.5.2 consacrée au modèle VMS. Le maillage raffiné est composé de 3 zones dessinées de manière à avoir des mailles plus fines aux endroits où l'écoulement est constitué de gradients locaux : typiquement la zone de cisaillement. La première zone vise à rendre le maillage de la cavité isotrope tel que $\Delta x = \Delta z = 0, 2$ mm. La seconde zone raffine la couche de cisaillement et la zone d'impact en visant $\Delta x = \Delta z = 0, 15$ mm. Finalement la dernière zone permet de réduire la taille de barre aux alentours du point de rebroussement du bec car les structures y sont très fines. La taille de barre y est de $\Delta x = \Delta z = 0, 1$ mm. Le maillage final O_3 est composé de 35×10^6 nœuds et de 26×10^6 éléments. Ce maillage est nommé maillage 1.

Ce maillage de référence est alors décliné en sa version d'ordre standard O_2 afin de pouvoir quantifier l'effet de l'ordre sur la simulation. Les caractéristiques de ce maillage sont très simples. En effet, les éléments d'ordre élevé sont découpés en 8 éléments élémentaires vu comme des éléments d'ordre standard O_2 . Cela permet de conserver les même nœuds mais 8 fois plus d'éléments *i.e.* 208 × 10⁶. Comme les nœuds ne changent pas, les grandeurs du maillage sont identiques au maillage O_3 . Ce maillage est nommé maillage 2 et une description des maillages d'ordre élevé et iso- \mathcal{P}_2 équivalents est donnée 7.2.

Enfin, les résultats sur deux derniers maillages sont aussi mentionnés. Ces maillages sont d'ordre O_2 à 38 et 89 millions de nœuds permettant de quantifier le gain de l'ordre élevé comparé à des raffinements de maillage. Ces maillages n'ont pas subit de processus visant à rendre les mailles isotropes dans les zones d'intérêts. Ce sont donc des tailles de barres moyennées qui sont précisées dans le tableau 8.1. Ces maillages sont nommés respectivement maillages 3 et 4. Une vue globale de ces maillages est visible sur les figures 8.9 et 8.10. Des vue des maillages dans la cavité et autour du point de rebroussement sont montrées sur la figure 8.11.



FIGURE 8.8 – Étape de construction du maillage dans la cavité. (a) Maillage initial, (b) première zone, (c) deuxième zone et (d) troisième zone. Maillages 1 et 2.



FIGURE 8.9 – Visualisation globale du maillage 3.



FIGURE 8.10 – Visualisation globale du maillage 4.



FIGURE 8.11 – Visualisation de la cavité du bec du maillage 3 (a) et 4 (c) et de la zone autour du point de rebroussement du maillage 3 (b) et 4 (d).

Num	Ν	Ordre spatial	Δx_{ref}^1	Δx_{ref}^2	Δx_{ref}^3	Δy_{ref}	Δn_{min}
/	$[10^6]$	/	$C^*[10^{-4}]$	$C^*[10^{-4}]$	$C^*[10^{-4}]$	$C^{*}[10^{-4}]$	$C^*[10^{-4}]$
1	35	O_3	6,66	$5,\!00$	$3,\!33$	$16,\!66$	$0,\!05$
2	35	O_2	6,66	$5,\!00$	$3,\!33$	$16,\!66$	$0,\!05$
3	38	O_2	18,2	18,2	16,3	$33,\!33$	$0,\!9$
4	89	O_2	$4,\!5$	$4,\!5$	2	$33,\!33$	$_{0,1}$

TABLE 8.1 – Propriétés des maillages pour les calculs LEISA II.

Num	Nom	Modèle	Maillage	Ordre spatial	Courbes
/	Expe	/	/	/	
1	VMS	VMS	1	O_3	
2	Smago O_3	Smagorinsky sélectif	1	O_3	-0-
3	Smago O_2	Smagorinsky sélectif	2	O_2	-0-
4	Smago 38	Smagorinsky sélectif	3	O_2	
5	Smago 89	Smagorinsky sélectif	4	O_2	

TABLE 8.2 – Tableau récapitulatif des calculs comparés.

Les propriétés des maillages sont résumées dans le tableau 8.1 où C = 300 mm est la corde de référence, ref représente la taille de barre dans la cavité du bec, Δx_{ref}^i est la longueur de maille moyenne dans un plan y constant de chacune des zones du maillage décrites ci-dessus, Δy_{ref} est la longueur de maille le long de l'axe y et enfin Δn_{min} est la hauteur de première maille par rapport à la paroi dans la zone d'intérêt.

La simulation se déroule en plusieurs étapes. Tout d'abord une simulation RANS est effectuée afin de fournir un prédicteur correct pour initialiser le calcul instationnaire. Puis un calcul instationnaire intermédiaire est réalisé afin d'évacuer les informations de champ moyen du calcul stationnaire. La durée de cette simulation est prise de l'ordre de 12, 5 fois le temps de convection sur le profil *i.e.* 60 ms. Enfin le calcul instationnaire proprement dit est déclenché afin d'obtenir un signal exploitable de longueur 120 ms, soit 25 temps de convection. Ces grandeurs sont préconisées par les auteurs du workshop. Le pas de temps est 7×10^{-7} secondes. Le CFL_C lui étant associé est de 0,75. Ceci permet d'être dans la fenêtre de pas d'espace et de temps où la dissipation numérique spatiale et temporelle s'équilibrent pour le code AETHER aussi bien à l'ordre simple O_2 où l'équilibre est aux alentours de 1, qu'en ordre élevé O_3 où l'équilibre est aux alentours de 0,2.

Les simulations sont faites avec la méthode éléments finis du code AETHER et les modèles de sous-mailles disponibles. Les modèles de sous-mailles testés sont ceux du Smagorinsky sélectif et de la VMS implémentée dans cette thèse. Le modèle RANS associé à la méthode hybride et à l'équivalent du modèle de Smagorinsky sélectif est le modèle de la DDES proposée par Spalart *et al* [139]. Les calculs réalisés sont répertoriés dans le tableau 8.2.

8.1.3 Explication de la physique du bec

L'étude du bruit de bec et des profils hypersustentés en général est un sujet d'actualité en aéroacoustique. Ce bruit de bec est notamment décrit dans les travaux de Choudhari, Khorrami et Lockhard [19, 104, 105], Terracol, Manoha *et als* [144] ainsi que par Deck et Laraufie [28]. Le bruit de voilure est une des sources majoritaires lors de l'atterrissage. Les puissances de calculs permettent désormais de réaliser des études plus approfondies de la physique régissant l'écoulement de telles géométries complexes. Cependant, de nombreux mécanismes sont encore mal compris ou inexpliqués. Dans ce but, des colloques sont organisés en partie sur ce thème,

comme celui du workshop Benchmark for Airframe Noise Computations (BANC) afin de pouvoir converger sur les méthodes de calculs, la compréhension de ces cas et pouvoir mieux concevoir les voilures. Trois profils ont été proposés lors des différentes sessions de ce colloque : LEISA réalisé par le DLR et l'ONERA [46, 156], LEISA II réalisé par l'ONERA et le DLR et 30P30N réalisé par la NASA [20, 114, 146]. Tous sont des profils hypersustentés avec un écoulement à faible Mach, M = 0, 15 pour LEISA et M = 0, 12 pour 30P30N, et dont l'angle d'incidence peut varier.

La physique du bec est régie en partie par un phénomène de cavité. Les phénomènes de cavité sont décrits dans Gloerfelt [51]. Le bec d'un système hypersustenté forme une cavité dont la définition géométrique varie avec l'incidence. L'écoulement affleurant la partie inférieure (intrados) du bec crée une couche de cisaillement en interagissant avec l'écoulement présent dans la cavité à partir du point de rebroussement, voir figure 8.1. Le long de cette couche de cisaillement, les structures se détruisent et se décorrèlent jusqu'à l'impact/rattachement sur la partie supérieure (extrados) du bec. Cet impact crée des ondes acoustiques qui interagissent avec la couche de cisaillement et peut ainsi produire un mécanisme de rétroaction. Des instabilités de Kelvin-Helmholtz [93] qui sont typiquement présentes dans ce type de couche de cisaillement, apparaissent et créent alors des structures sous forme de rouleaux bidimensionnels. Cet effet d'interaction a été décrit par Choudari et Khorrami [19]. Les tourbillons de Kelvin-Helmholtz sont issus d'une couche de cisaillement au profil de vitesse en tangente hyperbolique ou plus généralement un profil possédant un point d'inflexion. Les structures de Kelvin-Helmholtz apparaissent sur les spectres à la fréquence correspondante au mode primaire pour une valeur de

$$f = 0.033 \frac{u_m}{\delta_\theta} \tag{8.1}$$

où u_m est la moyenne des vitesses encadrant la couche de cisaillement et δ_{θ} est l'épaisseur de quantité de mouvement au travers de la couche de cisaillement définie par

$$\delta_{\theta} = \frac{1}{\Delta U^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(u_1 - u\left(s\right) \right) \left(u\left(s\right) - u_2 \right) ds$$

où u_1 et u_2 sont respectivement les grandeurs maximale et minimale des vitesses à l'extérieur de la couche de cisaillement, s l'abscisse curviligne en travers de celle-ci et $\Delta U = u_1 - u_2$. Cette formule est issue de l'étude des instabilités. Ces tourbillons bidimensionnels ne sont pas parfaitement rectilignes dans la direction transversale à cause des effets combinés du mode secondaire des instabilités de Kelvin-Helmholtz associé à l'état tridimensionnel du flux. Cependant, ces structures sont très rapidement détruites et deviennent tridimensionnelles comme le font remarquer Jenkins [75] et Choudhari [19]. Ces tourbillons sont alors très décorrélés dans la direction transversale. Ils sont convectés et Terracol [144] constate qu'ils s'appairent entre eux afin de recréer des tourbillons de taille plus importante. Ces tourbillons ont toutefois la particularité de ne pas générer un champ acoustique significatif. De manière générale, la décorrélation du champ de vitesse est beaucoup plus rapide que celui du champ de pression dans la couche de cisaillement.

Les structures de la couche de cisaillement viennent alors impacter l'extrados du bec et générer des ondes acoustiques. Une partie de ces structures totalement turbulentes est aspirée par la fente du bec et vient interagir avec le bord de fuite du bec où se développe un sillage. Ce bord de fuite génère un échappement tourbillonnaire contra-rotatif de type von Kármán qui sera ici largement tridimensionnel. Khorrami *et als* [82] et Terracol *et als* [144] montrent que ce type d'écoulement génère un rayonnement acoustique tonal basé sur l'épaisseur du bord de fuite à un nombre de Strouhal de 0, 2. L'intensité du sillage décroît très rapidement sur une longueur de l'ordre de 3% de la corde. L'écoulement du sillage est aussi marqué spectralement par l'aspiration des structures issues de la couche de cisaillement proche de l'impact. Ce sont les interactions fréquentes de ces structures avec celles du sillage de bord de fuite qui décorrèlent totalement les structures de von Kármán. D'ailleurs la trajectoire du sillage est désaxée par rapport au bord

de fuite vers l'extérieur du bec dans les calculs présentés, montrant encore une fois que l'allée de von Kármán est perturbée par un écoulement énergétique venant de la cavité. Ces interactions aléatoires entre les structures de la couche de cisaillement et du sillage peuvent être à l'origine d'un élargissement du pic associé aux allées de von Kármán, celles-ci générant généralement un pic tonal fréquentiel. En effet, ces interactions perturbent progressivement l'intensité et la fréquence tonale pour enrichir le spectre de bruit. Ces différentes interactions sont décrits dans la thèse de Galdeano [46]. Toute cette description permet de vérifier la cohérence des résultats numériques qui sont obtenus dans ce travail.

Par ailleurs, certains effets ne sont pas encore expliqués dans la présentation ci-dessus. Par exemple, si le bruit de bec fait intervenir une physique d'impact et de recirculation de cavité, alors des fréquences de Rossiter doivent apparaître et être liées aux pics générés par l'impact. Rossiter [127] présente la formule théorique dans le cas d'une cavité

$$f_n = \frac{U_\infty}{L} \frac{n - \alpha}{M + \frac{1}{\kappa}}$$

où κ prend la valeur empirique de 0,57, α est recalé expérimentalement en fonction du rapport de la longueur L sur la profondeur D de la cavité et n représente le mode de Rossiter. Une récente étude menée par Terracol, Manoha et Lemoine [145] montre que la formule de Rossiter n'est pas pertinente pour quantifier le phénomène. Mais ils dérivent une expression analogue à partir d'un raisonnement identique permettant d'exprimer analytiquement la fréquence des pics d'impact. La formule est la suivante

$$f_n = n \frac{U_\infty}{L_a} \frac{1}{M + \frac{\alpha_l}{\kappa_n}}$$
(8.2)

où U_{∞} est la vitesse à l'infinie, L_a est la distance en ligne droite entre le point d'impact et le point de rebroussement, *n* l'harmonique considérée, M le mach, $\alpha_l = L_v/L_a$ où L_v est la distance curviligne du chemin de la couche de cisaillement et enfin $\kappa_v = U_v/U_{\infty}$ où U_v est la vitesse de convection des tourbillons. Cette formule représente la rétroaction impliquée dans la cavité de bec mais est difficile à utiliser *a priori* à cause des grandeurs définies par la couche de cisaillement. Elle n'exprime pas non plus directement l'interaction entre le sillage et la couche de cisaillement, ni l'effet de l'incidence. Cet effet d'incidence semble être un paramètre majeur dans la simulation numérique, tant bien sur les cas LEISA II et 30P30N.

En effet, l'angle d'incidence change la géométrie de la cavité équivalente du bec. Ce changement d'incidence modifie la trajectoire de la couche de cisaillement et donc par exemple la profondeur de la cavité équivalente dans le cas de la formule de Rossiter ou de la longueur curviligne de la formule (8.2). L'un des résultats du colloque BANC IV [AIAA/CEAS, Lyon, 2016] est que plus l'incidence augmente, moins les fréquences d'impact se font ressentir au point de rattachement. Cet effet est aussi mis en évidence dans [145]. Le deuxième point soulevé lors de BANC IV est la présence d'une structure de pression cohérente dans le bec dont la longueur d'onde est un multiple de la longueur transversale de la cavité. Cette structure ressemble à un mode de cavité. Elle peut être due au fait que l'écoulement initial soit coincé à l'intérieur du bec, sans pouvoir s'en échapper. Finalement, certains phénomènes fréquentiels semblent être induits par des effets de bord 3D ce qui pourrait être difficile à comprendre dans ce type de simulation.

Ces effets évoquent des phénomènes réellement observés à Dassault Aviation lors d'une campagne d'essai sur maquette d'avion à échelle réduite. Différents spectres de bruit mesurés en soufflerie sont présentés dans les figures ci-dessous regroupant des effets d'incidence α , de vitesse U_0 et de braquage de bec δ . Bien que la maquette soit plus représentative d'un avion réel, une des configurations est très proche du cas étudié : angle d'incidence $\alpha = 6^\circ$, vitesse $U_0 = 60$ m/s. Les spectres présentés ci-dessous ne comportent pas les valeurs d'abscisse et d'ordonnée pour



FIGURE 8.12 – Spectre en décibels rayonné par le bec pour différentes vitesses à angle d'incidence 6° et angle de braquage de bec 30° : $U_0 = 50$ m/s (---), $U_0 = 60$ m/s (---) et $U_0 = 68$ m/s (---).



FIGURE 8.13 – Spectre en décibels rayonné par le bec pour différents angles d'incidence à vitesse 60 m/s et angle de braquage de bec 30° : $\alpha = 6^\circ$ (— —) et $\alpha = 3^\circ$ (— —).

des raisons de confidentialité. Les spectres présentés ici sont des densités spectrales de puissance (DSP) ou *Power Spectrale Density* (PSD) calculées grâce au signal temporel de pression. Les spectres sont tracés en niveau décibel (dB) avec comme pression de référence $P_{ref} = 2 \times 10^{-5}$ Pa. Les spectres étudiés sont issus de microphones positionnés à la verticale sous le profil.

Sur la figure 8.12 sont tracés les spectres rayonnés par le bec pour des effets de vitesse. L'incidence est fixée à 6° et le braquage de bec à 30° . Les spectres sont large bande et ne présentent pas de pic. Toutefois comme il était possible de l'attendre, plus la vitesse augmente, plus l'énergie des spectres rayonnée est importante.

La figure 8.13 présente l'effet de la variation d'incidence à braquage $\delta = 30^{\circ}$ et vitesse $U_0 = 60$ m/s fixés. Il est clairement possible d'observer l'effet d'incidence décrit ci-dessus sur la physique du bec. Le spectre (--) présente de nombreuses fréquences tonales, dont certaines peuvent être attribuées à la complexité de la configuration réelle mise en jeux.

Enfin sur la figure 8.14 est ajouté l'effet de débraquage de bec à la figure 8.13. Quand le bec est débraqué, les pics rayonnés sont détruits. Tout simplement, il est possible que le corps principal vienne rompre le chemin de la couche de cisaillement responsable des pics d'impact et donc tuer le phénomène de rétroaction. Par ailleurs vu du bec, une baisse de l'angle de braquage



FIGURE 8.14 – Spectre en décibels rayonné par le bec pour différents angles d'incidence et braquage de bec à vitesse 60 m/s : $\alpha = 6^{\circ}$ et $\delta = 30^{\circ}$ (—), $\alpha = 3^{\circ}$ et $\delta = 30^{\circ}$ (—) et $\alpha = 3^{\circ}$ et $\delta = 20^{\circ}$ (—).

est analoque à une augmentation d'incidence.

Pour quantifier le bruit rayonné par le bec comparé aux autres parties de l'avion, une cartographie des sources a été produite par Dassault Aviation (méthode DAMAS). Sur la figure 8.15 sont présentées les cartographies à la fréquence du pic maximal visible dans la configuration maquette à faible incidence et braquage de bec maximal. À incidence 6° présentée sur la figure 8.15(a), les sources acoustiques présentes sur le bec sont quasiment aussi puissantes que celles issues des autres éléments. Les sources acoustiques semblent êtres plus dues à des effets de bord, par exemple au niveau de la jointure avec le fuselage. Dès que l'incidence diminue $\alpha = 3^{\circ}$ 8.15(b), seule la source acoustique du bec est visible. Finalement comme attendu, lorsque le bec est débraqué 8.15(c), les sources acoustiques associées sont négligeables comparées aux trains d'atterrissage. En effet dans ce cas, l'effet de coin est diminué par un braquage de bec plus faible menant à une cartographie comme 8.15(a) mais sans l'intensité acoustique des coins de bec.

8.2 Résultats numériques de l'étude du bruit de bec

En premier lieu, seule la simulation 1 *i.e.* de la VMS sur le maillage 1 est présentée afin d'étudier les phénomènes numériques séparément des effets de modèles. Comme précisé, la simulation est réalisée sur l'ensemble du profil hypersustenté bien que seul le bec soit étudié précisément. Les premiers résultats de l'étude du champs moyen de la figure 8.16 montrent une très bonne correspondance avec les visualisations PIV de l'expérience 8.3. Tout le long du profil, le champ est superposable à celui de l'expérience à l'exception du volet où un faible décollement est visible pour le calcul mais où la PIV présente un très large décollement.

La figure 8.17 représentant la vorticité transversale instantanée permet de localiser les zones à forte activité tourbillonnaire sur le profil. Il est possible de voir clairement que la cavité du bec ainsi que son sillage présentent de fortes fluctuations. De plus la couche limite de l'extrados du corps principal s'épaissit rapidement et est perturbée par le sillage du bec. La cavité du volet présente une épaisse couche de mélange et le volet est perturbé par le sillage menant au léger décollement de celui-ci.

La figure 8.18 permet d'étudier la vitesse longitudinale moyenne dans la cavité et de les comparer aux résultats expérimentaux. Il est possible de voir que les deux champs sont très proches permettant ainsi de commencer à valider la simulation numérique.



FIGURE 8.15 – Procédé de localisation de source DAMAS pour la fréquence du pic principal figure 8.13. (a) $\alpha = 6^{\circ}$, $\delta = 30^{\circ}$ et $U_0 = 60$ m/s. (b) $\alpha = 3^{\circ}$, $\delta = 30^{\circ}$ et $U_0 = 60$ m/s. (c) $\alpha = 3^{\circ}$, $\delta = 20^{\circ}$ et $U_0 = 60$ m/s.



FIGURE 8.16 – Visualisation de la vitesse longitudinale moyenne \overline{u} et de ses iso-niveaux le long du profil dans le plan médian y = 30 mm.



FIGURE 8.17 – Visualisation de la vorticité transversale w_y le long du profil dans le plan médian y = 30 mm.



FIGURE 8.18 – Champs de vitesse longitudinale moyenne \overline{u} et de ses iso-niveaux pour la simulation (a) et l'expérience (F2) (b).



FIGURE 8.19 – Énergie cinétique turbulente 2D $k_t^{2D} = (\overline{u^{*2}} + \overline{w^{*2}})/2$ adimensionnée k_t^{2D}/U_{∞}^2 pour (a) la simulation et (b) l'expérience (F2).

Par l'intermédiaire de la couche de cisaillement créée par le bec dans la cavité, son étude permet de préciser les performances du modèle VMS hybride et de l'apport de l'ordre élevé.

En premier lieu, la visualisation de l'écoulement apporte des informations qualitatives sur le comportement de la partie SGE du modèle sur le champ aérodynamique afin de constater si la physique de l'écoulement de bec est bien restituée. La visualisation de la viscosité turbulente ou du champ filtré permet de comprendre comment la VMS filtre l'écoulement pour en extraire les informations pertinentes. Mais aussi cela permet de vérifier que le modèle de sous-maille est bien activé dans les zones adéquates. Enfin, il est possible de tracer les champs responsables du modèle de Smagorinsky et du modèle VMS afin de conclure sur la topologie de l'écoulement.

Une étude des coefficients proche paroi permet de vérifier la capacité du modèle VMS à introduire les fluctuations sans détériorer le champs de la couche limite. Cette étude valide l'approche faible hybride de la VMS qui ne doit pas détériorer les performances des simulations URANS proche paroi.

Enfin l'étude des spectres en vitesse et pression ou des spectres acoustiques en champs lointain, conclut sur la bonne résolution dynamique de l'écoulement. Il est intéressant de restituer un maximum des mécanismes physiques de l'écoulement.

Cette partie se concentre uniquement sur les résultats issus de la simulation à l'ordre O_3 avec le modèle hybride de la VMS.

8.2.1 Visualisation de l'écoulement

Premièrement, l'étude topologique de l'écoulement valide la simulation issue du modèle VMS sur certaines grandeurs pertinentes.

Énergie cinétique turbulente et S_p

La visualisation de l'énergie cinétique turbulente permet d'apprécier les zones de l'écoulement où l'énergie issue des échelles de sous-maille est la plus importante. Elle représente les zones dans lesquelles les structures turbulentes sont créées et sont les plus énergétiques. Elle est calculée grâce à la formule

$$k_t = \frac{1}{2} \left(\overline{u^{*2}} + \overline{v^{*2}} + \overline{w^{*2}} \right)$$


FIGURE 8.20 – Visualisations de (a) l'énergie cinétique turbulente k_t adimensionnée k_t/U_{∞}^2 et (b) Sp instantané.

Ce sont les endroits où le modèle doit être activé afin de bien prendre en compte le flux diffusif des échelles non calculées et de produire correctement les petites échelles de la turbulence.

Sur la figure 8.19 l'énergie cinétique turbulente 2D correspondante à k_t sans la composante transversale de vitesse, est tracée. La topologie des deux champs est analogue. Cependant en intensité, l'énergie cinétique turbulente de l'expérience est plus faible. Deux artefacts apparaissent sur le champs mesuré au niveau du coin haut-gauche et du bord de fuite. En effet, dans le volume à l'extérieure de la cavité, aucune structure turbulente n'est normalement produite. Par ailleurs au bord de fuite, l'intensité est trop concentrée sur une zone réduite et devrait plutôt s'étaler comme un panache. Cette recirculation est aussi visible sur la figure 8.18(b). Cela peut être du par exemple à une interaction avec les bras de raccord ou une difficulté d'acquisition expérimentale. L'acquisition des vitesses root mean square (RMS) est en effet difficile à réaliser en contexte expérimental. Ceci peut expliquer la différence de champs d'énergie cinétique turbulente entre le calcul et l'expérience bien que les topologies possèdent les mêmes tendances. Il est également possible que le calcul surestime un peu k_t .

La grandeur d'énergie cinétique 3D est représentée sur la figure 8.20(a) et est similaire à celle obtenue sur le cas LEISA par Nebenführ et als [115]. L'énergie cinétique turbulente est importante au point de rattachement sur l'extrados du bec. C'est en effet dans cette zone d'impact que l'activité de création de petites structures énergétiques est la plus importante. Elle est aussi non négligeable dans la couche de cisaillement et dans les zones de fuite à droite du point de rattachement. Ce panache d'énergie cinétique turbulente est épais ce qui est dû au passage des structures créées lors de l'impact par le bord de fuite de l'extrados. Comme expliqué précédemment, l'injection des structures de la couche de cisaillement dans le sillage apporte beaucoup d'énergie et déclenche très rapidement une destruction de l'allée de von Kármán en 3D voir figure 8.21(b). Dans la zone de recirculation *i.e.* la cavité du bec, la production de structures turbulentes est plus faible mais reste toutefois non négligeable dans le cœur du vortex au centre de la cavité. L'énergie cinétique turbulente donne une mesure de l'épaisseur de la couche de cisaillement qui est très faible au début puis grossit progressivement. En effet, les structures au point de rebroussement possèdent initialement peu d'énergie. Les instabilités de Kelvin-Helmholtz créent des structures qui sont presque 2D au début et avec peu d'énergie. Elles se développent progressivement en énergie, se déstabilisent et ainsi épaississent la couche de cisaillement. L'énergie cinétique turbulente est un bon indicateur au premier ordre, comme pour le cas des tourbillons de Taylor-Green, des endroits de l'écoulement qui possèdent des échelles de sous-maille mais qui sont énergétiques. Dans la couche de cisaillement établie, le rapport entre l'énergie cinétique moyenne amont et l'énergie cinétique turbulente est de l'ordre de 3% dans le cas de l'énergie cinétique turbulente 2D et de 5% sinon. Ces grandeurs se rapprochent de celles trouvées par Deck [27] pour le cas LEISA.

Pour avoir une idée plus structurelle sur la topologie de l'écoulement, une quantité notée S_p est calculée. Lorsqu'elle est utilisée, elle permet d'entrevoir la taille des tourbillons et donc des caractéristiques spectrales de l'écoulement. Cette quantité est inspirée de l'histoire des procédés expérimentaux permettant d'observer les variations de masse volumique, comme par exemple la strioscopie et les images type Schlieren. Un exemple de S_p est tracé sur la figure 8.20(b) et le champ est calculé grâce à la formule suivante

$$S_{p} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^{2} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)^{2} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^{2}} = \frac{1}{2} \|\underline{\mathbf{grad}}\left(\rho\right)\|$$

Dans la première partie de la couche de cisaillement, il est possible d'apercevoir des tourbillons de Kelvin-Helmholtz de nature 2D et tubulaires typiques d'une physique de couche de cisaillement. Pour plus d'information sur la théorie des couches de cisaillement se reporter à [6, 95, 93, 94, 112, 133]. Ces derniers grossissent puis se cassent et s'appairent en des tourbillons 3D. S_p devient alors très diffus ce qui est synonyme d'un spectre large bande, sans structures dominantes. Le phénomène important ici est l'appariement des structures issues des instabilités de Kelvin-Helmholtz et leur fragmentation 3D. Le spectre se remplit en hauts nombres d'onde ce qui brouille la visualisation des structures. Par ailleurs, des tourbillons de von Kármán issus d'une topologie de vorticité alternée sont clairement visibles au début du sillage. Comme le montre l'énergie cinétique turbulente, ces tourbillons sont très intenses dès le début du bord de fuite mais finissent rapidement par se détruire et devenir entièrement 3D. Il est important de constater que la direction du sillage n'est pas alignée avec le bord de fuite, ce qui est dû à l'échappement répétitif des tourbillons après le point de rattachement.

En couplant les analyses sur le champ de l'énergie cinétique turbulente et de S_p , il est possible de prédire *a posteriori* le comportement du modèle de sous-maille. Ce dernier doit strictement s'activer dans les zones décrites par S_p et l'énergie cinétique turbulente. De plus l'épaisseur des structures détectées ainsi que leur intensité doivent suivre l'historique décrit ci-dessus : des petites structures peu énergétiques dans la recirculation et au début de la couche de cisaillement. Ainsi, dans la couche de cisaillement, le modèle de sous-mailles doit identifier et sélectionner uniquement ces petites structures qui deviennent plus énergétiques.

Visualisation du critère Q

Le critère Q est un outil mathématique permettant de visualiser les structures présentes dans l'écoulement. D'après Jeong et Hussain [76], il est calculé comme la différence des normes des tenseurs symétriques et antisymétriques des déformations

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2} \left(\|\underline{\underline{\Omega}}\|^2 - \|\underline{\underline{S}}\|^2 \right)$$

L'information visuelle rendue par ce critère est de même intérêt que le critère λ_2 qui correspond à la seconde plus grande valeur propre du tenseur $\underline{\Omega}^2 + \underline{S}^2$ et utilisé pour la figure 7.1.

La figure 8.21 propose une visualisation 2D et 3D de cette grandeur. Cette quantité valide l'évolution qualitative de la couche de cisaillement et du sillage. Premièrement, les structures au début de la couche de cisaillement sont très fines et parfaitement ordonnées. Les tourbillons de Kelvin Helmholtz sont clairement visibles. D'ailleurs ceux-ci ne sont pas parfaitement bidimensionnels selon la direction transversale, comme il peut être vu sur la figure 8.21(a). Deuxièmement, les tourbillons de von Kármán sont aussi bien marqués mais sont très rapidement



FIGURE 8.21 – (a) Critère Q visualisant les instabilités de Kelvin-Helmholtz. (b) Critère Q visualisant les tourbillons de von Kármán. Les isocontours sont coloriés avec S_p . (c) Critère Q adimensionné QC/U_{∞}^2 sur une coupe en y = 30 mm.



FIGURE 8.22 – (a) Viscosité turbulente de la DES comparée à la viscosité moléculaire $\nu_{\text{DES}}^T/\nu - 1$. (b) Viscosité turbulente de la VMS comparée à la viscosité moléculaire $\nu_{\text{VMS}}^T/\nu - 1$. (c) Viscosité turbulente de la VMS comparée à la viscosité turbulente du modèle DES $\nu_{\text{VMS}}^T/\nu_{\text{DES}}^T - 1$.

destructurés sur une longueur de l'ordre de 3% de la corde repliée. Cette grandeur est retrouvée par Jenkins [75]. Les structures après le point de rattachement présentent une topologie tubulaire de *hairpin vortices* dans le sens longitudinal du profil qu'il est possible aussi de retrouver à la fin du sillage. Ce constat est partagé par [145]. Ces tourbillons longitudinaux sont surement déstabilisant pour les structures de von Kármán.

Visualisation de la viscosité turbulente

La visualisation de la viscosité turbulente est un premier indicateur du comportement du modèle DES et VMS hybride. Sur la figure 8.22, il est possible de voir le champ de la viscosité turbulente issu de la VMS et de la DES comparé à la viscosité moléculaire. L'indice T représente la somme du terme avec la viscosité moléculaire. Typiquement

$$\frac{\nu_{\text{VMS}}^T}{\nu_{\text{DES}}^T} - 1 = \frac{\nu_{\text{VMS}} + \nu}{\nu_{\text{DES}} + \nu} - 1 = \frac{\nu_{\text{VMS}} - \nu_{\text{DES}}}{\nu_{\text{DES}} + \nu}$$

Cette approche permet de tracer le rapport avec la viscosité issue de la DES car sinon celle-ci peut devenir nulle et faire diverger la quantité.

Sur la figure 8.22(a) est tracé le rapport de la viscosité turbulente issu du modèle DDES de Spalart qui dégénère loin de la paroi en un pseudo-Smagorinsky et de la viscosité moléculaire. La quantité représentée est $\nu_{\text{DES}}^T/\nu - 1$ où l'indice t pour turbulent est omis. Le modèle DDES est très intense dans la couche limite de l'extrados mais semble peu s'activer dans les zones d'intérêts comme par exemple la couche de cisaillement, l'impact ou le sillage.

Sur la figure 8.22(b) est tracé le rapport de la viscosité turbulente de la VMS ν_t^{VMS} comparée à la viscosité moléculaire ν , soit $\nu_{\text{VMS}}^T/\nu - 1$. La première chose visible est qu'à l'extérieur de la zone d'intérêt, ν_t^{VMS} est négligeable devant la viscosité moléculaire. En effet, ce sont des zones où les structures de l'écoulement sont très grosses voir inexistantes. Il n'y a donc pas besoin de modèle, les équations de Navier-Stokes y sont bien résolues. Cependant dans la cavité ν_t^{VMS} peut devenir intense, voir supérieure à la viscosité moléculaire et cela spécialement dans les zones des couches de cisaillement et à l'impact avec le bec. En clair, aux endroits précisés par S_p et k_t . À l'intérieur de la cavité, ν_t^{VMS} est de l'ordre de 60% de ν car il existe de petites structures mal résolues et peu énergétiques. La même analyse se retrouve au début de la couche de cisaillement comme précisé dans la partie sur l'analyse de S_p . Une très petite zone apparait aux alentours du point de rebroussement où ν_t^{VMS} est très intense s'expliquant par le fait que les structures y étant très fines, le modèle s'active fortement pour combler le manque de résolution. Très rapidement, ν_t^{VMS} devient plus raisonnable car les structures mises en jeux sont plus grosses et donc mieux résolues : ce sont les tourbillons de Kelvin Helmholtz. ν_t^{VMS} s'intensifie fortement dès la déstabilisation de ces tourbillons jusqu'à l'impact avec l'extrados. Il est aussi possible de constater une zone épaisse sur l'extrados du bec. Cette zone est en fait la zone de protection hybride *i.e.* la zone de transition entre le modèle VMS et DES. ν_t^{VMS} est en fait égale à ν_t^{DES} dans cette zone. Cela permet de noter par ailleurs que l'évolution de la couche limite est très intense dans cette zone soumise à des gradients de pression l'épaississant contrairement à l'intrados où la zone est à peine visible.

Sur la figure 8.22(c) est tracé le rapport de ν_t^{VMS} avec la viscosité turbulente issue du modèle DES ν_t^{DES} . La quantité représentée est donc $\nu_{\text{VMS}}^T/\nu_{\text{DES}}^T - 1$. Comme cette dernière peut devenir nulle, les viscosités turbulentes sont sommées avec la viscosité moléculaire ν . La soustraction par 1 permet de ramener la visualisation à une échelle de couleur comparable avec la figure précédente. Premièrement, la zone de protection hybride a disparu à l'extrados. En effet, dans cette zone $\nu_t^{\text{VMS}} \simeq \nu_t^{\text{DES}}$ à l'exception de la fin de la couche où les fluctuations de la VMS prennent le dessus. C'est d'ailleurs pour cela qu'il subsiste un fin liseré vert car la viscosité de la VMS est plus intense que celle de la DES dans les zones de forts cisaillements. Deuxièmement, ν_t^{VMS} est plus faible que ν_t^{DES} hors des zones d'intérêts. En effet, un modèle de Smagorinsky classique impose une viscosité non négligeable dès la présence de gradients moyens résolus contrairement à la VMS qui est activée par des structures plus fines grâce au filtrage. La viscosité du modèle de Smagorinsky est en fait beaucoup plus intense que la viscosité de la VMS, mais l'échelle de couleur saturant les valeurs négatives ne permet pas d'apprécier cette remarque. Troisièmement, la structure du champs est identique au champs de la figure 8.22(b) à quelques nuances plus fines. En effet, dans la cavité les viscosités turbulentes Smagorinsky et VMS ont une topologie semblable, à l'exception que la VMS est plus sélective sur ses zones d'activation. Ainsi la VMS est plus active et précise dans la zone de forts cisaillements que la DES mais moins active dans les zones où les structures sont plus grossières, typiquement dans la zone de recirculation.

En étudiant l'intensité de la VMS, la viscosité turbulente est un indicateur d'activation du modèle. Il semblerait que celui-ci soit plus sensible aux fluctuations de l'écoulement et y réponde plus précisément que le modèle DES.

Visualisation du champ filtré

Pour entrer plus précisément dans le comportement du modèle VMS, il est intéressant de tracer la quantité à l'origine du changement : le filtrage et plus précisément les vitesses filtrées.

Sur la figure 8.23(c), la topologie du champ des vitesses filtrées est analogue à celui de la



FIGURE 8.23 – Quantités pilotant les modèles de sous-mailles adimensionnées par U_{∞}/C : (a) les gradients des vitesses pour la DDES-Smagorinsky $\partial u^{\rm R} / \partial x$ et (b) les gradients des vitesses filtrées pour la VMS $\partial u'' / \partial x$. (c) vitesses filtrées de la VMS u'' adimensionnées par U_{∞} .

viscosité turbulente. Cependant il est possible d'y voir une information supplémentaire : un ordre d'idée des structures captées. Tout d'abord la zone de protection DES est toujours présente sur l'extrados. Le début de la zone de cisaillement est composé de 2 bandes de couleurs, l'une rouge et l'autre bleue. Les structures n'y sont pas visibles car le maillage est trop grossié pour permettre au filtrage d'y discerner des alternances de vitesses. Cela explique donc la zone d'activité de la viscosité turbulente au début de la couche de cisaillement : il y a beaucoup de petites structures mal maillées venant activer fortement le modèle de sous-mailles. Puis des petites structures captées par le filtrage finissent par apparaître se traduisant par une alternance de couleur très fine. Cette alternance devient de moins en moins régulière avec le gonflement du spectre en bas nombre d'onde.

Finalement, la grandeur la plus pertinente afin de connaitre l'effet des différents modèles est de regarder le gradient des vitesses pour le Smagorinsky et le gradient des vitesses filtrées pour la VMS. En effet, ces grandeurs sont à l'origine de l'intensité du flux diffusif ν_t mais représentent aussi le support spectral du modèle *i.e.* sur quelles tailles de structures le modèle s'applique *i.e.* sur quelle partie du spectre s'applique la diffusion ajoutée. Ces grandeurs sont tracées sur la figure 8.23.

Premièrement sur la figure 8.23(a) sont tracés les gradients des vitesses. Le premier constat est que le modèle de Smagorinsky détecte de grosses structures à des endroits où le modèle doit être nul. Typiquement sur les bords d'attaque du corps principal et du bec. Ces zones sont impactées par la modélisation et donc sur-diffusées. Dans la couche de cisaillement, les structures sont beaucoup moins bien marquées. En particulier dans le début de la zone de cisaillement, les structures sont moins bien capturées sur une plus grande longueur menant à une bande plus longue de couleur identique. De manière générale, les structures qui sont détectées sont proches en taille des structures des vitesses filtrées bien que moins bien détectées et globalement plus structurées. Cette remarque semble cohérente avec le fait que dans les deux cas il s'agit de gradients d'ordre 1 : les fonctions d'interpolation O_2 pour une simulation O_3 sont équivalentes à un gradient d'ordre 1. Il s'agit donc d'un effet de filtrage du premier ordre.

Deuxièmement sur la figure 8.23(b) sont tracés les gradients des vitesses filtrées. Il n'y a cette fois-ci plus les vices associés aux gradients moyens. À l'extérieur des zones d'intérêts le modèle est uniformément nul. Cet effet est dû au filtrage. Le modèle ne détecte aucune structure assez fine *i.e.* aucun nombre d'onde assez grand pour déclencher la modélisation. De manière plus précise, la topologie de l'écoulement des gradients des vitesses filtrées est celle de la figure 8.23(c) des vitesses filtrées. La différence notable est la finesse des structures restituées. Le champ est en effet équivalent à un laplacien et donc à un filtrage d'ordre plus élevé : d'ordre 2 dans notre cas.

Ainsi le domaine spectral d'application du modèle VMS se fait sur des structures beaucoup plus fines et précises que dans le cas du modèle de Smagorinsky. Le filtrage permet entre autre d'effacer les effets de gradients moyens qui ne sont pas synonymes d'échelles mal résolues. L'approche du filtrage est donc validée topologiquement.

8.2.2 Étude des grandeurs proche paroi

L'étude des grandeurs proche paroi permet la validation du modèle hybride de la VMS. En effet, la VMS doit pouvoir introduire les fluctuations nécessaires sans pour autant détruire l'évolution du champ proche paroi issue du URANS qu'elle n'est pas capable de restituer correctement.

Étude du coefficient de pression

Le coefficient de pression moyen est tracé sur la figure 8.24. La solution numérique est très proche des résultats expérimentaux tout le long du profil. Une remarque négative peut être toutefois adressée au calcul dans la zone de l'extrados du bec : la simulation SGE surestime les



FIGURE 8.24 – Coefficient de pression moyen à la paroi. Résultat numérique VMS (—) et résultat expérimentaux (F2) en points noirs.

 C_p . Il est important de garder en tête que la configuration choisie est très sensible à l'écoulement comme le montrent les deux constatations suivantes.

Premièrement différents modèles de RANS ont été testés et certains présentent un énorme décollement sur l'extrados du volet. Ce décollement n'est pas visible sur les coefficients de pression expérimentaux car il n'y a pas d'évolution en plateau dans cette zone. Cependant, la PIV expérimentale présente aussi un important détachement sur le volet, voir figure 8.3. Des coupes dans le plan y = 30 mm ont été réalisées sur le calcul RANS Spalart servant de condition initiale au transitoire instationnaire. Elles sont visibles sur la figure 8.25. La figure 8.25(a) correspond à la solution initiale utilisée pour le calcul VMS et il est possible d'y voir un très faible décollement. La figure 8.25(b) est réalisée après avoir pousser plus précisément le résidu lors de la convergence de cette solution initiale. Le calcul RANS finit par ne plus converger et présente un décollement sur le volet ce qui ne correspond pas à ce qui peut être vu sur les C_p expérimentaux. En fonction du modèle de turbulence choisi cette solution initiale peut ou non présenter ce décollement montrant toute la sensibilité physique et numérique de cette étude. Ainsi la solution RANS non décollée a été utilisée pour initialiser le calcul, *i.e.* la solution de la figure 8.25(a).

Deuxièmement l'incidence numérique effective du profil ne correspond pas à celle de l'expérience. En fonction du modèle de turbulence et aussi de la configuration expérimentale, l'incidence préconisée peut différer de celle à donner pour le calcul. Ainsi la recirculation autour du profil est différente et vient impacter différemment le bec. Des tests ont été réalisés en diminuant l'incidence et les C_p sur l'extrados du bec peuvent être presque récupérés pour un angle d'incidence de l'ordre de $\alpha \simeq 5,85^{\circ}$. Ainsi le calcul a une incidence plus élevée que l'expérience. Il est à noter qu'au passage du calcul RANS servant de solution initiale au calcul instationnaire, les coefficients de pression à l'extrados du bec tendent à réaugmenter et le décollement du volet à ne jamais apparaître. Une des conclusions de BANC IV est justement qu'entre le passage de la simulation RANS et de la simulation SGE, les C_p sur l'extrados se mettent à augmenter. Cependant, il a été choisi de ne pas régler les C_p via α afin de répondre aux spécifications du colloque BANC. L'inconvénient de continuer l'étude avec une incidence effective différente de l'expérience se trouve dans la comparaison avec les capteurs. En effet en changeant l'incidence, la trajectoire de la couche de cisaillement change aussi venant ainsi modifier les valeurs des grandeurs de l'équation (8.2) et donc changer légèrement la physique du bec.



FIGURE 8.25 – Visualisation du champ stationnaire \overline{u} RANS en Spalart-Allmaras pour (a) la solution initiale du calcul instationnaire et (b) à convergence plus poussée.



FIGURE 8.26 – (a) Profils de vitesse à la paroi et (b) profils des fluctuations de vitesse à la paroi. Position 1 (---), 2 (---) et 3 (---) respectivement de plus en plus proche du point de rebroussement du bec.

Il est à noter que ces biais de décollement de volet et de C_p ont tous été rencontrés par les membres de BANC IV comme par exemple EXA et l'ONERA.

Étude de la vitesse proche paroi

L'étude des profils de vitesse à la paroi permet de vérifier la pertinence de résolution des couches limites externes servant d'entrée pour la couche de cisaillement et le sillage. Mais surtout le but est de valider la méthode hybride en essayant de savoir si elle ne détériore pas le modèle URANS en introduisant les fluctuations dans la partie supérieure de la couche limite par l'intermédiaire du coefficient f_d , voir (6.1). Pour cela, 6 profils ont été extraits le long du bec : 3 sont positionnés sur l'extrados et 3 sur l'intrados. Chacune de ces deux zones présente un comportement de couche limite très différent.

Sur la figure 8.26 sont tracées les évolutions des profils de vitesse et de fluctuation de vitesse à 3 points de l'intrados du bec. Les trois positions sont respectivement de plus en plus proche du point de rebroussement du bec et sont représentées sur la figure 8.27. Premièrement, tout le long de l'intrados du bec la résolution en maillage est très largement satisfaisante pour la couche limite $y^+ < 1$. Sur la figure 8.26(a), les profils de vitesse suivent une loi typique de sous-couche visqueuse linéaire jusqu'à atteindre un plateau définissant la zone externe de la couche limite aux alentours de $y^+ = 60$. Plus le profil se rapproche du bord de fuite plus la courbe tend à diminuer en niveaux mais ne laisse jamais apparaître une loi logarithmique contrairement à un NACA classique, voir Marsden et als [111] par exemple. Cela signifie que la couche limite ne s'épaissit quasiment pas. La figure 8.26(b) montre l'augmentation des fluctuations de vitesse le long de la couche limite. En effet cette dernière emmagasine progressivement l'énergie qui se traduit par l'augmentation de ces fluctuations. Les courbes ont une allure de cloche présentant des maxima aux alentours de $y^+ = 15$ semblant être la fin de la partie visqueuse de la couche limite. Les fluctuations finissent par décroitre, ne s'annulant pas à l'extérieur de la couche limite car remplacées par les fluctuations de la SGE. Cependant le régime turbulent n'arrive jamais à l'intrados du bec. L'intensité des fluctuations dans la couche limite est de l'ordre de 1% du champs de vitesse. Ainsi, la couche limite de l'intrados servant de grandeur d'entrée pour la couche de cisaillement n'est jamais assez épaisse numériquement pour faire apparaître la zone logarithmique. Il est à noter que le Reynolds turbulent est faible à la fin de cette couche limite et est de l'ordre de $Re_{\tau} = u_{\tau}\delta/\nu \simeq 50$ où δ est l'épaisseur de la couche limite et u_{τ} est la vitesse



FIGURE 8.27 – Rapport de la viscosité turbulente issue du Spalart sur la viscosité moléculaire. Zoom sur l'intrados du bec avec position des capteurs numériques pour les profils de vitesses en respect des couleurs.



FIGURE 8.28 – Profils des fluctuations de vitesse à la paroi pour le profil 2 à l'intrados : coefficient f_d (---), u^+ (---), vitesse hybride entre DES et VMS (---) et vitesses filtrées de la VMS ×50 (---).

de frottement à la paroi.

Cette couche limite laminaire peut sembler suspicieuse si elle est issue d'un modèle de turbulence DES tel que le Spalart-Allmaras en proche paroi. En effet, ce dernier est connu pour être très rapidement turbulent. L'image 8.27 présente un zoom sur l'intrados du bec. La grandeur est identique à la figure 8.22(a). La viscosité turbulente issue du modèle de Spalart est toutefois moins de 2 fois plus petite que la viscosité moléculaire. Le modèle URANS proche paroi est donc négligeable face à l'écoulement laminaire, expliquant donc le comportement de la couche limite dans cette zone.

La figure 8.28 précise les profils de vitesse induits par le modèle hybride pour le profil 2 de l'intrados *i.e.* récupéré à partir de la position 2. La fonction d'hybridation f_d protège la couche limite jusqu'à $y^+ \simeq 15$. Cela correspond à la fin de la loi laminaire sur les profils de vitesse mais aussi à la fin de la superposition de u^+ et de u^+_{VMS} . À ce moment, la valeur de u^+_{VMS} masquée par f_d chute et rejoint les valeurs de u^+_{VMS} qui sont de l'ordre de grandeur des fluctuations de la figure 8.26(b). Ainsi, la fonction d'hybridation joue correctement son rôle et introduit les fluctuations dans la partie supérieure de la couche limite.

Cependant, la fonction de saturation a un retour à zero sur la fenêtre $y^+ = [40, 100]$. Cet effet



FIGURE 8.29 – (a) Profils de vitesse sur l'extrados du bec pour les positions 1 (---), 2 (---) et 3 (---) respectivement de plus en plus proche du bord de fuite du bec. (b) Rapport de la viscosité turbulente issue du Spalart sur la viscosité moléculaire. Zoom sur l'extrados du bec.

est dû à la création d'une couche de cisaillement au dessus de la couche limite se développant depuis le point d'arrêt venant ainsi perturber les fonctions de transition DDES. Toutefois cette couche de cisaillement et son effet sur les grandeurs proche paroi ne sont pas impactantes pour ce calcul. Cette couche de cisaillement est aussi présente dans le cas de la DDES classique. Cet effet n'est donc pas lié à la VMS.

Le comportement de la couche limite est tout à fait différent dans le cas de l'extrados menant au sillage du bec. Le résultat est présenté sur la figure 8.29(a). Tout d'abord, la résolution en maillage est moins satisfaisante car $y^+ \simeq 4$. Cela signifie que malgré un pas de maillage normal à la paroi identique à celui de l'intrados, la physique à capturer est beaucoup plus fine. Celle-ci est soumise à des gradients de pression plus importants que sur l'intrados et a un contournement, menant à une couche limite turbulente présentant une loi logarithmique. De plus, plus le capteur se rapproche du bord de fuite, plus la zone de sortie de la couche limite et repoussée vers les y^+ importants. Cela traduit un épaississement de la couche limite visible sur la figure 8.23(a). Grâce à cette figure il est possible de constater que le profil de couche limite n'est pas le même entre l'extrados et l'intrados. Il est à noter que le Reynolds turbulent est cette fois-ci beaucoup plus élevé à la fin de cette couche limite, de l'ordre de $Re_{\tau} \simeq 250$. La figure 8.29(b) permet de comparer le comportement de la viscosité turbulente à l'extrados et l'intrados du bec. En effet cette fois-ci, la viscosité turbulente est plus de 20 fois plus intense que la viscosité moléculaire, rendant l'effet du modèle URANS très impactant sur cette couche limite.

Grâce à l'analyse de ces résultats, il est possible de conclure que la méthode hybride utilisant la fonction de masquage f_d de la DDES Spalart est une méthode intéressante afin d'interfacer la VMS performante dans les zones bien maillées avec un modèle de paroi efficace. En effet, l'introduction progressive des fluctuations ne bouleverse pas les grandeurs moyennes proche paroi prédites par le modèle URANS. La fonction f_d permet d'avoir une estimation pertinente des zones nécessitant l'utilisation d'un modèle de paroi faute de pouvoir les mailler suffisamment et d'avoir la bonne tendance du modèle SGE dans cette zone. Par ailleurs, cette étude a permis d'identifier deux régimes de couches limites : une couche limite linéaire très fine avant le point de rebroussement et une couche limite très épaisse présentant une loi logarithmique avant le bord de fuite du bec. Ces deux types de couches limites peuvent être retrouvés dans les autres simulations avec le modèle de Smagorinsky sélectif.

Pour plus de précision, un calcul de couche limite a été réalisé a posteriori afin de vérifier



FIGURE 8.30 – Position des familles de 3 capteurs 1, 2 et 3.

la pertinence de ces deux régimes à l'intrados et à l'extrados. Ce calcul est réalisé grâce à l'outil 3C3D de Dassault Aviation, pour plus d'information se reporter à Gross [56]. La couche limite est donc bien laminaire à l'intrados validant la restitution dans cette zone. Toutefois, il semblerait que le contournement menant à l'extrados ne soit pas assez puissant pour déclencher le régime turbulent. Ainsi le régime de la couche limite de l'extrados devrait être aussi laminaire. Deux explications peuvent être données. Premièrement, la configuration utilisée est légèrement instable pour l'écoulement aérodynamique. Cela peut se voir sur la question du décollement de volet. Dans ce cas, le contournement n'est pas assez brusque mais est presque à la limite de déclencher le régime turbulent de l'extrados. Cela rend sa simulation numérique difficile sur cette question. Deuxièmement, l'utilisation du modèle de Spalart-Allmaras est connu pour déclencher rapidement la turbulence, permettant d'obtenir ce régime de couche limite.

8.2.3 Etude de la dynamique et acoustique de l'écoulement

L'étude de la performance du modèle VMS doit aussi se faire sur l'évolution dynamique de l'écoulement. Pour cela l'étude des spectres permet d'établir le bon comportement du modèle spécialement en mode SGE. Le but est aussi de retrouver le comportement physique de l'écoulement expliqué au début de cette section.

Les spectres en vitesse et en pression présentés dans la suite sont obtenus avec la méthode *PWelch* sans recouvrement, ni fenêtrage et avec un nombre de bloc de l'ordre de N_{bloc} = 50. Ce procédé numérique appliqué sur les fluctuations des grandeurs, est utilisé pour calculer la densité spectrale de puissance (DSP) ou *Power Spectral Density* (PSD). L'intégration du spectre permet alors de recouvrer l'énergie associée à la quantité au point spatial d'acquisition. Les spectres en pression sont tracés en échelles décibels. L'échelle décibels est obtenue grâce la quantité $P_{PSD}^{dB} = 10\log_{10}(P_{PSD}/P_{ref}^2)$, où \log_{10} est le logarithme base 10 tel que $\log_{10} = \log/\log(10)$ et $P_{ref} = 2 \times 10^{-5}$ est la pression de référence qui correspond au seuil audible de l'oreille humaine.

Étude des spectres en vitesse

L'étude dynamique de l'écoulement passe par l'analyse spectrale des vitesses qui définissent une grandeur locale à l'écoulement. Tout d'abord, il est important de comparer les spectres numériques aux spectres expérimentaux. Trois positions de capteurs ont été choisies car ceux-ci sont présents sur 3 endroits stratégiques de l'écoulement pour l'étude de la couche de cisaillement. La première famille 11108-1 est en toute première ligne dans la couche de cisaillement. Elle permet d'acquérir la dynamique du cisaillement au tout début de son historique spatial. La deuxième famille 11108-5 est aux alentours du milieu de la trajectoire de la couche de ci-



FIGURE 8.31 – Densité spectrale de puissance de la vitesse longitudinale u aux capteurs (a) 11108-1, (b) 11108-5 et (c) 11108-9. Résultats expérimentaux (F2)(—) et symboles associés aux numéro de capteur, capteur 1 (—), capteur 2 (—) et capteur 3 (—) respectivement de plus en plus à l'intérieur de la cavité.

saillement, voir figure 8.30. Elle permet de comparer les évolutions dynamiques de la couche de cisaillement et le début de l'appariement des tourbillons. Enfin la dernière famille 11108-9 est positionnée juste avant le point de rattachement avec l'extrados. Elle permet de comprendre si les dynamiques spatiale et temporelle sont bien modélisées par la VMS et que celle-ci permet d'obtenir la bonne composition spectrale responsable du bruit rayonné en champ lointain. Les spectres en vitesse correspondent aux densités spectrales de puissance des fluctuations de vitesse longitudinales u^* . Chaque famille possède 3 capteurs positionnés aux même coordonnées géométriques dans le calcul et l'expérience.

Sur la figure 8.31 sont tracés les différents spectres pour chacune des familles de capteur. Premièrement, la figure 8.31(a) montre que le champs de vitesse au point de rebroussement *i.e.* début de la couche de cisaillement, n'est pas forcément bien restituée en fonction de la position du capteur. Les solutions numériques sont consistantes entre elles. La différence principale est la présence d'un pic fréquentiel aux alentours de 30 kHz. Celui-ci apparait sur le capteur 2 mais est très marqué sur le capteur 1 qui est en plein milieu de la couche de cisaillement. Par ailleurs, les



FIGURE 8.32 – Comparaison de la vitesse moyenne selon l'axe z \overline{w} entre (a) le calcul et (b) l'expérience (PIV F2). Le capteur 11108-5-1 n'est pas tout à fait dans le même écoulement entre les deux figures.

résultats expérimentaux ne sont pas similaires. En effet, le capteur 1 voit un léger pic fréquentiel aux alentours de 35 kHz ce qui est consistant avec les résultats numériques. En effet, la couche de cisaillement réelle est plus fine que le calcul qui ne possède pas le nombre de mailles nécessaire. La couche de cisaillement numérique est donc plus épaisse et les phénomènes possèdent donc une fréquence plus faible. De plus, ce capteur perçoit un spectre horizontal d'un écoulement sans dynamique et sans énergie vis-à-vis du niveau des autres capteurs. Cette remarque peut paraître étrange sachant que le capteur 2 situé très proche aussi de la couche de cisaillement, possède des basses fréquences très énergétiques. Mis à part la possibilité d'un capteur défaillant, les deux raisons principales de cette différence sont l'incidence effective du calcul et l'épaisseur de la couche de cisaillement. Premièrement comme il a été mentionné sur la courbe des C_p , l'incidence effective n'est pas tout à fait la même entre le calcul et l'expérience, menant à une trajectoire de la couche de cisaillement différente. Comme au début celle-ci est très fine, il est possible que le capteur expérimental 1 de la famille 11108-1 soit légèrement en dehors. Cette remarque est très clairement illustrée sur la figure 8.32. Deuxièmement, comme expliquer cidessus la couche de cisaillement initiale est trop fine pour être correctement maillée, celle-ci a tendance à être plus épaisse numériquement au début que dans la réalité. Ainsi, cela explique que le capteur expérimental ne voit pas d'énergie mais que le capteur numérique récupère la même information que dans la couche de cisaillement. Au bilan la simulation de ce début de la couche de cisaillement est très encourageante. En effet, les niveaux d'énergie sont tous consistants entre eux tant bien en numérique qu'en expérimental. La seule différence qu'il est toutefois difficile de résoudre de par la contrainte même du maillage, semble être l'épaisseur de cette couche de cisaillement à son origine.

Deuxièmement sur la figure 8.31(b), l'évolution de la couche de cisaillement diffère légèrement entre l'expérience et le numérique comme annoncé dans le paragraphe précédent. Cependant, une certaine uniformisation se fait ressentir car la couche de cisaillement s'épaissit. Il est possible d'observer la présence d'un contenu spectral numérique en moyennes fréquences plus énergétique que le reste du spectre. L'appariement des tourbillons dans cette zone de l'écoulement est à l'origine de ce phénomène. Cependant cet effet est plus marqué dans la simulation car l'appariement venant de l'historique spatial de la couche de cisaillement est en retard par rapport à la réalité. Sur l'expérience, le gonflement du spectre en un phénomène large bande est déjà pleinement réalisé. Cela explique que les basses fréquences aient moins d'énergie numériquement en simula-



FIGURE 8.33 – (a) Évolution du spectre en vitesse selon l'axe x le long de la couche de cisaillement et courbe $k^{-5/3}$ (– – –). (b) Position des capteurs.

tion que sur l'expérience. Encore une fois, les niveaux énergétiques sont toutefois bien restitués par la simulation numérique comme précisé par les membres du *workshop* BANC ayant fait le calcul.

Troisièmement, la composition spectrale avant l'impact est très bien restituée comme la figure 8.31(c) peut le montrer. Les basses autant que les hautes fréquences sont bien simulées ce qui est une première étape dans la bonne restitution du champs acoustique issu du bec. L'ensemble des capteurs numériques et expérimentaux observent le même écoulement car dans cette zone, la couche de cisaillement est plus épaisse. Il y a toutefois la présence de deux très légers pics à 3 et 4 kHz sur les capteurs expérimentaux mais pas sur les capteurs numériques. Cette différence entre le numérique et l'expérience peut s'expliquer encore une fois par la différence d'incidence. En effet selon les conclusions du colloque BANC IV, l'augmentation de l'incidence diminue les pics fréquentiels issues de l'impact. Or l'incidence effective du calcul est un peu plus élevée que celle de l'expérience. Augmenter l'incidence revient à potentiellement découvrir la cavité vis-à-vis de l'écoulement externe et donc à augmenter l'intensité du mélange. Ceci a pour effet de diminuer la cohérence des tourbillons au niveau de l'impact se traduisant finalement par la disparition des pics dans le champ aérodynamique proche. Ce constat permet de comprendre toute l'importance de l'utilisation d'un modèle de sous-maille judicieux. Celui-ci doit pouvoir produire assez de turbulence afin de correctement restituer le spectre de l'écoulement avant l'interaction de l'écoulement avec la zone d'impact du bec. Si le modèle est trop diffusif, les tourbillons peuvent être mal décorrélés menant à une sur-estimation des pics fréquentiels. Par ailleurs comme il est possible de le voir sur la figure 8.30, le capteur n'est pas positionné sur la paroi traduisant le fait qu'il existe une l'activité tourbillonnaire complexe dans cette zone et que ce n'est pas seulement l'impact qui est à l'origine de ces pics. Encore une fois sur cette famille de capteurs, l'énergie globale et la forme des spectres sont particulièrement bien restituées par le calcul.

Finalement, le modèle VMS réussit à bien déstructurer l'écoulement afin d'atteindre un spectre correct dans les zones où la turbulence peut être considérée comme établie. Elle est aussi capable de bien conserver les basses fréquences sans trop les dissiper. La comparaison entre l'expérience et le calcul est plus difficile au début de la couche de cisaillement mais permet toutefois de donner des explications sur la différence constatée entre les résultats. Au delà des légers écarts mentionnés, il y a un bon accord entre le calcul et les mesures.



FIGURE 8.34 – Profil de la norme de la vitesse dans la couche de cisaillement.

Pour mieux comprendre le phénomène de la couche de cisaillement, l'évolution du spectre numérique le long de celle-ci est tracée sur la figure 8.33(a). Les capteurs sont positionnés comme précisé sur la figure 8.33(b). Sur cette figure est observée l'évolution classique d'une couche de cisaillement possédant des structures convectées. La fréquence caractéristique apparait au début de la couche de cisaillement, là où les équations d'instabilités sont linéaires faisant apparaître des tourbillons de Kelvin-Helmholtz de fréquence 30 kHz. Le pic fréquentiel s'élargit car le spectre se gonfle en différentes tailles de structures mais la fréquence reste encore très marquée. La zone d'appariement des structures est ensuite observée et vient noyer le pic fréquentiel dans un transfert d'énergie vers les basses fréquences. Enfin le spectre est entièrement remplie dans la zone correspondante à S_p diffus ne permettant pas de discerner de fréquence caractéristique. La cascade énergétique apparait avec une pente différente de la classique -5/3. L'écoulement n'est ici pas totalement homogène et isotrope à cause par exemple du caractère confiné de la cavité entre le bec et le corps principal.

La valeur théorique du pic spectral de la couche de cisaillement peut être retrouvée grâce à la formule (8.1) et extraite des équations de la stabilité. Il est possible de voir sur la figure 8.34 le profil de la norme de la vitesse coplanaire à y constant $u_N = \sqrt{u^2 + w^2}$. s représente l'abscisse curviligne de la coupe transversale à la couche de cisaillement. Il est possible de constater que le profil de vitesse est bien en tangente hyperbolique, profil de vitesse attendu dans le cas d'une couche de cisaillement. Par ailleurs le nombre de Mach étant faible et le nombre de Reynolds local basé sur le bec de l'ordre de 10^5 , il est donc possible d'utiliser la formule (8.1). L'épaisseur de quantité de mouvement calculée est de $\delta_{\theta} = 0,04$ mm, permettant de trouver une valeur théorique de la fréquence des instabilités de l'ordre de 30 kHz en bon accord avec le calcul VMS. Cependant ce pic disparait ensuite très rapidement dans le spectre d'énergie aérodynamique en transvasant de l'énergie aux basses fréquences par un phénomène d'appariement. Comme il est possible de voir sur l'image d'énergie cinétique turbulente 8.20(a), la couche de cisaillement commence à devenir épaisse, agrandissant ainsi les structures et décalant la fréquence caractéristique vers des valeurs plus basses.

La corrélation en vitesse permet d'étudier l'évolution temporelle ou spatiale des structures entre différentes positions. La corrélation adimensionnée de deux grandeurs X et Y est donnée par

$$C_{XY}\left(\underline{\mathbf{s}},\tau\right) = \frac{X\left(\underline{\mathbf{x}},t\right)Y\left(\underline{\mathbf{x}}+\underline{\mathbf{s}},t+\tau\right)}{\sqrt{X\left(\underline{\mathbf{x}},t\right)}\sqrt{Y\left(\underline{\mathbf{x}},t\right)}}$$

La corrélation temporelle en vitesse u_N entre deux points distants de Δs dans la couche de cisaillement $C_{u_N u_N}(\Delta s, t)$ est tracée sur la figure 8.35(a). La vitesse u_N est définie par $u_N =$



FIGURE 8.35 – (a) Corrélation temporelle adimensionnée des vitesses entre deux points : fil chaud et LDV (11116-1). Expérience (—) et VMS (—). (b) Position des capteurs.

 $\sqrt{u^2 + w^2}$ comme précisée plus haut. Les positions de chaque capteurs sont montrées sur la figure 8.35(b). La comparaison de cette grandeur est plus difficile car elle reste très chahutée. La VMS propose une bonne restitution du pic de corrélation avec la courbe expérimentale. Celui-ci est aux alentours de 3×10^{-4} secondes pour la simulation numérique et de 2×10^{-4} secondes pour l'expérience. Cela traduit une bonne restitution du temps de convection des structures par la VMS.

Cette grandeur permet d'appliquer la formule (8.2). Afin de déterminer la fréquence issue de la formulation (8.2), il a été relevé géométriquement $L_a = 32$ mm, $L_v = 36$ mm et $U_v =$ 45,6 m/s grâce à l'étude de la corrélation temporelle de la figure 8.35(a). Ainsi, les grandeurs caractéristiques de cette formule $\alpha_l = 1, 125$ et $\kappa_v = 0, 74$ permettent de trouver une fréquence caractéristique de 1100 Hz pour la simulation numérique. Dans le cas de la corrélation temporelle expérimentale, la fréquence calculable est de 3400 Hz qui se rapproche plus de la fréquence observable expérimentalement sur la figure 8.31(c). L'écart entre ces deux fréquences s'explique par une vitesse U_v de convection de tourbillon différente visible sur la figure 8.35(a). Ainsi cette formule semble pouvoir restituer l'effet de rétroaction dans le cas expérimental sachant qu'il n'est pas visible dans la simulation numérique à cause de l'incidence effective.

Par ailleurs l'étude de la corrélation spatiale transverse permet de vérifier *a posteriori* que la largeur choisie de 60 mm en transversal permet de ne pas contraindre la turbulence de l'écoulement. Sur la figure 8.36(a) est tracée l'évolution de la corrélation spatiale adimensionnée transverse à l'écoulement dans le bec. Cette grandeur prend la valeur 1 à chaque extrémités due aux hypothèses de périodicité. La longueur de décorrélation est inférieure à 1 mm ce qui est largement suffisant pour la tranche de simulation choisie et permet l'établissement d'un écoulement purement 3D par la turbulence. Les vitesses transversales restent faibles vis-à-vis de l'écoulement longitudinal. La vitesse transversale v est plus de dix fois plus faible que u par exemple.

Les figures 8.37(a) et 8.37(b) présentent la corrélation spatiale le long d'une série de capteurs présents respectivement au début et au milieu de la couche de cisaillement, voir figure 8.37(c). Dans les deux cas, l'expérience et la simulation sont en bon accord. Il aurait été intéressant d'avoir plus de capteurs expérimentaux dans le début de la courbe pour bien caractériser la décorrélation. Afin d'avoir une meilleure idée de la décorrélation dans la couche de cisaillement, il est intéressant de regarder la figure 8.38(a) où la longueur de corrélation numérique est mieux évaluée.



FIGURE 8.36 – (a) Corrélation spatiale adimensionnée transverse des vitesses. (b) Position des capteurs.

Il est important d'analyser aussi le sillage issu du bord de fuite du bec. Les spectres de vitesse de ce sillage sont présentés figure 8.39(a). Des spectres typiques d'un bord de fuite sont présents avec un pic tonal. La dynamique présentée dans la partie d'introduction est retrouvée. Le spectre rouge juste en aval du bord de fuite présente un pic très marqué aux alentours de 50 kHz. Un second pic disparait très rapidement aux alentours de 100 kHz. Enfin deux pics très faibles sont présents aux fréquences 150 kHz et 200 kHz. Ces trois derniers pics peuvent être assimilés aux harmoniques de la première fréquence. Connaissant l'épaisseur du bord de fuite de l'ordre de l = 0, 25 mm, un nombre de Strouhal de $St = fl/U_{\infty} = 0, 2$ en est déduit.

La particularité de ce pic de von Kármán est qu'il n'est pas caractérisé par un pic tonal proche d'un Dirac. Ce pic plus épais qu'un pur Dirac, s'explique par les lâchés de structures *i.e.* des rafales/bourrasques visibles sur la figure 8.40(b), qui sont issues de la couche de cisaillement au point de rattachement. Ces rafales sont injectées régulièrement dans le sillage venant perturber le phénomène et faire varier sa fréquence caractéristique. Cela se traduit par une fréquence caractéristique plus large. Ces rafales peuvent être aperçues sur la figure 8.41 où le profil de vitesse caractéristique en V d'un sillage est tracé progressivement de plus en plus loin du bord de fuite. *s* représente l'abscisse curviligne perpendiculaire à l'axe du sillage. *s* croissant correspond au déplacement à travers le sillage vers la cavité. Chaque profil de vitesse est tracé progressivement de plus en plus loin du bord de fuite. Le profil en V est perturbé par la présence d'un deuxième sillage qui est l'effet des rafales de la couche de cisaillement.

La physique de l'évolution de ce spectre est intéressante, voir figure 8.39(a). Le capteur (--) est présent sur l'extrados, juste avant le bord de fuite. L'énergie du spectre y est basse mais présente déjà le pic tonal qui est rayonné. Le spectre se gonfle en énergie pour arriver au capteur (--) où l'ensemble des fréquences tonales du phénomène est perceptible. Puis, les structures se décorrèlent rapidement. Dès le spectre (--), les deux plus hautes harmoniques ont disparu à cause de la chute du spectre. Dès le capteur (--), la fréquence de von Kármán est fortement réduite en niveau. Enfin le capteur (--) présente simplement un spectre large bande, typique d'une turbulence établie, pouvant aussi être expliqué aussi par le fait que le capteur numérique est légèrement à l'extérieur du sillage. La comparaison avec les capteurs expérimentaux dans cette région n'est pas pertinente car ceux-ci ne sont pas assez résolus en fréquence pour capter une si haute dynamique.

Sur la figure 8.42(a), il est possible de comparer les corrélations spatiales dans le cas du sillage. La courbe (---) représente les résultats expérimentaux associés à la courbe numérique



FIGURE 8.37 – (a) Corrélation spatiale adimensionnée au début de la couche de cisaillement (11113). (b)Corrélation spatiale adimensionnée au milieu de la couche de cisaillement (11116).
(c) Position des capteurs. Expérience (—) et VMS (—).



FIGURE 8.38 – (a) Évolution de la corrélation spatiale adimensionnée dans la couche de cisaillement. (b) Position des capteurs.



 ${\rm FIGURE}$ 8.39 – (a) Évolution du spectre en vitesse selon l'axe x le long du sillage. (b) Position des capteurs.



FIGURE 8.40 – Instantanés de S_p . (a) Sans rafales et (b) avec rafales localisées dans le cercle rouge.



FIGURE 8.41 – Profil de la vitesse u_N le long du sillage pour différentes positions de plus en plus éloigné du bord de fuite.



FIGURE 8.42 – (a) Évolution de la corrélation spatiale adimensionnée dans le sillage. (---) résultats de l'expérience à comparer avec le résultat VMS (---) où le capteur de référence est le plus éloigné du bord de fuite. (---) avec capteurs de référence le plus proche du bord de fuite. (b) Position des capteurs.

(----). Le capteur de référence est le plus éloigné du bord de fuite. Le calcul est plus corrélé que l'expérience. En effet, les derniers capteurs sont dans une zone plus grossièrement maillée menant à une plus grosse dissipation numérique et donc à une décorrélation plus lente. Cependant la courbe (-----) est la corrélation spatiale dont le capteur de référence est le plus proche du bord de fuite. Dans ce cas, la décorrélation est beaucoup plus rapide, en meilleur accord avec l'expérience et surtout alternée au début à cause des tourbillons contra-rotatif de von Kármán.

Étude des spectres en pression

L'étude des spectres de pression est autant intéressante que celle des spectres de vitesses. Ils permettent de mieux discriminer les phénomènes acoustiques que les spectres de vitesses qui captent des phénomènes plus locaux tels que les tourbillons de Kelvin-Helmholtz. Les spectres en pression sont tracés en décibels (dB) référencés par $P_{ref} = 2 \times 10^{-5}$ Pa. Sur la figure 8.43 est présentée l'évolution des capteurs étudiés le long de la couche de cisaillement. L'évolution est découpée en deux étapes car deux phénomènes apparaissent distinctement.

Premièrement sur la figure 8.43(a) est présentée l'évolution du spectre en pression au début de la couche de cisaillement. Deux pics sont alors largement marqués. Le premier pic très présent dès le début de la couche de cisaillement est autour de 50 kHz. Sa forme et sa fréquence sont celles du pic présent sur les spectres en vitesses du sillage. Cette dynamique est une dynamique acoustique issue du rayonnement de l'allée de von Kármán. En avançant le long de la couche de cisaillement, celui-ci devient noyé dans le gonflement du spectre mais son niveau reste approximativement le même. Un deuxième pic est présent aux alentours de 30 kHz. Ce dernier grossit avec la distance au point de rebroussement. Mais plus encore, il possède le même comportement que la fréquence des instabilités Kelvin-Helmholtz. En s'élargissant celui-ci déplace l'énergie du spectre vers les basses fréquences à cause des appariements des tourbillons. Cela permet de conclure que l'évolution spectrale correspondant au pic de 30 kHz est celle visible sur le pic à 30 kHz du spectre de vitesses. Ce pic représente l'évolution dynamique des tourbillons de Kelvin-Helmholtz qui est une grandeur purement locale/aérodynamique. L'analyse des spectres de pression couplée à celle des spectres en vitesses permet de discerner les phénomènes locaux des phénomènes rayonnés. En effet, le pic de von Kármán est invisible sur les spectres en vitesses mais pas en pression. Sur la fin de la couche de cisaillement au plus près de la potentielle source acoustique, la fréquence de von Kármán devient légèrement plus intense. Elle passe d'un niveau de 70 à 80 dB. Elle



FIGURE 8.43 - (a)(c) Évolution du spectre en pression le long de la couche de cisaillement. (b)(d) Position des capteurs.

réapparait sur les spectres de la figure 8.43(c).

Sur la figure 8.44(a) est tracée l'évolution de la corrélation spatiale dans la couche de cisaillement. La pression reste plus longtemps corrélée que la vitesse comme il était attendu.

Sur la figure 8.45(a) est tracée l'évolution du spectre en pression sur le sillage selon les capteurs présents sur la figure 8.45(b). La première chose à constater est la même tendance dynamique que pour la vitesse. Cependant, la seconde harmonique du pic de von Kármán est cette fois-ci plus intense. L'évolution entre la vitesse et la pression est identique car la source acoustique est créée par ce phénomène aérodynamique. La fréquence de von Kármán principale est retrouvée à 50 kHz avec ses harmoniques successives. Cette fréquence valide nos hypothèses sur l'évolution du spectre en pression dans la couche de cisaillement.

Afin de comparer plus pertinemment la propagation du bruit dans cette zone, il est possible de tracer l'évolution du spectre dans la zone entre le corps principal et le bord de fuite du bec. Les spectres en pression et en vitesses sont tracés sur la figure 8.46(a) et 8.47(a) respectivement. La vitesse ne voyant qu'une dynamique locale possède des spectres proches de ceux d'une turbulence large bande *i.e.* un spectre sans fréquence caractéristique. Le spectre en pression étant lui marqué par la fréquence à 50 kHz, il en est conclu que celle-ci est bien issue d'une propagation acoustique. Par ailleurs, l'étude de la distance par rapport au bord de fuite permet de déduire que sur le



FIGURE 8.44 – (a) Évolution de la corrélation spatiale adimensionnée le long de la couche de cisaillement pour la vitesse (---) et la pression (---). (b) Position des capteurs.



FIGURE 8.45 – (a) Évolution du spectre en pression le long du sillage. (b) Position des capteurs.



FIGURE 8.46 - (a) Évolution du spectre en pression le long de l'intercorps. (b) Position des capteurs.

spectre (---) la fréquence du pic de von Kármán est noyée dans l'énergie aérodynamique haute fréquence. Encore une fois, sur la figure 8.48(a), il est possible de voir que la vitesse se décorrèle plus rapidement que la pression qui possède ce caractère plus global à l'écoulement.

Comme le bord de fuite rayonne très puissamment dans la cavité de bec, il est intéressant d'étudier son impact sur l'avant du corps principal proche du bord de fuite. Les spectres sont présentés sur la figure 8.49. La comparaison avec les résultats expérimentaux est difficile. En effet, la dynamique entre les capteurs numériques et expérimentaux n'est pas la même. Les capteurs expérimentaux présentent de nombreux pics fréquentiels très concentrés aux alentours de 4-5 kHz. De plus sur l'intrados du corps principal, de nombreux autres pics apparaissent. Le spectre numérique est plat et présente encore une fois la fréquence à 50 kHz qui est rayonnée par le bord de fuite. Ce pic n'est pas présent sur les capteurs expérimentaux car la fréquence de coupure de ceux-ci semble être aux alentours de 10 kHz. Le pic des von Kármán est aussi présent à l'intrados du corps principal traduisant l'impact global sur le champ aérodynamique du bruit de bord de fuite.

La dynamique des capteurs expérimentaux semble étrange. En effet, ces fréquences très marquées ne sont pas présentes sur les capteurs expérimentaux en vitesses. Ces pics peuvent être dus à la fonction de transfert des kulites difficiles à implémenter sur la surface du corps principal car cette remontée d'énergie est très proche de la fréquence de coupure du capteur. Une autre hypothèse est celle des perturbations liées aux pattes de raccord expérimentales venant tenir le bec et le corps principal dans l'expérience qui pourraient générer du bruit parasite. Dans tous les cas il semblerait que la comparaison avec les résultats numériques soit difficile en terme de dynamique. Toutefois à l'exception de pics expérimentaux, il semblerait que l'énergie moyenne des spectres soit bien restituée.

Ainsi, l'étude de la pression permet de comprendre la différence entre les phénomènes acoustiques et purement aérodynamiques. Lors de l'impact, la couche de cisaillement génère un bruit large bande auquel s'ajoutent deux petits pics visibles uniquement sur le spectre expérimental à 3 et 4 kHz qui peuvent être retrouvés grâce à une formule analytique analogue à celle de Rossiter. Ce bruit d'impact connu dans le cas des profils hypersustentés est dépendant physiquement de l'angle d'incidence : plus celui-ci est important plus les pics diminuent en énergie et finissent par être détruits. C'est ce qui arrive au calcul numérique. Le deuxième effet pou-



FIGURE 8.47 – (a) Évolution du spectre de la vitesse longitudinale le long de l'intercorps. (b) Position des capteurs.



FIGURE 8.48 – (a) Corrélation spatiale adimensionnée le long de l'intercorps en norme de la vitesse (– –) et en pression (– –). (b) Position des capteurs.



FIGURE 8.49 – Évolution du spectre en pression aux capteurs précisés sur la figure (d). (—) représente l'expérience (F2).



FIGURE 8.50 – (a) Cas avec incidence forte. (b) Cas avec incidence faible.

vant avoir de l'influence sur la création de ces pics est purement numérique. En effet le modèle de sous-maille agit sur la capacité de la couche de cisaillement à décorréler les tourbillons qui ont plus ou moins d'effet sur le phénomène de rétroaction. Ainsi, les pics de la couche de cisaillement sont directement dépendants numériquement et physiquement de la géométrie de la cavité vis-à-vis de l'écoulement externe, et de l'historique spatial et temporel de ses tourbillons qui ont plus ou moins de temps de devenir pleinement 3D. Toutefois, l'explication physique de l'effet de l'angle d'incidence est encore inexpliquée. Pour chaque incidence, les caractéristiques physiques de la cavité et de la couche de cisaillement changent. En effet, la longueur curviligne de la couche de cisaillement et son intensité peuvent légèrement varier. Mais plus encore, il est possible qu'en augmentant l'angle d'incidence, l'écoulement externe à la couche de cisaillement entraine majoritairement les structures de l'impact vers le bord de fuite du bec, affaiblissant ainsi ce phénomène et celui de rétroaction. La couche de cisaillement est moins déviée et a une direction privilégiée. Si l'angle d'incidence est faible, la couche de cisaillement a plus d'influence sur l'écoulement de la cavité et du bord de fuite car l'écoulement externe est plus largement dévié. Ainsi, l'impact résulte dans un équilibre des structures émises vers le bord de fuite et la recirculation. Le phénomène de rétroaction est donc mieux entretenu. L'idée est résumée sur la figure 8.50. Comme le calcul a une incidence effective plus importante que l'expérience, les pics sont donc détruits empêchant de les apercevoir sur le calcul. Cela sous-entend d'ailleurs numériquement que le modèle VMS n'est pas excessivement dissipatif permettant ainsi de déstructurer l'écoulement du bec.

Deuxièmement, le sillage génère un phénomène acoustique très marquant dans l'écoulement qui est visible sur tous les spectres en pression dans la zone du bec. Ce phénomène est très visible car il est très cohérent et son domaine fréquentiel aux alentours de 50 kHz présente peu d'énergie aérodynamique. Cependant en terme d'énergie acoustique, il se peut que les deux phénomènes soient du même ordre de grandeur.

Étude acoustique en champ lointain

Après l'étude locale de l'écoulement du bec, il est intéressant de regarder la propagation en champ lointain du bruit généré par le profil. Tout d'abord la directivité du champ acoustique est étudiée sur la figure 8.51. L'angle 0° représente l'aval du profil et 90° représente le dessus du profil. La directivité est obtenue en intégrant les valeurs des spectres de pression en champs lointain sur la gamme de fréquence $f \in [1000, 7000]$ Hz. Le spectre expérimental F2 du micro à la



FIGURE 8.51 – Évolution de la directivité du profil dans le plan y = 30 mm où 0° représente l'aval du profil et 90° le dessus du profil. Le point noire correspond à la directivité du centre de l'antenne F2 en dessous du profil.

verticale du profil a aussi été intégré sur la même gamme de fréquence. La directivité acoustique du profil est de type plutôt dipolaire comme attendu avec une dynamique peu marquée. De plus il semblerait qu'elle soit très proche des niveaux expérimentaux comme le montre la comparaison avec le point.

Les spectres acoustiques en champ lointain permettent de comprendre la dynamique propagée. Comme précisé dans la présentation du benchmark, il existe deux jeux de mesures expérimentales. L'une réalisée à AWB et l'autre à F2. Les deux souffleries ne présentant pas les mêmes caractéristiques entre elles et avec la simulation, chacun des spectres numériques et expérimentaux sont post-traités grâce aux formules correctives suivantes

$$\begin{cases} \text{Numérique} = 10\log_{10}\left(\frac{\mathbf{P}_{\text{num}}^{PSD}}{\mathbf{P}_{ref}^2}\right) + 20\log_{10}\left(|\underline{\mathbf{x}}|\right) \\ \text{AWB} = \mathbf{P}_{\text{AWB dB}}^{PSD} + \operatorname{corr}_{vit} + \operatorname{corr}_{span} + \operatorname{corr}_{dist} \\ \text{F2} = \mathbf{P}_{\text{F2 dB}}^{PSD} + IEdB1 + \operatorname{corr}_{dist} + \operatorname{corr}_{span} \end{cases}$$

où $P_{ref} = 2 \times 10^{-5}$ Pa est la pression de référence, $|\mathbf{x}|$ est la distance du micro et où chacune des corrections est précisée dans le dossier du cas LEISA II. IEdB1 = -6 dB correspond à la correction due au confinement par une plaque rigide du panneau de microphones présent dans F2 comme précisé en introduction. Cette correction n'est pas nécessaire dans la chambre anéchoïque de AWB car l'antenne est détachée du sol. $\operatorname{corr}_{span} = 10\log_{10} (x_{span num}/x_{span expe})$ correspond à la correction d'envergure du profil. En effet, la tranche expérimentale de 0,24 m est plus épaisse que la tranche numérique de 60 mm. Les niveaux énergétiques des spectres doivent donc être adaptés. Cela revient à dupliquer le profil en supposant que chaque tranche est décorrélée. $\operatorname{corr}_{dist}$ correspond à la correction de la distance des capteurs dans les cas expérimentaux afin d'obtenir la même distance que dans le cas numérique $\operatorname{corr}_{dist} = 20\log_{10}(x_{dist expe}/x_{dist num})$. Enfin $\operatorname{corr}_{vit}$ correspond à la correction de vitesse dans la soufflerie AWB qui n'a pas le même écoulement comme précisé en introduction $\operatorname{corr}_{vit} = 60 * \log_{10}(u_{num}/u_{AWB})$.

Les spectres acoustiques expérimentaux en champ lointain sont obtenus par méthode de localisation de source grâce à l'antenne des souffleries. La tranche médiane au profil de cette localisation est alors extraite afin d'évacuer les effets de bord nuisibles. Ce contenu acoustique est reprojetté en champ lointain afin d'avoir des spectres propres correspondant à une configuration infinie. L'ONERA et AWB ont postraité les résultats expérimentaux brutes de AWB avec deux méthodes de localisation de bruit différentes : *De-convolution Approach for the Mapping of Acoustics Sources* (DAMAS) pour l'ONERA et CLEAN pour le DLR. Les données brutes de



FIGURE 8.52 – Évolution des spectres acoustiques au microphone à 90° sous le profil : Expérience AWB DLR ($-\circ-$), Expérience AWB ONERA ($-\circ-$) et Expérience F2 (---).

F2 ont été utilisées uniquement par l'ONERA. Les spectres numériques propagés en champs lointain sont obtenus par la méthode de Curle [22] à partir des solutions à la paroi stockées toutes les 25 itérations temporelles. Les spectres montrés sur les figures 8.52 et 8.53 est celui collecté sur le micro 4 situé à la verticale du profil.

Toute d'abord il est possible d'étudier la différence sous-jacente entre les deux campagnes d'essais F2 et AWB. La comparaison entre le spectre ONERA F2 et les spectres ONERA/DLR AWB est visible sur la figure 8.52. La première chose à remarquer est la différence entre les résultats expérimentaux. Tout d'abord, le post-traitement des mêmes résultats dans le cas de la soufflerie AWB donne des résultats différents en fonction des méthodes d'antennerie ONERA et DLR à partir de la fréquence 7 kHz. Cela justifie la gamme de fréquence pour l'intégration afin d'obtenir le champs de directivité. Cela incite à supposer qu'au delà de cette fréquence, la dynamique du spectre expérimental n'est plus physique. Par ailleurs dans la gamme de comparaison utile $f \in [1000, 7000]$ Hz les résultats entre AWB et F2 traduisent des comportements physiques distincts. En effet, les fréquences tonales sont décalées et beaucoup plus marquées dans le cas de AWB que de F2 où les pics sont pratiquement absents. Cela traduit la présence de structures bien plus cohérentes et puissantes dans le cas de AWB. En effet, la soufflerie F2 étant une soufflerie aérodynamique, le champ et l'incidence de l'écoulement doivent être plus proches du calcul numérique que celui de AWB où une déflection importante de l'écoulement se produit. Ainsi le champ F2 possède une incidence effective plus grande diminuant la puissance acoustique des pics présents à 2, 3 et 4 kHz. En effet, ceux-ci sont les pics issus de l'impact car leurs fréquences sont superposables à la dynamique visible sur les capteurs expérimentaux figure 8.31(c). Ainsi comme l'écoulement joue un rôle important dans ce problème pour le comportement acoustique, il est plus judicieux de comparer les résultats numériques à ceux de F2 qui est la configuration la plus proche de la simulation (pas de déflection progressive de l'écoulement du fait d'une veine ouverte par exemple ...). Toutefois l'énergie du spectre large bande est équivalente entre les deux campagnes d'essais.

Le résultat numérique est comparé au spectre expérimental de F2 sur la figure 8.53. Les résultats acoustiques de la VMS sont très proches en terme de dynamique et de niveaux du champ de F2 comme observé aussi sur les mesures aérodynamiques. Le résultat numérique présente un spectre large bande mais sans pic visible. Bien que le calcul soit proche des résultats expérimentaux de F2, il n'en reste pas moins que les fréquences tonales présentes résiduellement sur l'expérience n'existent pas dans le calcul numérique à cause d'une différence d'incidence. Ce constat est aussi obtenu par les partenaires du workshop BANC IV.

La fréquence très puissante des von Kármán n'est pas visible sur ces spectres de Curle



FIGURE 8.53 – Évolution des spectres acoustiques au microphone à 90° sous le profil : Expérience F2 ($\neg \neg \neg$), VMS par Curle ($\neg \neg \neg$) et VMS par coefficient de pression ($\neg \diamond \neg$).

possédant une résolution temporelle trop faible pour obtenir des fréquences de l'ordre de 50 kHz. Il n'est donc pas possible de comparer l'intensité des deux phénomènes : le bruit de bord de fuite et le bruit d'impact. Une approximation du spectre total peut toutefois être calculée grâce au coefficient de pression global récupéré au cours de chaque itérations temporelles. En effet dans ce cas, la vitesse d'approche et le Mach sont relativement assez faibles pour que les sources surfaciques soient prépondérantes devant les sources volumiques [3, 52]. De plus, si les termes de temps retardés sont négligés et que la source est supposée compacte alors la formulation de Curle donne

$$4\pi \mathbf{P}^{*}(\mathbf{\underline{x}},t) \simeq \frac{1}{c_{0}} \frac{\partial}{\partial t} \int \int_{\Gamma} \left[\frac{r_{i} \mathbf{P}_{ij} n_{j}}{r^{2}} \right]_{\tau *} d\Gamma\left(\mathbf{\underline{y}}\right)$$

$$\simeq \frac{1}{c_{0}} \frac{\partial}{\partial t} \int \int_{\Gamma} \frac{r_{i} \mathbf{P}_{ij} n_{j}}{r^{2}} d\Gamma\left(\mathbf{\underline{y}}\right) \qquad \text{Temps retardés négligés}$$

$$\simeq \frac{1}{c_{0} r} \frac{\rho_{0} U_{0}^{2}}{\partial t} \frac{\partial C_{\mathrm{L}}}{\partial t} \qquad \text{Source compacte et}$$

épaisseur du profil négligeable

où $\tau * = t - r/c_0$ est le temps retardé, Γ est la surface du corps, P_{ij} est la matrice de pression, n_j est la normale à la paroi, r_i est le vecteur distance dans la direction observée, r sa norme, c_0 la célérité du son, C_L le coefficient de portance définie selon l'axe vertical, ρ_0 la masse volumique et U_0 la vitesse de l'écoulement.

Le spectre en champ lointain obtenu par cette approximation est ajouté à la figure 8.53(a) sur la figure 8.53(b). La fréquence de von Kármán rayonnant partout dans le champ proche est clairement visible aux environs de 50 kHz. Son intensité acoustique est finalement moins importante que le contenu spectral moyenne fréquence mais surtout plus faible que les pics acoustiques pouvant émerger. Cette différence peut être de l'ordre de 10 à 30 décibels. Par ailleurs, un petite bosse fréquentielle est présente aux alentours de 10 kHz et est récupérée par les spectres expérimentaux post-traités par l'ONERA à AWB et F2. L'origine de cette bosse n'est pas encore expliquée. Comme le spectre obtenu par les simplifications théoriques est très proche du résultat obtenu par Curle, il est possible de conclure que les sources acoustiques du tri-corps sont proches du comportement d'une source compacte.

Par ailleurs, sur la figure 8.54 est tracée la divergence des fluctuations de vitesse $\operatorname{div}(\underline{\mathbf{u}}^*)$ permettant de visualiser la propagation des phénomènes compressibles *i.e.* des ondes acoustiques à l'extérieur du champs aérodynamique. Cette grandeur accentue la visualisation des phénomènes



FIGURE 8.54 – Visualisation de la divergence des fluctuations de vitesse $\operatorname{div}(u^*)$.

hautes fréquences. Il semblerait qu'une source marque l'ensemble du champ rayonné. Cette source possède une longueur d'onde de l'ordre de 6 mm menant à la fréquence caractéristique des von Kármán. De plus la localisation de cette source est dans la zone du sillage. Bien que les longueurs d'ondes soient trop grossières pour pouvoir préciser la zone d'émission, les fronts d'onde à l'extrados du profil sous-entendent que la source est localisée au bord de fuite. Cependant, les fronts d'onde au dessous et au dessus du profil semblent perturbés par des interférences avec des longueurs d'onde plus grandes, pouvant être dues à l'interaction avec la seconde source acoustique issue de l'impact, moins visible sur cette quantité car de plus basse fréquence. Il semblerait de plus qu'une source acoustique soit créée sur l'extrados du profil. Cette source est bien visible sur une animation temporelle de cette quantité montrant l'apparition la propagation ver l'amont du profil, spécifiquement entre le sillage et corps principal. De plus, cela pourrait expliquer la présence du pic fréquentiel à 80 kHz sur la figure 8.49(a) à côté du pic de von Kármán. Finalement, une source secondaire issue de la réflexion des ondes de von Kármán à l'intérieur de la cavité semble être à l'origine d'émissions de fronts d'onde au niveau du point de rebroussement.

Pour éviter de favoriser la visualisation des phénomènes hautes fréquences il est possible de tracer les fluctuations de pression P^{*} qui sont visibles sur la figure 8.55(a). Une visualisation sur tout le profil de **div** ($\underline{\mathbf{u}}^*$) est aussi visible pour une comparaison sur la figure 8.55(b). Comme le spectre est plutôt large bande, la résolution des ondes de von Kármán sont légèrement moins biens résolues que dans le cas de la grandeur **div** ($\underline{\mathbf{u}}^*$). Toutefois l'étude globale de ces deux grandeurs permet de vérifier que la longueur d'onde majoritaire sur le tri-corps est la source des von Kármán pour le bec et un phénomène similaire du côté du volet au niveau du bord de fuite du corps principal. La source supplémentaire sur l'extrados à l'avant du corps principal semble avoir la même longueur d'onde que celle des von Kármán et pourrait donc être issue de l'impact du sillage sur le corps principal.

8.3 Effets de l'ordre spatial et du modèle

L'étude du bec dans une configuration hypersustentée permet de s'intéresser à des quantités très précises comme l'évolution spectrale, les corrélations spatiales ou temporelles. La physique de cet écoulement présente des phénomènes très sensibles comme des instabilités aérodynamiques, certaines présentant un caractère acoustique comme les allées de von Kármán. L'étude menée avec le modèle VMS à l'ordre élevé O_3 permet de vérifier le bon comportement du modèle et de la simulation. Mais aussi de vérifier les grandeurs pertinentes à observer et qui peuvent être comparées à l'expérience. Il est possible de réutiliser ces informations afin de comparer le modèle



FIGURE 8.55 – Visualisation générale (a) des fluctuations de pression P^{*} et (b) de la divergence des fluctuations de vitesse **div** (u^*) .



FIGURE 8.56 – (a) Évolution du spectre en vitesse le long de la couche de cisaillement pour la VMS (---) et le modèle sélectif de Smagorinsky O_3 (---). (b) Position des capteurs.

de Smagorinsky sélectif à l'ordre élevé O_3 et à l'ordre simple O_2 .

Une première comparaison permet d'étudier deux modèles possédant un filtrage d'ordre 0 (sélectif) et d'ordre 1 (VMS). Le modèle de Smagorinsky sélectif est basé sur un senseur de la vorticité afin de modifier la valeur de la viscosité turbulente. La différence majeure avec le modèle VMS utilisé, est que ce dernier modifie aussi la colinéarité du modèle avec le tenseur des déformations, voir section 4.3.3. La physique sensible du tri-corps devrait faire apparaître des tendances différentes entre les modèles.

Une deuxième comparaison, entre le modèle sélectif à l'ordre simple O_2 et élevé O_3 , permet quant à elle de montrer l'apport de l'ordre spatial sur la résolution numérique.

Enfin, la comparaison avec deux autres maillages d'ordre simple conclut sur les effets de maillage sur ce cas complexe.

8.3.1 Modèle de Smagorinsky sélectif

Le modèle de Smagorinsky sélectif est présenté dans la partie 4.3.3. De manière simpliste, un modèle de sous-maille ne joue pas directement sur la résolution numérique du calcul. Celui-ci permet en effet de proposer un résultat plus précis et fidèle pour un maillage donné, qui lui est directement responsable de la plus petite échelle calculable. Ainsi l'étude simple de la fréquence de coupure des spectres n'est pas pertinente. En effet, la différence entre les modèles s'attaque à la dynamique de l'écoulement. Les grandeurs les plus pertinentes permettant de comparer les deux modèles sont celles où l'aérodynamique est la plus difficile à capturer, c'est-à-dire la couche de cisaillement et le sillage.

Dans le but de comparer les deux modèles, l'évolution du spectre en vitesse le long de la couche de cisaillement est tracée sur la figure 8.56(a) et la corrélation spatiale sur la figure 8.57(a).

La première remarque est que la décorrélation de la vitesse est aussi rapide entre les deux modèles. Ainsi à un endroit donné de la couche de cisaillement, les deux modèles doivent percevoir quasiment la même topologie de l'écoulement. Cependant même si l'évolution globale du spectre est identique, sa composition diffère. En effet, la composition spectrale des tourbillons de Kelvin-Helmholtz est plus large dans le cas du modèle de Smagorinsky sélectif que pour la VMS. Cela se voit bien sur les spectres (---) et (---) *i.e.* au début de la couche de cisaillement là où les instabilités se créent. Cela signifie que le modèle de sous-maille VMS est plus fin dans son application permettant d'avoir l'émergence d'un signal plus tonal est marqué pour les



FIGURE 8.57 – (a) Évolution de la corrélation spatiale en vitesse et (b) en pression le long de la couche de cisaillement pour la VMS (---) et le Smagorinsky sélectif O_3 (---).



FIGURE 8.58 – (a) Évolution du spectre en pression le long de la couche de cisaillement pour la VMS (– – –) et le modèle sélectif de Smagorinsky O_3 (– –). (b) Position des capteurs.


FIGURE 8.59 – (a) Évolution du spectre en pression le long du sillage pour la VMS (– – –) et le modèle sélectif de Smagorinsky O_3 (– –). (b) Position des capteurs.

instabilités. Cependant, plus l'écoulement devient large bande et que l'influence des instabilités disparait, plus les deux modèles convergent vers un effet et un niveau identique de turbulence.

Sur les quantités en pression, la même analyse est possible, voir figure 8.58(a) et 8.57(b). En effet la décorrélation en pression est aussi rapide entre les deux modèles. Par ailleurs, les phénomènes de Kelvin-Helmholtz et de von Kármán n'ont pas les mêmes contenus spectraux. Le pic de Kelvin-Helmholtz est moins bien résolu avec le critère sélectif et présente de nombreux pics spectraux dans le domaine d'appariement des tourbillons $f \in [10, 20]$ kHz. Ces pics présents en pression mais pas en vitesse peuvent être dûs à la génération d'ondes acoustiques par les appariements des tourbillons à cause de la mauvaise décorrélation des structures. De plus bien que le pic acoustique de von Kármán soit de même niveau, celui-ci est beaucoup moins bien marqué qu'en VMS s'expliquant par une moins bonne résolution du flux numérique encore une fois sur la figure 8.58(a). Le niveau maximal du pic lié à la propagation est de même énergie car la bonne restitution de cette dernière est essentiellement déterminée par la résolution du maillage dans la zone d'intérêt.

L'évolution du spectre en pression ou en vitesse le long du sillage ne présente pas de différence évidente. Cependant sur la figure 8.59(a) traçant le spectre en pression, il est possible de constater que les harmoniques successives du pic de von Kármán sont plus rapidement détruites et moins énergétiques que celle issues de la VMS. La décorrélation des tourbillons de von Kármán est toutefois identique entre les deux modèles comme il est possible de voir sur la figure 8.61(a).

La disparition des harmoniques dans la couche limite sur le spectre (---) plus lente en VMS qu'en sélectif montre par ailleurs la pertinence de la fonction de transition f_d dans le modèle hybride VMS. En effet, cela signifie qu'en plus d'être capable de restituer correctement le comportement linéaire sur l'intrados et logarithmique de l'extrados de la couche limite, l'introduction du champs VMS dans sa partie supérieure permet de conserver plus efficacement l'instationnarité et donc la présence des harmoniques acoustiques.

Entre le bec et le corps principal, l'évolution du spectre et la propagation de la fréquence de von Kármán présente un comportement identique entre les deux modèles, voir figure 8.60(a). Cependant, la VMS décorrèle plus rapidement le signal que ne le fait le modèle de Smagorinsky sélectif 8.61(b).



FIGURE 8.60 – (a) Évolution du spectre en pression le long de l'intercorps pour la VMS (– – –) et le modèle sélectif de Smagorinsky O_3 (– –). (b) Position des capteurs.



FIGURE 8.61 – Évolution de la corrélation spatiale (a) en vitesse le long du sillage et (b) en pression le long de l'intercorps pour la VMS (--) et le Smagorinsky sélectif O_3 (--).



FIGURE 8.62 – Évolution du spectre en pression (a) au début de la couche de cisaillement et (b) au début du sillage. (---) calcul 1, (---) calcul 2, (---) calcul 3.

8.3.2 Effet de l'ordre spatial et du maillage

Apport de l'ordre spatial

Il est intéressant de comparer l'effet de l'ordre sur la simulation numérique. Pour cela le maillage 2 est utilisé et possède exactement la même topologie que le maillage d'ordre élevé utilisé pour les modèles précédents. Se rapporter dans la suite au tableau 8.2 pour les numérotations de calculs.

Sur les figures 8.62 et 8.63, des résultats purement numériques sont tracés. La première chose à remarquer est que la simulation à l'ordre simple O_2 détériore considérablement l'énergie présent dans les spectres. Il est possible de voir sur la figure 8.62(a) que la fréquence des tourbillons de Kelvin-HelmHoltz n'est pas présente. Par ailleurs, les décorrélations en pression et vitesse respectivement le long de la couche de cisaillement 8.63(a) et de la zone entre le bec et le corps principal 8.63(b) présentent d'importantes différences. Premièrement, comme le calcul est moins bien résolu en O_2 qu'en O_3 , la décorrélation en vitesse est moins rapide, confirmant par ailleurs un comportement légèrement meilleur pour la VMS que pour le Smagorinsky sélectif. De plus la décorrélation des von Kármán a une dynamique très différente de celle des deux calculs précédents.

Il est possible d'en conclure que l'ordre spatiale ne permet pas de capter plus de phénomènes que ne le permet le maillage. Le maillage O_2 et O_3 ont exactement la même fréquence de coupure. Toutefois il permet une simulation plus précise des phénomènes simulés.

Effet de maillage

Deux autres calculs ont été menés sur ce cas en dehors de cette thèse. Les simulations ont été faites sur des maillages construits différemment, à l'ordre simple O_2 avec le modèle Smagorinsky sélectif. En terme de simulation, ces deux calculs sont identiques au cas 3 excepté sur la construction du maillage (cas 4 et 5) et sur la taille (cas 5) dont les caractéristiques sont regroupées dans le tableau 8.2.

Sur la figure 8.64, le comportement spectral des différentes zones importantes du calcul est tracé : la couche de cisaillement et le sillage. Au tout début de la couche de cisaillement sur la figure 8.64(a), il est possible de constater plusieurs choses très importantes. L'ordre élevé se comporte comme une amélioration de la précision de la simulation comme le prouve le fait que l'énergie se conserve mieux en hautes fréquences. Dans cette zone, la structure du maillage n'est



FIGURE 8.63 – Évolution de la corrélation spatiale en vitesse (a) le long du sillage et (b) en pression entre le bec et le corps principal. (---) calcul 1, (---) calcul 2, (---) calcul 3.

pas essentielle comme le montrent les calculs 3 et 4. Cependant, même si en terme de résolution spatiale l'ordre élevé semble être mieux défini que l'ordre simple à 89 millions de nœuds (cas 5), il n'en reste pas moins que ce dernier capture un phénomène très marquant à 25 kHz, possédant une harmonique. Dans le reste de la cavité ces deux pics ne sont pas visibles signifiant qu'ils ne rayonnent pas. À cette fréquence, les spectres des calculs 1 et 2 possèdent une remontée d'énergie, qui a été associée au déclenchement des tourbillons de Kelvin-Helmholtz. Ainsi le cas 5 semble mieux maillé dans cette zone spatiale que les calculs 1 et 2. En effet, même si les calculs d'ordre élevé permettent une meilleure résolution pour un maillage donné, il n'en reste pas moins que raffiner permet de capturer des phénomènes supplémentaires. Dans ce cas, le calcul 5 permet d'avoir un établissement plus rapide des instabilités de Kelvin-Helmholtz comparé aux autres calculs. Toutefois, le raffinement du point de rebroussement dans le calcul 5 devrait réduire l'épaisseur de la couche de cisaillement, et finalement augmenter la fréquence des tourbillons de Kelvin-Helmholtz. Il y a donc ici un effet numérique non maîtrisé.

Cependant au milieu de la couche de cisaillement sur la figure 8.64(b), il est possible de voir l'effet de l'ordre sur l'historique du phénomène. En effet, même si le calcul 5 est mieux maillé au début de la couche de cisaillement, il n'en reste pas moins plus dissipatif est donc l'appariement et le transfert d'énergie aux basses fréquences sont en retard comparé aux calculs d'ordre élevé et à l'expérience. La simulation du cas 4 restitue quant à elle très mal la dynamique du spectre dans cette zone surement à cause du maillage. En effet la courbe est comparée à celle du cas 3 qui restitue bien le calcul avec un nombre de nœud équivalent. Cette remarque met en lumière l'importance de la structure et finesse du maillage. Il est d'ailleurs possible de remarquer des pics fréquentiels à 3 et 4 kHz pour le calcul 4 qui se retrouvent sur les figures 8.64(c) et 8.64(d). À la fin de la couche de cisaillement sur la figure 8.64(c), le spectre en pression présente la fréquence de von Kármán mais aussi les deux fréquences d'impact dans le cas du calcul 4. En effet celui-ci étant plus dissipatif, les structures dans la couche de cisaillement sont plus corrélées et n'ont pas eu le temps de se déstructurer. Elles ont donc un rayonnement acoustique plus marqué. Par ailleurs les spectres d'ordre élevé ont plus d'énergie en hautes fréquences, noyant ainsi la fréquence des tourbillons de von Kármán. Finalement le dernier spectre 8.64(d) est celui d'un capteur expérimental positionné dans le sillage. Les niveaux énergétiques du cas 4 sont très bas et permettent de distinguer nettement la fréquence des von Kármán mais aussi leur harmonique. Il est pertinent de remarquer sur la figure 8.64(c) que dans le calcul 4 les pics acoustiques du phénomène d'impact sont présents et de 10 à 20 décibels plus intenses que celui des tourbillons



FIGURE 8.64 – Évolution du spectre en vitesse (a) au début et (b) au milieu de la couche de cisaillement. Évolution du spectre en pression (c) à la fin de la couche de cisaillement et (d) au début du sillage. (---) calcul 1, (---) calcul 2, (---) calcul 3, (---) calcul 4, (---) calcul 5.



FIGURE 8.65 – Visualisation de deux instantanés à des temps différents de S_p (a) pour le calcul 1 et (b) le calcul 5.

de von Kármán.

Sur la figure 8.65 sont tracés des instantanés de S_p à des temps différents pour le calcul 1 et 5. Il est possible d'observer que la topologie de l'écoulement diffère fortement entre les deux calculs. Premièrement le début de la couche de cisaillement semble plus fine et crée des structures plus tôt dans le calcul 5. Cependant, il semblerait que les structures finissent par être redissipées plus loin dans le calcul 5. Il y a donc un retour en arrière dans l'historique spatiale et temporelle de la couche de cisaillement qui expliquerait une cohérence plus prononcée des structures à la fin de la couche de cisaillement. En effet, la quantité S_p y est moins nuageuse et mieux dessinée traduisant un spectre moins large bande dans le calcul 5 que dans le calcul 1. Ce retard peut se voir sur les spectre de la figure 8.64(b) où le spectre du calcul 5 est moins gonflé que celui du 1. Cependant, il est difficile sur un instantané de conclure vraiment sur cette tendance qui peut être un effet de visualisation à un instant t comme par exemple la présence ou non d'une rafale sur le bord de fuite du bec.

Pour confirmer ce raisonnement, l'énergie cinétique turbulente est tracée sur la figure 8.66 permettant de comparer des champs moyens. La tendance décrite sur S_p se confirme. En effet, l'épaisseur de la production turbulente semble plus rapidement grossir sur le calcul 5 comparé au calcul 1. Cependant cette production présente une zone de stagnation, voir même de rétractation un peu après le raffinement du maillage visible sur la figure 8.11(d). La zone d'impact et d'ingestion de structure par le bord de fuite du bec est aussi plus épaisse. Ceci peut s'expliquer par le fait que les structures ne sont pas bien décorrélées et dissipées à cause du retard spatial de la couche de cisaillement. Ainsi les effets de ces structures sont plus énergétiques que dans le cas du calcul 1. Dans l'analyse de ce phénomène, il est possible de voir que cette rétractation perturbant le développement de la couche de cisaillement est due à la transition de maillage visible sur la figure 8.11(d). Ceci montre l'importance de la topologie du maillage.

La comparaison des kulites instationnaires sur le corps principal sur la figure 8.67 permet de vérifier que le pic de von Kármán est bien rayonné dans le champs proche, à la même fréquence dans tout les calculs et quasiment à la même énergie.

Par ailleurs, le spectre rayonné en champ lointain est tracé sur la figure 8.68 pour chacune des simulations et pour le résultat de F2. La simulation 4 présente les pics fréquentiels du point d'impact à des fréquences légèrement plus basses que l'expérience mais d'intensité plus forte. Cela s'explique par le fait que les deux fréquences sont plus marquées à cause de la dissipation



FIGURE 8.66 – Visualisation de l'énergie cinétique turbulente k_t (a) pour le calcul 1 et (b) le calcul 5.



FIGURE 8.67 – Pression instationnaire à la paroi. ($-\Box$) calcul 1, ($-\Box$) calcul 2, ($-\Box$) calcul 2, ($-\Box$) calcul 3, ($-\Delta$ –) calcul 4, ($-\Delta$ –) calcul 5 et ($-\Box$) expérience.



FIGURE 8.68 – Spectre du rayonnement acoustique en champs lointain. (---) calcul 1, (---) calcul 2, (---) calcul 4, (---) calcul 5.



FIGURE 8.69 – Directivité en champ lointain. (- - -) calcul 1, (- - -) calcul 2. Le point noir correspond à la directivité mesurée au centre de l'antenne F2 en dessous du profil.

issue du maillage, de l'ordre spatial et du modèle. Il est donc possible que ces fréquences entre la simulation numérique 4 et l'expérience ne soient pas issues du même mécanisme. Les premières pouvant être dues à la mauvaise décorrélation des structures de Kelvin-Helmholtz et les secondes au mécanisme acoustique évoqué précédemment. Toutefois, une fréquence de l'ordre de 1100 Hz est observée sur le champs lointain pour le calcul 2 et 5 permettant de retrouver la fréquence d'impact établie par la formule (8.2) numériquement. Cela permet de mettre en défaut le modèle sélectif car cela supposerait qu'il décorrèle moins efficacement les structures d'impact à l'origine de la rétroaction. Sur la simulation 4, ces pics disparaissent mais d'autres apparaissent en basse fréquence. Cela peut encore être dû à la mauvaise décorrélation expliquée précédemment. Le spectre 2 est plus plat que les calculs 4 et 5. Cet effet permet de montrer que la tendance et les résultats de l'ordre élevé sont consistant avec la restitution physique du calcul. Par ailleurs, tout les calculs avec le modèle de Smagorinsky sélectif ont des niveaux de bruit en basse et moyenne fréquences plus importants que pour le calcul VMS et que pour l'expérience F2. Cet effet modéré mais significatif, joue en faveur du modèle VMS. Cela peut se voir sur la figure 8.69, où le modèle de Smagorinsky sélectif O_3 sur-estime le champs acoustique lointain par rapport à la VMS et l'expérience.

8.4 Conclusion

L'étude du cas LEISA II permet de valider l'approche du modèle VMS. D'une part dans sa modélisation SGE grâce à la dynamique spectrale des phénomènes et d'autres part dans sa modélisation proche paroi avec les profils de vitesse et le comportement à la sortie des bords de fuite. Le modèle VMS permet de retrouver et d'améliorer les résultats apportés par le modèle de Smagorinsky sélectif. Ce point est validant car ce dernier est couramment utilisé chez Dassault Aviation. De plus quelques différences peuvent être observées. En effet, le senseur du Smagorinsky sélectif permet de corriger partiellement un des problèmes majeurs du Smagorinsky classique *i.e.* de la diffusion turbulente dans les zones dominées par les gradients du champs moyen. Toutefois, il est inefficace dans les zones bien maillées. Les différences entre les modèles VMS et sélectif apparaissent sur l'analyse des corrélations spatiales et sur la naissance des phénomènes de couche de cisaillement et de sillage. Ces différences peuvent être imputées soit à l'historique des couches limites servant de conditions d'entrée à ces phénomènes *i.e.* l'approche hybride de la VMS, soit au support spectral plus précis de la VMS ou soit à l'ordre du filtrage. En effet, la VMS présente de légères améliorations dans chacun de ces effets. Il serait intéressant d'étudier une simulation à l'ordre O_4 pour quantifier plus précisément l'apport de l'ordre du filtrage dans cette amélioration. De plus en champs lointain, le spectre acoustique de la VMS semble être le plus proche de l'expérience en terme d'énergie que les calculs avec le modèle de Smagorinsky sélectif, encourageant donc l'utilisation de la VMS en aéroacoustique. Par ailleurs, l'intégration de la VMS est aussi plus optimale que celle du Smagorinsky sélectif. Le coût de la VMS est nul par rapport au calcul sélectif pour un même ordre spatial. Elle propose une amélioration naturelle du filtrage avec l'ordre présentant des gains potentiels en terme de résolution qui seront à quantifier. Elle permet aussi d'apporter une compréhension numérique et physique du comportement des modèles de sous-maille et du filtrage en éléments finis.

L'ordre élevé propose un gisement très important en terme de gain en précision. En effet pour un maillage donné, le passage à l'ordre élevé permet d'avoir un gain en résolution numérique supérieur à 40%, c'est-à-dire que pour un même nombre de nœuds, la simulation O_3 sera 40% plus précise que la simulation O_2 . Sans d'optimisation du code d'ordre élevé, cela permet aujourd'hui de compenser le coût numérique de la simulation O_3 qui est de l'ordre de 50% plus lent en temps de calcul que la simulation O_2 . Cet ordre de grandeur est obtenu en comparant les simulations 1 et 2 aux simulations 3 et 5. Il est à noter que la version AETHER ordre élevé est une version de développement présentant de nombreux gisements d'optimisation comme la renumérotation de maillage, la concaténation de boucle, l'optimisation de la matrice implicite, l'optimisation des points d'intégration, ... Cependant, le changement d'ordre spatial ne peut pas rajouter de l'information qui est manquée par un maillage trop grossier *i.e.* détruite par le filtrage implicite. Si un phénomène est capturé, l'ordre élevé permet de mieux le restituer grâce à un modèle de sous-maille plus précis et une diffusion numérique moindre. Mais comme il est possible de le voir entre les calculs 1 et 5, le raffinement de maillage est nécessaire pour affiner la capture des phénomènes physiques. Par ailleurs la comparaison entre les calculs 3 et 4 permet d'insister sur l'importance de la construction du maillage. Bien que les deux maillages aient un nombre de points global équivalent, l'énergie des spectres et la physique restituée peut changer.

L'utilisation des ces différentes simulations permet de mieux comprendre la physique des profils hypersustentés dans une configuration infinie sans flèche. Dans ces simulations, trois phénomènes physiques peuvent être attendus. Le premier classique au cas de cavité, est dû à la rétroaction et génère des pseudo pics de Rossiter à l'impact qui dans ce cas semblent pouvoir être retrouvés grâce aux travaux [145]. Cependant, même si le phénomène de rétroaction semble être expliqué, la formule ne permet pas encore de comprendre comment joue l'incidence et le sillage. En effet pour chaque incidence, la géométrie équivalente de la cavité change. Ceci rend encore plus difficile l'étude de ce cas.

Les deux autres phénomènes ont été clairement observés dans cette thèse. La couche de cisaillement à l'origine de l'impact génère un mécanisme d'instabilité de Kelvin-Helmholtz qui présente des appariements dans l'évolution des spectres en vitesse. Ceux-ci ne rayonnent pas directement mais leur impact au point de rattachement produit un signal acoustique très puissant à l'origine de la rétroaction et des pseudo-Rossiter. La restitution précise de l'historique spatial et temporel de la couche de cisaillement est nécessaire afin d'obtenir d'une part les bonnes fréquences mais aussi la bonne énergie émergeant de ce mécanisme.

Le dernier phénomène apparaissant dans cette étude aérodynamique du bec est le bruit généré par les tourbillons de von Kármán dans le sillage issu du bord de fuite à l'extrados du bec. Ceux-ci sont très puissants et sont présents dans une gamme de fréquences où l'énergie du champ proche est très faible. Ainsi, cette étude permet de voir leur rayonnement très présent dans toute la cavité. Cependant, la résolution temporelle des signaux obtenus par la méthode de Curle à l'infini ne permet pas de quantifier le niveau de ce pic vis-à-vis de l'énergie acoustique des fréquences d'impact. Seule l'approximation de la source compact et la négligence des termes retardés permet dans cette thèse d'avoir un ordre de grandeur du pic en champ lointain des tourbillons de von Kármán. Celui-ci est d'intensité acoustique plus faible que le contenu spectral entre [700, 7000] Hz. Par ailleurs, le champ rayonné est aussi marqué par cette fréquence comme il est possible de le voir sur les quantités de divergence de vitesse. De plus un phénomène d'interaction entre le sillage et les bourrasques du point de rattachement semble être en jeu. Les bourrasques viennent élargir le pic acoustique du bord de fuite. Il semblerait logique que le bord de fuite ait aussi un effet sur cette zone d'activité tourbillonnaire.

Dans le cas d'un avion réel, le bruit de voilure est marqué par des fréquences de l'ordre de la centaine de hertz. Cela correspond bien à l'ordre de grandeur des fréquences d'impact si un effet d'échelle est appliqué aux spectres. La corde est ici de 30 cm contre 2 m dans un cas réel. Cependant, il semblerait que le bruit des von Kármán ne soit pas audible bien que dans ce cas il devrait être au alentour de 5 kHz. Plusieurs explications peuvent en être à l'origine. Tout d'abord, il se pourrait que la fréquence des von Kármán soit trop dissipée par la propagation atmosphérique pour émerger sur une plus grande distance. Deuxièmement, les fréquences d'impact sont de l'ordre minimum de 10 décibels plus intenses menant à un son dominé par ces dernières. Il faudra prendre en compte ce phénomène qui deviendra surement majoritaire après de future traitement acoustique du phénomène d'impact. Finalement dans un cas réel, l'aile n'est pas infinie et possède une flèche qui peut détruire les phénomènes de von Kármán. Un effet du nombre de Reynolds peut aussi être favorable à leur destruction dans un cas réel.

Synthèse et Conclusion

Dans ce manuscrit, une synthèse de l'approche globale SGE utilisée dans AETHER *i.e.* pour des éléments finis SUPG de Lagrange symétriques et iso-paramétriques, a d'abord été présentée. Ce travail a permis de regrouper les outils numériques existants pour ce type d'approche tels que la formulation matricielle entropique et sa stabilisation très importante pour la simulation. Des outils pertinents et adaptés ont pu être proposés tels que le calcul des dérivées mais aussi la projection L_2 . Mais surtout, il a été montré que leur utilisation est transparente avec la montée en ordre spatial grâce aux travaux de Normand [118]. Enfin, l'étude numérique du code sur un cas académique simple a permis de quantifier plus précisément les dissipations numériques temporelle et spatiale ainsi que leur équilibre dans AETHER : une faible dispersion et un CFL critique d'équilibre de $CFL_C = 1$ pour une simulation O_2 et de $CFL_C = 0, 2$ pour une simulation O_3 .

Le cœur même de cette thèse réside dans la conception d'une méthode de filtrage numérique permettant de tirer profit de l'ordre spatial et du modèle VMS. Ainsi le filtrage a pu être couplé avec l'approche VMS et les modèles DES déjà existants afin de fournir une méthode robuste de simulation industrielle.

Cette méthode de simulation a été utilisée pour comprendre l'écoulement dans le bec d'un tricorps hypersustenté afin de vérifier numériquement les phénomènes physiques de la littérature mais aussi d'entrevoir d'autres mécanismes apparaissant lors de la simulation de ce type de problème. Le rayonnement acoustique du bec a pu être étudié plus en détails pour mieux comprendre son origine dans l'écoulement complexe de cette configuration.

VMS entropique et filtrage

VMS entropique

La formulation entropique des équations de Navier-Stokes est parfaitement adaptée à la formulation matricielle et à sa résolution numérique. Toutefois, la contrainte associée à une matrice de diffusion symétrique vient bouleverser l'approche classique des modèles de sous-maille selon l'équation de l'énergie. Théoriquement, la VMS a montré qu'elle est capable de répondre aux principaux problèmes adressés aux modèles de sous-maille classiques. Ces problèmes sont résolus en détruisant la colinéarité du flux diffusif des petites structures avec le tenseur des déformations. Afin de répondre aux contraintes de la VMS, une méthode de filtrage est nécessaire ouvrant ainsi un vaste champs du possible quant à la réalisation de ce traitement numérique. Ainsi, la simulation VMS dans AETHER se rapproche des méthodes de simulation par hyper-viscosité. Finalement l'étude numérique de l'interaction entre le modèle de sous-maille et la stabilisation permet de conclure sur la pertinence de l'introduction de la matrice \underline{K}_{ij} de la VMS dans la correction diffusive de la matrice de temps intrinsèque $\underline{\tau}$.

Filtrage éléments finis

De nombreuses approches de filtrages numériques pour éléments finis ont été testées dans ces travaux. Le filtrage en éléments finis revient au final à considérer deux méthodes : la résolution de l'équation de filtrage et la construction des matrices de filtrages. La méthode de résolution consiste à savoir s'il est important d'obtenir le véritable champs filtré continu aux nœuds ainsi qu'à choisir l'étendue désirée du support spectral du filtrage. Différentes manières de résoudre plus ou moins précisément l'équation de filtrage ont été proposées. Tout d'abord la résolution globale permet de calculer précisément l'équation de filtrage au sens éléments finis. Elle permet donc d'exploiter pleinement les deux matrices de filtrage pour accéder à un filtrage type fraction rationnelle mais aussi d'étendre le support spectral parfaitement à tout le domaine. Cette méthode est toutefois très coûteuse. Une méthode approchée consiste à effectuer une moyenne volumique aux éléments afin d'obtenir un champ continu aux nœuds. Cette méthode est plus efficace. Mais dans le but de contrôler le filtrage, les filtres par fraction rationnelle doivent être écarter. De plus le support spectral est réduit aux proches voisins. Finalement, la détermination du filtrage aux points d'intégration est une méthode purement locale à l'élément. Aucune résolution de l'équation de filtrage n'est nécessaire ce qui réduit d'une part le coût de calcul mais aussi rapproche cette méthode de l'estimation de la fonction de Green des échelles de sousmaille. En pratique, la détermination directe aux points d'intégration permet d'avoir un filtrage satisfaisant aujourd'hui. La définition des matrices de filtrage est une question plus épineuse car elle est au cœur de la définition de l'estimateur de la fonction de Green. Trois approches classiques de filtrage ont été étudiées et montrent que dans leur application locale, elles sont toutes équivalentes et rapportées à une matrice de dimension finie dans le cas d'éléments de Lagrange symétriques et iso-paramétriques. Grâce à ces hypothèses, la solution a une évolution polynômiale par morceaux. L'approche du filtrage *polynômial* permet de remonter à une expression globale du filtrage mais est toutefois moins efficace que la méthode par interpolation qui présente de nombreux avantages algorithmiques. Les combinaisons de ces méthodes en vue du filtrage numérique ont ensuite été hiérarchisées au regard du coût numérique versus la précision de la sélection des petites structures de l'écoulement. Ainsi l'utilisateur n'a plus qu'à opter pour une définition unique des matrices de filtrage de dimension finie et une méthode de résolution.

Toutefois, l'interpolation par les fonctions de Lagrange linéaires est la meilleure approche. Elle combine résolution aux points d'intégration et matrice de filtrage par *interpolation*. Elle est négligeable en coût de calcul, satisfaisante en terme de sélection de taille des structures, permet une augmentation naturelle de l'ordre du filtrage qui est le premier acteur des capacités du traitement numérique et enfin se rapproche fortement de l'estimation de la fonction de Green et donc des méthodes de stabilisation utilisant le concept de VMS.

Méthode hybride

Cette thèse développe aussi une méthode de simulation hybride entre SGE et DES. L'approche hybride couplée faiblement est très agile en terme de simulation industrielle. Elle permet de coupler de manière transparente la VMS aux simulations URANS en proche paroi. Le principe est de réutiliser la fonction de protection de la couche limite de la DDES afin de donner une mesure de l'épaisseur de la zone d'action du modèle URANS. Deux paramètres sont alors calculés afin de définir 3 zones. Une première zone entièrement déterminée par les fluctuations de la VMS pouvant être plus ou moins épaisse à l'intérieur de la couche limite. Une zone intermédiaire où le modèle VMS est progressivement remplacé par le modèle URANS. Enfin une zone proche paroi assurant une pure utilisation du modèle URANS afin de correctement calculer l'évolution de la couche limite. Le coefficient de masquage est conçu pour rapidement transitionner entre les modèles mais toutefois assurer une certaine continuité. Puis celui-ci est appliqué aux 3 grandes valeurs du modèle de sous-maille : le champs de vitesse représentant les échelles extraites afin d'interagir avec le modèle, la viscosité turbulente représentant l'intensité du flux modélisé et enfin le gradient des variables entropiques filtrées qui peut être perçu comme le support spectral d'application du flux diffusif. Cette méthode de gestion de la paroi est très adaptée à la méthode implicite de résolution de par son caractère linéaire. Par ailleurs, elle est très simplement interfaçable avec l'approche de saturation proposée dans cette thèse. Cette dernière n'est pas utilisée

dans les calculs menés car la méthode de filtrage choisie mène à un modèle de sous-maille très stable. Il est donc néfaste de brider l'efficacité du modèle VMS par une saturation du modèle pouvant être intempestive comme il a pu être constaté durant certaines simulations.

Validation

L'approche de la partie VMS a été validée sur le cas des tourbillons de Taylor-Green et a présenté de très bons résultats comparés aux modèles classiques. Le modèle de Smagorinsky est sans surprise trop diffusif comparé à la courbe optimale donnée par la DNS. Le modèle de Smagorinsky dynamique spectral permet quant à lui de corriger la valeur de la viscosité turbulente grâce à un niveau de filtrage supplémentaire. Cependant ce dernier ne corrige pas le problème de colinéarité du flux modélisé avec le tenseur des déformations. Le filtrage par *interpolation* utilisant les fonctions de forme O_2 et le filtrage par résolution globale de l'équation de filtrage polynômiale d'ordre 2 sont présentés dans cette thèse et sont comparés entre eux et aux autres modèles. De manière générale, qu'importe la méthode de filtrage utilisée, les calculs VMS sont très satisfaisants et présentent un réel gain vis-à-vis des modèles classiques. Toutefois, des différences entre les filtrages apparaissent tant sur l'effet dynamique qu'au niveau de l'écoulement. Ces différences semblent être à imputer à l'ordre du filtrage permettant de sélectionner plus précisément les échelles de l'écoulement et à la méthode de résolution.

L'approche hybride est validée avec l'étude du cas LEISA II. La VMS capture de manière très précise les plus petites structures de l'écoulement sans pour autant venir détruire les profils de vitesse en proche paroi. Cette approche permet d'introduire dans la partie supérieure de la couche limite des fluctuations permettant apparemment de favoriser une légère extension des effets des tourbillons de von Kármán en amont du bord de fuite du bec comparé à une méthode DDES classique.

Il a été montré que la modification du coefficient de viscosité des modèles de sous-mailles est prépondérante dans la simulation de cet écoulement. En effet, le modèle de Smagorinsky sélectif présente des résultats qui se rapprochent de la VMS car le senseur physique de sélectivité basé sur la vorticité est l'équivalent d'un filtrage d'ordre 0 i.e. il n'évacue du modèle que les effets du champs moyen. Ainsi l'ordre du filtrage équivalent est inférieur pour le critère de sélectivité à celui de la VMS. Malgré cela, l'extinction de la viscosité permet en première approximation, d'éviter la sur-diffusion dans les zones bien maillées comme pour la VMS. L'autre différence subsistante est le support spectral d'application du flux diffusif modélisé lorsque celui-ci n'est pas annulé par la fonction Heaviside. Il semblerait alors que cet effet soit moins flagrant dans ce type d'écoulement présentant un contenu spectral dont l'énergie est stockée en basses et moyennes fréquences. Dans les zones sensibles comme le début des sillages et des couches de cisaillement, des différences subsistent entre les deux modèles, permettant de montrer un apport du modèle VMS vis-à-vis du critère de sélectivité. En effet de manière générale, la VMS permet une meilleure définition des pics fréquentiels des instabilités de Kelvin-Helmholtz et aussi une meilleure restitution de l'énergie des harmoniques des pics de von Kármán. Par ailleurs, le niveau acoustique en champs lointain est légèrement plus faible en VMS que pour toutes les autres simulations DDES, la rendant ainsi plus fiable comparée à l'expérience.

Finalement, le couplage entre la méthode de filtrage utilisant les fonctions de forme O_2 et la stabilisation fonctionne très bien et présente une très bonne stabilité et convergence malgré le cas d'étude complexe. De plus, le modèle donne des résultats convaincant sur les cas étudiés dans cette thèse.

Perspectives

Les travaux réalisés ouvrent de nouvelles opportunités quant à la méthode de filtrage, la VMS et la résolution numérique.

Premièrement, il a été mentionné que la stabilisation SUPG/GMC pouvait par exemple engendrer des problèmes en convergence temporelle. La méthode de filtrage développée ici présente de très fortes analogies avec les méthodes de stabilisation fonctionnant sur des approches VMS d'enrichissement de la solution et d'éléments bulles. Les éléments bulles sont des éléments possédant un nœud en leur centre. Pour plus d'information sur ces méthodes de stabilisation se reporter à [34, 35, 57, 58, 63, 64]. Il semblerait d'ailleurs que leur fonctionnement soit l'inverse du filtrage proposé dans cette thèse. Le filtrage consiste à enlever de l'information à l'inverse de la stabilisation. En effet, bien que ces deux traitements numériques aient un effet diffusif, c'est dans la méthode de construction de chacun de ces termes que leur différence réside. La méthode de filtrage par *interpolation* proposée est d'ailleurs la méthode de filtrage la plus stable parmi celles étudiées. Levasseur [99] avait réalisé une étude spectrale entre l'effet de la stabilisation et du modèle de sous-maille. Il serait judicieux de mener de nouveau cette étude d'une part en fonction des choix de filtrage et d'ordre spatial et d'autre part entre les deux types de stabilisation SUPG/GMC et VMS.

Deuxièmement, il serait intéressant de tester la montée naturelle en ordre du filtrage avec l'ordre de la simulation. Le cas LEISA II pourrait être étudié à l'ordre spatial O_4 afin d'augmenter l'ordre du filtrage de la VMS comparé à l'ordre équivalent du modèle sélectif. Cela permettrait de poursuivre la validation du bon fonctionnement de l'approche VMS à des ordres plus élevés.

Troisièmement, l'étude plus poussée des méthodes de filtrage et en particulier des bases de fonctions d'interpolation pourrait permettre d'améliorer le traitement numérique. Par exemple, l'utilisation de bases hiérarchiques semble être plus adaptée afin de choisir précisément l'ordre du filtrage à appliquer. De plus ces bases peuvent permettre de réaliser des raffinements automatiques de maillage grâce au choix sur chaque éléments des fonctions d'interpolation à utiliser, voir méthode [45].

Au final deux méthodes hybrides de gestion de la paroi pourraient être très prometteuses dans le futur. La méthode hybride couplée fortement semble donner de très bons résultats. Cependant l'intégration algorithmique de ce type d'approche change fortement la forme des équations et leur résolution. Une autre approche consisterait à fusionner la VMS avec l'approche DES. Grâce à l'utilisation adaptée des vitesses filtrées dans l'équation URANS, cette dernière pourrait converger vers un pseudo modèle VMS. Toutefois, le support spectral ne serait pas forcément pris en compte. Il existe des cas où il est assez sensible comme le bruit de jet ... donc son importance plus faible observée dans le cas LEISA II n'est pas une généralité, et spécialement à hauts Reynolds.

Profils hypersustentés

Le travail de cette thèse a aussi montré qu'il est possible aujourd'hui en industrie d'examiner des problèmes concrets d'aéroacoustique grâce à l'utilisation de méthodes instationnaires. L'étude du profil LEISA II permet en plus de valider l'approche numérique et les modèles, de pouvoir s'intéresser à un cas aéroacoustique très bien documenté et au cœur d'une des problématiques industrielles du moment. De plus l'interaction avec les universitaires et d'autres industriels du secteur permet d'avancer dans la compréhension des phénomènes physiques mais aussi de comparer les méthodes et codes de calculs.

Bruit d'impact

Grâce aux simulations réalisées durant cette thèse, il a été possible de vérifier que le bruit de l'impact du bec est le bruit majoritairement rayonné en champs lointain. Afin de bien restituer l'intensité et le contenu spectral de ce bruit, la couche de cisaillement doit être raisonnablement bien maillée et le modèle de sous-maille pertinent. Ainsi les structures sont bien décorrélées aux niveaux de l'impact à l'extrados de la cavité du bec, permettant un phénomène de rétroaction correcte.

Grâce au constat réalisé lors du workshop BANC IV, il apparait que l'incidence joue favorablement sur l'énergie associée aux pics acoustiques de ce phénomène, permettant à cette thèse de proposer une explication sur cet effet et de comprendre la différence entre résultats expérimentaux et numériques. En effet lorsque l'incidence est importante, l'écoulement externe influe fortement sur la couche de cisaillement et dévie les structures de l'impact vers le bord de fuite, affaiblissant ainsi le rayonnement de l'impact et la rétroaction. Au contraire lorsque l'incidence est faible, la configuration géométrique de la cavité protège la couche de cisaillement et le point d'impact qui sont alors moins perturbés. Par ailleurs, la déstructuration tridimensionnelle des tourbillons de la couche de cisaillement peut dépendre du maillage : le maillage doit être assez fin au point de rebroussement pour pouvoir simuler le bon taux d'amplification des instabilités de Kelvin-Helmholtz. Les schémas numériques et le modèle de sous-maille doivent également pouvoir correctement déterminer l'évolution du spectre et la décorrélation des structures afin d'obtenir la bonne composition de l'écoulement à l'impact et ne pas sur-estimer ou sous-estimer la source acoustique. Toute l'importance d'un maillage assez fin et d'un modèle de sous-maille intelligent apparait alors. Ils permettent de bien restituer l'évolution et la destructuration des tourbillons issus des instabilités de Kelvin-Helmholtz.

Par ailleurs, la zone d'impact présente une zone d'intense activité tourbillonnaire. Cette zone est à l'origine de l'écoulement dans la recirculation mais aussi des rafales s'échappant vers le bord de fuite du bec. Ainsi, il ne s'agit pas seulement d'un impact au sens mécanique du terme sur la paroi de la cavité du bec mais aussi d'une interaction avec cette zone très énergétique et turbulente. En effet, les pics d'impact sont présents sur les spectres de vitesse détachés de la paroi. Il est donc possible que les sources acoustiques ne soient pas localisées sur la paroi mais plutôt dans l'activité tourbillonnaire.

Bruit de sillage

Au niveau de l'extrados, l'écoulement associé à une couche limite épaisse et turbulente rencontre un écoulement associé aux rafales générées dans la zone d'impact. Cette déstabilisation du sillage a pour effet d'élargir les pics fréquentiels générés par l'allée de von Kármán dont le mode primaire rayonne fortement dans toute la cavité du bec. Ce rayonnement est présent aux alentours de 50 kHz, c'est-à-dire dans une zone spectrale où l'activité aérodynamique a peu d'énergie. Ceci permet de mettre parfaitement en évidence le bruit de sillage contrairement au bruit d'impact. Il existe une interaction entre les rafales et les tourbillons de von Kármán. Les rafales déstabilisent le sillage et ces derniers peuvent avoir une rétro-action de type appel d'air sur la zone d'activité tourbillonnaire. Cette action peut entretenir et déstabiliser temporellement le phénomène de rafale expliquant l'épaississement des pics de von Kármán. Par-ailleurs, comme il est possible de constater sur la propagation acoustique en champs lointain, l'énergie issue du pic de l'allée de von Kármán est plus faible que celle des pics d'impact et du contenu spectral large bande en moyennes fréquences.

Perspectives

Les phénomènes aéroacoustiques de la cavité de bec ont pu être observés grâce à la simulation numérique. Afin de prolonger l'analyse de l'écoulement étudié dans cette thèse, il serait intéressant de raffiner l'acquisition des peaux instationnaires. Ainsi il sera possible d'observer dans les spectres en champ lointain, le pic fréquentiel des tourbillons de von Kármán grâce à la formulation de Curle pour une source non compacte et sans négliger les temps retardés. Cela pourrait permettre de quantifier plus précisément l'énergie acoustique de ce phénomène comparée à la dynamique du reste du spectre et en particulier au bruit d'impact.

Par ailleurs des simulations à faible et forte incidences pourraient être menées afin d'analyser en profondeur l'effet d'incidence sur le bruit d'impact. De plus, les zones du bord de fuite et d'impact pourraient être précisément analysées afin d'étudier plus clairement, s'ils existent, les mécanismes suivants : la génération de bruit à l'impact, son interaction avec la zone d'activité tourbillonnaire et les rafales et l'effet potentiel de cette zone sur l'allée de von Kármán, sur la recirculation et sur la couche de cisaillement et *vice versa*.

Cependant dans les cas d'avions réels, le bruit majoritaire associé au profil est dû à des fréquences de l'ordre de 500 à 1000 Hz *i.e.* des fréquences d'impact. Les pics associés au sillage de plus hautes fréquences ne sont pas observés ou ne sont pas dominants. L'étude de cas en flèche permettrait d'étudier l'existence des tourbillons de von Kármán qui pourraient être détruits par cet effet de flèche. Ce cas ainsi que la problématique de coin de volet seront proposés via le workshop BANC dans une configuration nommée SWALHI permettant d'approfondir l'étude de bruit de profil et pouvoir par la suite proposer et étudier l'influence de palliatifs (porosités locales par exemple).

Quatrième partie

Annexe

Annexe A

Formulation matricielle

A.1 Navier-Stokes et notation d'Einstein

La notation d'Einstein est un moyen très pratique d'écrire les équations vectorielles. De plus, cette notation apporte plus de simplicité dans la déclinaison en équations matricielles.

A.1.1 Équation de conservation de la masse

Sous forme de notation d'Einstein, il vient simplement

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0 \tag{A.1}$$

où l'indice muet, j = 1, ...3.

A.1.2 Équation de conservation de la quantité de mouvement

Dans cette annexe est montré comment découle l'équation vectorielle de Navier-Stokes grâce à la notation d'Einstein. Pour cela la loi de comportement du fluide dans cette notation est définie par

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu S_{ij} - \frac{2}{3}\mu \left[\mathbf{tr} \left[\underline{\mathbf{S}} \right] \underline{\mathcal{I}} \right]_{ij}$$

où l'indice vectoriel, i = 1, ...3. L'expression de <u>S</u> est donnée par

$$\left[\underline{\mathbf{S}}\right]_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{A.2}$$

De plus

$$\begin{aligned} \mathbf{tr}\left[\underline{\mathbf{S}}\right] &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{tr}\left[\underline{\mathbf{grad}}\left(\underline{\mathbf{u}}\right)\right] + \mathbf{tr}\left[\underline{\mathbf{grad}}\left(\underline{\mathbf{u}}\right)^{T}\right] \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{j}}{\partial x_{j}} + \frac{\partial u_{j}}{\partial x_{j}} \right) \\ &= \frac{\partial u_{j}}{\partial x_{i}} \end{aligned}$$

Ainsi en introduisant l'expression (A.2) dans la loi, il vient

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}$$
(A.3)

L'application de l'opérateur divergence à la matrice des contraintes fluides donne

$$\begin{cases} \left[\underline{\operatorname{div}}\left(p\underline{\mathcal{I}}\right)\right]_{i} = \frac{\partial p\delta_{ij}}{\partial x_{j}} = \frac{\partial p}{\partial x_{i}} \\ \left[\underline{\operatorname{div}}\left(\underline{\operatorname{grad}}\left(\underline{\mathbf{u}}\right)\right)\right]_{i} = \frac{\partial}{\partial x_{j}}\left(\frac{\partial u_{i}}{\partial x_{j}}\right) = \frac{\partial^{2}u_{i}}{\partial x_{j}^{2}} \\ \left[\underline{\operatorname{div}}\left(\underline{\operatorname{grad}}\left(\underline{\mathbf{u}}\right)^{T}\right)\right]_{i} = \frac{\partial}{\partial x_{j}}\left(\frac{\partial u_{j}}{\partial x_{i}}\right) = \frac{\partial^{2}u_{j}}{\partial x_{j}\partial x_{i}} \\ \left[\underline{\operatorname{div}}\left(\operatorname{tr}\left[\underline{\underline{\mathbf{S}}}\right]\underline{\mathcal{I}}\right)\right]_{i} = \frac{\partial}{\partial x_{j}}\left(\frac{\partial u_{k}}{\partial x_{k}}\delta_{ij}\right) = \frac{\partial^{2}u_{i}}{\partial x_{i}\partial x_{j}} \end{cases}$$
(A.4)

Ainsi en utilisant les résultats de A.4, il en résulte

$$\left[\underline{\operatorname{div}}\left(\underline{\sigma}\right)\right]_{i} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_{j}} = -\frac{\partial p}{\partial x_{i}} + \mu \frac{\partial^{2} u_{i}}{\partial x_{j}^{2}} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial^{2} u_{j}}{\partial x_{j} \partial x_{i}}$$

Remarque A.1 (Transformation tensorielle) Il est très facile alors de retrouver l'expression tensorielle (1.6).

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \left[\underline{\mathbf{grad}}\left(p\right)\right]_i \\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = \left[\underline{\Delta}\left(\underline{\mathbf{u}}\right)\right]_{ij} \\ \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} = \left[\underline{\mathbf{grad}}\left(\mathbf{div}\left(\underline{\mathbf{u}}\right)\right)\right]_i \end{cases}$$

Remarque A.2 (Transformation Einstein) Voici l'expression première de la loi de conservation de la quantité de mouvement

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}$$
(A.5)

Il est possible de donner une seconde expression, beaucoup plus pratique pour déterminer l'écriture matricielle du système d'équation de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div}\left(\underline{\mathbf{u}}\right) + \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\operatorname{grad}}\left(\rho\right) = 0 \quad \text{Conservation de la masse} \\ \underbrace{\rho \frac{\partial u_i}{\partial t}}_{p \frac{\partial u_i}{\partial t}} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \cdots \quad \text{Conservation de la quantité de mouvement} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \\ \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} - u_i \quad \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{-\rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j}}_{-\rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j}} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \cdots \\ -\rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j}}_{\frac{\partial \rho u_i}{\partial x_j}} + u_i u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \cdots \\ \underbrace{\frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j}}_{\frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j}} + u_i u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \cdots \\ \underbrace{\frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j}}_{\frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j}} + u_i u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \cdots \\ \underbrace{\frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j}}_{\frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j}} + u_i u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \cdots \\ \underbrace{\frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j}}_{\frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j}} + u_i u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \cdots \\ \underbrace{\frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j}}_{\frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j}} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \cdots \\ \underbrace{\frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j}}_{\frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j}} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \dots \\ \underbrace{\frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j}}_{\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \dots \\ \underbrace{\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}}_{\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \dots \\ \underbrace{\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}}_{\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}} + \dots \\ \underbrace{\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}}_{\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}} + \dots \\ \underbrace{\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}}_{\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}} + \dots \\ \underbrace{\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}}_{\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}} + \dots \\ \underbrace{\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}}_{\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}} + \dots \\ \underbrace{\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}}_{\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}} + \dots \\ \underbrace{\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}}_{\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}} + \dots \\ \underbrace{\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}}_{\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}} + \dots \\ \underbrace{\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}}_{\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}} + \dots \\ \underbrace{\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}}_{\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}} + \dots \\ \underbrace{\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}}_{\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}} + \dots \\ \underbrace{\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}}_{\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}} + \dots \\ \underbrace{\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}}_{\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}} + \dots \\ \underbrace{\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}}_{\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}} + \dots \\ \underbrace{\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}}_{\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}} + \dots \\ \underbrace{\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}}_{\frac{\partial$$

Ainsi donc, il découle

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}$$

Ou encore plus simplement

$$\left| \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial S_{ij}^{\rm D}}{\partial x_j} \right|$$
(A.6)

A.1.3 Équation de conservation de l'énergie

Il est possible de décliner l'équation de conservation de l'énergie vectorielle sous la notation d'Einstein de la même manière que précédemment

$$\left| \frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \frac{\partial \rho e_t u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial p u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial S_{ij}^{\mathrm{D}} u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \right|$$
(A.7)

A.2 Matrices des flux d'Euler et de diffusivité

Soit le système d'équation en notation d'Einstein

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial \rho u_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1 u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial S_{1j}^{\mathrm{D}}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial \rho u_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_2 u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_2} = \frac{\partial S_{2j}^{\mathrm{D}}}{\partial x_j} \Rightarrow \quad \underline{\mathbf{U}}_{,t} + \underline{\mathcal{F}}_{j,j} = \underline{\mathcal{F}}^{\mathrm{diff}}_{,j,j} \\ \frac{\partial \rho u_3}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_3 u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_3} = \frac{\partial S_{3j}^{\mathrm{D}}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \frac{\partial \rho e_t u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial p u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial S_{ij}^{\mathrm{D}} u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \end{cases}$$

Où les matrices conservatives s'expriment par

$$\underline{\mathbf{U}} = \rho \begin{pmatrix} 1\\ u_1\\ u_2\\ u_3\\ e_t \end{pmatrix}; \quad \underline{\mathcal{F}}_j = \begin{pmatrix} \rho u_j\\ \rho u_j u_1 + p\delta_{1j}\\ \rho u_j u_2 + p\delta_{2j}\\ \rho u_j u_3 + p\delta_{3j}\\ \rho u_j e_t + pu_j \end{pmatrix}; \quad \underline{\mathcal{F}}^{\mathrm{diff}}_{-j} = \begin{pmatrix} 0\\ S_{1j}^{\mathrm{D}}\\ S_{2j}^{\mathrm{D}}\\ S_{3j}^{\mathrm{D}}\\ S_{ij}^{\mathrm{D}} u_i - q_j \end{pmatrix}$$

Premièrement $\underline{\mathcal{F}}_i$ est étudiée et exprimée en fonctions des variables conservatives. Pour un gaz parfait, $\rho e_t = p/(\gamma - 1) + 1/2u_k u_k$, et il est possible alors d'écrire

$$\underline{\mathcal{F}}_{j} = \begin{pmatrix} U_{j+1} & \\ \frac{U_{2}U_{j+1}}{U_{1}} + \left((\gamma - 1) U_{5} - \frac{1}{2} \frac{U_{k+1}^{2}}{U_{1}} \right) \delta_{1j} \\ \frac{U_{3}U_{j+1}}{U_{1}} + \left((\gamma - 1) U_{5} - \frac{1}{2} \frac{U_{k+1}^{2}}{U_{1}} \right) \delta_{2j} \\ \frac{U_{4}U_{j+1}}{U_{1}} + \left((\gamma - 1) U_{5} - \frac{1}{2} \frac{U_{k+1}^{2}}{U_{1}} \right) \delta_{3j} \\ \frac{\gamma U_{5}U_{j+1}}{U_{1}} - \frac{1}{2} \left(\frac{U_{k+1}}{U_{1}} \right)^{2} U_{j+1} \end{pmatrix}$$

Ainsi, si la matrice des flux d'Euler est définie de la manière suivante $\underline{\underline{A}}_i = \underline{\mathcal{F}}_{j,\underline{\mathbf{U}}}$ il découle

$$\underline{\underline{A}}_{i} = \begin{bmatrix} 0 & \delta_{1,i} & \delta_{2,i} & \delta_{3,i} & 0 \\ -\frac{U_2U_{i+1}}{U_1^2} + \delta_{1i}\frac{1}{2}\frac{U_{j+1}^2}{U_1^2} & (\gamma - 1)\,\delta_{1,i} \\ -\frac{U_3U_{i+1}}{U_1^2} + \delta_{2i}\frac{1}{2}\frac{U_{j+1}^2}{U_1^2} & \underline{\underline{A}}_i^{sub} & (\gamma - 1)\,\delta_{2,i} \\ -\frac{U_4U_{i+1}}{U_1^2} + \delta_{3i}\frac{1}{2}\frac{U_{j+1}^2}{U_1^2} & (\gamma - 1)\,\delta_{3,i} \\ -\frac{\gamma U_5U_{i+1}}{U_1^2} + \frac{U_{j+1}^2}{U_1^3}U_{i+1} & A_i\,(5,2) & A_i\,(5,3) & A_i\,(5,4) & \frac{\gamma U_{i+1}}{U_1} \end{bmatrix}$$

où $\underline{\mathbf{A}}_{i}^{sub}$ et $A_{i}(5, l)$ sont définies par

$$\begin{pmatrix}
A_i (5,2) = \left(\frac{\gamma U_5}{U_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{U_{j+1}}{U_1}\right)^2\right) \delta_{1i} - \frac{U_{i+1}U_{j+1}}{U_1} \delta_{1j} \\
A_i (5,3) = \left(\frac{\gamma U_5}{U_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{U_{j+1}}{U_1}\right)^2\right) \delta_{2i} - \frac{U_{i+1}U_{j+1}}{U_1} \delta_{2j} \\
A_i (5,4) = \left(\frac{\gamma U_5}{U_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{U_{j+1}}{U_1}\right)^2\right) \delta_{3i} - \frac{U_{i+1}U_{j+1}}{U_1} \delta_{3j}
\end{cases}$$

$$A_{i}(k,l)^{sub} = \frac{U_{i+1}}{U_{1}}\delta_{k,l} + \frac{U_{k+1}}{U_{1}}\delta_{i,l} - \frac{U_{j+1}}{U_{1}}\delta_{k,i}\delta_{j,l}$$

L'étude de la matrice $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{ij}$ peut se faire de la même manière à partir de l'étude de $\underline{\mathcal{F}}^{\text{diff}}_{j}$ en exprimant cette dernière en fonction de $\underline{\underline{\mathbf{U}}}_{,j}$. Ce qu'il est cependant intéressant de retenir est que chacune des matrices $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{i}$ et $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{ij}$ dépend aussi des variables conservatives.

A.3 Formulaire thermodynamiques d'un gaz divariant

Grandeurs thermodynamiques

$\mu = e_i + pv - \mathrm{T}s$	(Potentiel chimique massique)
$\mu = \mu \left(p, \mathbf{T} \right)$	(Equation d'état)
$v = \frac{1}{\rho} = \left(\frac{\partial\mu}{\partial p}\right)_{\mathrm{T}}$	(Masse volumique)
$s = -\left(\frac{\partial\mu}{\partial\mathrm{T}}\right)_p$	(Entropie)
$ds = \frac{1}{T} \left(de_i + p dv \right)$	(Relation de Gibbs)
$h = e_i + pv = \mu + \mathrm{T}s$	(Enthalpie massique)

Coefficients thermodynamiques

$$\begin{aligned} \alpha_p &= \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial p \partial T} \right) & \text{(Dilatation)} \\ \beta_T &= -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial p^2} \right)_T & \text{(Compressibilité isotherme)} \\ c_p &= \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p = -T \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial T^2} \right)_p & \text{(Capacité thermique à pression constante)} \\ c_T &= \left(\frac{\partial e_i}{\partial T} \right)_v & \text{(Capacité thermique à volume constant)} \\ c_p - c_v &= \frac{\alpha_p^2 v T}{\beta_T} & \text{(Relation de Mayer)} \end{aligned}$$

Remarque A.3 (ATTENTION) μ représente ici le potentiel chimique. Ne pas confondre avec la viscosité dynamique.

A.4 Changement de variable entropique

Ce changement de variable n'est pas opérable directement. Il nécessite de passer par une variable intermédiaire plus simple $\underline{\mathbf{Y}}$ définie de la manière suivante

$$\underline{\mathbf{Y}} = \left(\begin{array}{c} v\\ \underline{\mathbf{u}}\\ e_i \end{array}\right)$$

où e_i est l'énergie interne. L'indice *i* n'est donc plus un indice vectoriel. Ainsi, la détermination de la variable entropique $\underline{\mathbf{V}}$, se fait en deux étapes

$$\underline{\mathbf{V}}=\mathcal{H}_{,\underline{\mathbf{U}}}=\mathcal{H}_{,\underline{\mathbf{Y}}}\left(\underline{\mathbf{U}}_{,\underline{\mathbf{Y}}}\right)^{-1}$$

Tout d'abord il est important de déterminer $\mathcal{H}_{,\underline{\mathbf{Y}}}$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Y_{1}} = \left(\frac{\partial - \frac{s}{v}}{\partial v}\right)_{\underline{\mathbf{u}},e_{i}} = \frac{s}{v^{2}} - \frac{1}{v} \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_{\underline{\mathbf{u}},e_{i}} = \frac{s}{v^{2}} - \frac{1}{vT} \left(\frac{\partial e_{i}}{\partial v}\right)_{\underline{\mathbf{u}},e_{i}} - \frac{p}{vT} \left(\frac{\partial v}{\partial v}\right)_{\underline{\mathbf{u}},e_{i}} = \frac{s}{v^{2}} - \frac{p}{vT} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Y_{i+1}} = \left(\frac{\partial - \frac{s}{v}}{\partial V_{i}}\right)_{v,e_{i}} = \frac{s}{v^{2}} \left(\frac{\partial v}{\partial V_{i}}\right)_{v,e_{i}} - \frac{1}{vT} \left(\frac{\partial e_{i}}{\partial V_{i}}\right)_{v,e_{i}} - \frac{p}{vT} \left(\frac{\partial v}{\partial V_{i}}\right)_{v,e_{i}} = 0, \quad (i \in [1,3]) \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Y_{5}} = \left(\frac{\partial - \frac{s}{v}}{\partial e_{i}}\right)_{v,\underline{\mathbf{u}}} = \frac{s}{v^{2}} \left(\frac{\partial v}{\partial e_{i}}\right)_{v,\underline{\mathbf{u}}} - \frac{1}{vT} \left(\frac{\partial e_{i}}{\partial e_{i}}\right)_{v,\underline{\mathbf{u}}} - \frac{p}{vT} \left(\frac{\partial v}{\partial e_{i}}\right)_{v,\underline{\mathbf{u}}} = -\frac{1}{vT} \end{cases}$$

Ainsi, il découle

$$\mathcal{H}_{,\underline{\mathbf{Y}}} = \frac{1}{v^2 \mathrm{T}} \begin{pmatrix} s \mathrm{T} - p v \\ 0 \\ 0 \\ -v \end{pmatrix}$$

Puis la seconde matrice du problème $\underline{\mathbf{U}}_{,\mathbf{Y}}$

$$\begin{split} \left[\underline{\mathbf{U}}_{,\underline{\mathbf{Y}}}\right]_{1,j} \left(j \in [1,5]\right) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_1}{\partial Y_1} &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial v}\right)_{\underline{\mathbf{u}},e_i} = \left(\frac{\partial 1/v}{\partial v}\right)_{\underline{\mathbf{u}},e_i} = -\frac{1}{v^2} \\ \frac{\partial U_1}{\partial Y_{i+1}} &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial V_i}\right)_{v,e_i} = -\frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial V_i}\right)_{v,e_i} = 0, \quad i \in [1,3] \\ \frac{\partial U_1}{\partial Y_5} &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial e_i}\right)_{v,\underline{\mathbf{u}}} = -\frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial e_i}\right)_{v,\underline{\mathbf{u}}} = 0 \end{split}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{U}}, \underline{\mathbf{Y}} \end{bmatrix}_{k,j} \begin{pmatrix} k \in [2,4] \\ j \in [1,5] \end{pmatrix} \begin{cases} \frac{\partial U_k}{\partial Y_1} = \left(\frac{\partial \frac{V_l}{v}}{\partial v}\right)_{\underline{\mathbf{u}},e_i} = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial V_l}{\partial v}\right)_{\underline{\mathbf{u}},e_i} - \frac{V_l}{v^2} = -\frac{V_l}{v^2} \\ \frac{\partial U_k}{\partial Y_{i+1}} = \left(\frac{\partial \frac{V_l}{v}}{\partial V_i}\right)_{v,e_i} = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial V_l}{\partial V_i}\right)_{v,e_i} - \frac{V_l}{v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial V_i}\right)_{v,e_i} = \frac{\delta_{li}}{v}, \qquad i \in [1,3] \\ \frac{\partial U_k}{\partial Y_5} = \left(\frac{\partial \frac{V_l}{v}}{\partial e_i}\right)_{v,\underline{\mathbf{u}}} = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial V_l}{\partial e_i}\right)_{v,\underline{\mathbf{u}}} - \frac{V_l}{v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial e_i}\right)_{v,\underline{\mathbf{u}}} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}, \underline{\mathbf{y}} \end{bmatrix}_{5,j} (j \in [1, 5]) \begin{cases} \frac{\partial U_5}{\partial Y_1} = \left(\frac{\partial \rho e_t}{\partial v}\right)_{\underline{\mathbf{u}}, e_i} &= -\frac{e_t}{v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial v}\right)_{\underline{\mathbf{u}}, e_i} + \frac{1}{v} \left(\frac{\partial e_t}{\partial v}\right)_{\underline{\mathbf{u}}, e_i} \\ &= -\frac{e_t}{v^2} + \frac{1}{v} \left(\frac{\partial e_i + e_c}{\partial v}\right)_{\underline{\mathbf{u}}, e_i} = -\frac{e_t}{v^2} \\ \frac{\partial U_5}{\partial Y_{i+1}} = \left(\frac{\partial \rho e_t}{\partial V_i}\right)_{v, e_i} &= -\frac{e_t}{v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial V_i}\right)_{v, e_i} + \frac{1}{v} \left(\frac{\partial e_t}{\partial V_i}\right)_{v, e_i} \\ &= \frac{1}{v} \left(\left(\frac{\partial e_i}{\partial V_i}\right)_{v, e_i} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_l^2}{\partial V_i}\right)_{v, e_i}\right) = \frac{V_l \delta_{il}}{v} \\ \frac{\partial U_5}{\partial Y_5} = \left(\frac{\partial \rho e_t}{\partial e_i}\right)_{v, \underline{\mathbf{u}}} &= -\frac{e_t}{v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial e_i}\right)_{v, \underline{\mathbf{u}}} + \frac{1}{v} \left(\frac{\partial e_t}{\partial e_i}\right)_{v, \underline{\mathbf{u}}} \\ &= \frac{1}{v} \left(\left(\frac{\partial e_i}{\partial e_i}\right)_{v, \underline{\mathbf{u}}} + \frac{1}{v} \left(\frac{\partial e_t}{\partial e_i}\right)_{v, \underline{\mathbf{u}}}\right) = \frac{1}{v} \end{cases}$$

où
$$\begin{pmatrix} i \in [1,3] \\ l \in [1,3] \end{pmatrix}$$
. Ainsi, il vient

$$\underline{\mathbf{U}}_{,\underline{\mathbf{Y}}} = -\frac{1}{v^2} \begin{pmatrix} 1 & V_1 & V_2 & V_3 & e_t \\ 0 & -v & 0 & 0 & -vu_1 \\ 0 & 0 & -v & 0 & -vu_2 \\ 0 & 0 & 0 & -v & -vu_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix}$$

Ainsi grâce à la méthode de Gauss, il est possible d'inverser la matrice $\underline{\mathbf{U}}_{,\underline{\mathbf{Y}}}$ et obtenir $\left(\underline{\mathbf{U}}_{,\underline{\mathbf{Y}}}\right)^{-1}$ puis $\underline{\mathbf{V}}$

$$\left(\underline{\mathbf{U}}_{,\underline{\mathbf{Y}}}\right)^{-1} = -v^2 \begin{pmatrix} 1 & \frac{V_1}{v} & \frac{V_2}{v} & \frac{V_3}{v} & \frac{e_t}{v} - \frac{2e_c}{v} \\ 0 & -\frac{1}{v} & 0 & 0 & \frac{V_1}{v} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{v} & 0 & \frac{V_2}{v} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{v} & \frac{V_3}{v} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{v} & \frac{V_3}{v} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{v} \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{split} \underline{\mathbf{V}} &= \mathcal{H}_{,\underline{\mathbf{Y}}} \left(\underline{\mathbf{U}}_{,\underline{\mathbf{Y}}} \right)^{-1} = \frac{1}{v^2 \mathrm{T}} \begin{pmatrix} s \mathrm{T} - p v \\ 0 \\ 0 \\ -v \end{pmatrix} \ast -v^2 \begin{pmatrix} 1 & \frac{V_1}{v} & \frac{V_2}{v} & \frac{V_3}{v} & \frac{e_t}{v} - \frac{2e_c}{v} \\ 0 & -\frac{1}{v} & 0 & 0 & \frac{V_1}{v} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{v} & 0 & \frac{V_2}{v} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{v} & \frac{V_3}{v} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{v} & \frac{V_3}{v} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{v} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{T} \begin{pmatrix} \mu - e_c \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ -1 \end{pmatrix} \end{split}$$

A.5 Matrices entropiques

A.5.1 La matrice $\underline{\widetilde{A}}_0$

La matrice $\underline{\underline{\widetilde{A}}}_{0}$ est définie de la manière suivante

$$\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{0} = \underline{\mathbf{U}}_{,\underline{\mathbf{V}}}$$

Comme pour la détermination du vecteur $\underline{\mathbf{V}}$, il est indispensable de passer par un nouveau vecteur plus utile : $\underline{\mathbf{X}} = (p, \underline{\mathbf{u}}, \mathbf{T})$. Ainsi, grâce aux formules de calcul matriciel des matrices de passage, il découle que pour 3 bases $\underline{\mathbf{U}}, \underline{\mathbf{V}}, \underline{\mathbf{X}}$ il existe la formule suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathbf{U}}_{\underline{\mathbf{V}}} = \underline{\mathbf{X}}_{\underline{\mathbf{V}}} \cdot \underline{\mathbf{U}}_{\underline{\mathbf{X}}} \\ (\underline{\mathbf{U}}_{\underline{\mathbf{V}}})^{-1} = \underline{\mathbf{V}}_{\underline{\mathbf{U}}} \end{array} \right.$$

La première équation signifie que pour passer de l'expression de la dérivé de $\underline{\mathbf{U}}$ dans la base $\underline{\mathbf{X}}$ à l'expression de la dérivé de $\underline{\mathbf{U}}$ dans la base $\underline{\mathbf{V}}$, il faut multiplier par la fonction qui transforme la dérivé de $\underline{\mathbf{X}}$ dans la base $\underline{\mathbf{V}}$. Ainsi, il vient

$$\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{0}=\left(\underline{\mathbf{V}}_{,\underline{\mathbf{X}}}
ight) ^{-1}\underline{\mathbf{U}}_{,\underline{\mathbf{X}}}$$

Tout d'abord il faut déterminer $\underline{\mathbf{U}}_{,\mathbf{X}}$

$$\begin{split} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{U}}_{,\underline{\mathbf{X}}} \end{bmatrix}_{1,j} \left(j \in [1,5] \right) \begin{cases} \frac{\partial U_1}{\partial X_1} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{\underline{\mathbf{u}},\mathrm{T}} = \frac{\beta_{\mathrm{T}}}{v} \\ \frac{\partial U_1}{\partial X_{i+1}} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial u_i} \right)_{p,\mathrm{T}} = 0, \quad i \in [1,3] \\ \frac{\partial U_1}{\partial X_5} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial \mathrm{T}} \right)_{p,\underline{\mathbf{u}}} = -\frac{\alpha_p}{v} \end{cases} \\ \\ \underline{\mathbf{U}}_{,\underline{\mathbf{X}}} \end{bmatrix}_{n,j} \begin{pmatrix} n \in [2,4] \\ j \in [1,5] \end{pmatrix} \begin{cases} \frac{\partial U_n}{\partial X_1} = \left(\frac{\partial \rho u_l}{\partial p} \right)_{\underline{\mathbf{u}},\mathrm{T}} = \frac{u_l \beta_{\mathrm{T}}}{v} \\ \frac{\partial U_n}{\partial X_{i+1}} = \left(\frac{\partial \rho u_l}{\partial u_i} \right)_{p,\mathrm{T}} = \frac{\delta_{li}}{v}, \quad i \in [1,3] \\ \frac{\partial U_n}{\partial X_5} = \left(\frac{\partial \rho u_l}{\partial \mathrm{T}} \right)_{p,\underline{\mathbf{u}}} = -\frac{u_l \alpha_p}{v} \end{split}$$

$$\begin{split} \left[\underline{\mathbf{U}}_{,\underline{\mathbf{X}}}\right]_{5,j} \left(j \in [1,5]\right) \begin{cases} \begin{array}{l} \frac{\partial U_5}{\partial X_1} &= \left(\frac{\partial \rho e_t}{\partial p}\right)_{\underline{\mathbf{u}},\mathrm{T}} \\ &= e_t \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{\underline{\mathbf{u}},\mathrm{T}} + \rho \left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_{\underline{\mathbf{u}},\mathrm{T}} + \mathrm{T}\rho \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_{\underline{\mathbf{u}},\mathrm{T}} \\ &- p\rho \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{\underline{\mathbf{u}},\mathrm{T}} + \rho \left(\frac{\partial e_c}{\partial p}\right)_{\underline{\mathbf{u}},\mathrm{T}} \\ &= p\beta_{\mathrm{T}} - \mathrm{T}\alpha_p + \frac{\beta_{\mathrm{T}} e_t}{v} \\ \frac{\partial U_5}{\partial X_{i+1}} &= \left(\frac{\partial \rho e_t}{\partial u_i}\right)_{p,\mathrm{T}} = \frac{u_i \delta_{ij}}{v}, \quad i \in [1,3] \\ \frac{\partial U_5}{\partial X_5} &= \left(\frac{\partial \rho e_t}{\partial \mathrm{T}}\right)_{p,\underline{\mathbf{u}}} = -\frac{\alpha_p e_t}{v} + \frac{c_p}{v} - p\alpha_p \end{split}$$

Ainsi, il vient

$$\mathbf{\underline{U}}_{,\underline{\mathbf{X}}} = \begin{pmatrix} \frac{\beta_{\mathrm{T}}}{v} & \frac{u_{1}\beta_{\mathrm{T}}}{v} & \frac{u_{2}\beta_{\mathrm{T}}}{v} & \frac{u_{3}\beta_{\mathrm{T}}}{v} & p\beta_{\mathrm{T}} - \mathrm{T}\alpha_{p} + \frac{\beta_{\mathrm{T}}e_{t}}{v} \\ 0 & \frac{1}{v} & 0 & 0 & \frac{u_{1}}{v} \\ 0 & 0 & \frac{1}{v} & 0 & \frac{u_{2}}{v} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{v} & \frac{u_{2}}{v} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{v} & \frac{u_{3}}{v} \\ -\frac{\alpha_{p}}{v} & -\frac{u_{1}\alpha_{p}}{v} & -\frac{u_{2}\alpha_{p}}{v} & -\frac{u_{3}\alpha_{p}}{v} & -\frac{\alpha_{p}e_{t}}{v} + \frac{c_{p}}{v} - p\alpha_{p} \end{pmatrix}$$

Puis la matrice $\underline{\mathbf{V}}_{,\underline{\mathbf{X}}}$ est déterminée

$$\begin{split} \left[\underline{\mathbf{V}}_{,\underline{\mathbf{X}}}\right]_{1,j} \left(j \in [1,5]\right) \begin{cases} \left. \frac{\partial V_1}{\partial X_1} = \left(\frac{\partial \frac{\mu - e_c}{\mathbf{T}}}{\partial p}\right)_{\underline{\mathbf{u}},\mathbf{T}} = \frac{v}{\mathbf{T}} \\ \left. \frac{\partial V_1}{\partial X_{i+1}} = \left(\frac{\partial \frac{\mu - e_c}{\mathbf{T}}}{\partial u_i}\right)_{p,\mathbf{T}} = -\frac{u_i \delta_{ij}}{\mathbf{T}}, \quad i \in [1,3] \\ \left. \frac{\partial V_1}{\partial X_5} = \left(\frac{\partial \frac{\mu - e_c}{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{T}}\right)_{p,\underline{\mathbf{u}}} = -\frac{h - e_c}{\mathbf{T}^2} \end{split}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\underline{V}}_{,\underline{\mathbf{X}}} \end{bmatrix}_{n,j} \quad \begin{pmatrix} n \in [2,4] \\ j \in [1,5] \end{pmatrix} \begin{cases} \frac{\partial V_n}{\partial X_1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \frac{u_l}{\mathrm{T}}}{\partial p} \end{pmatrix}_{\underline{\mathbf{u}},\mathrm{T}} = 0 \\ \frac{\partial V_n}{\partial X_{i+1}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \frac{u_l}{\mathrm{T}}}{\partial u_i} \end{pmatrix}_{p,\mathrm{T}} = \frac{\delta_{li}}{\mathrm{T}}, \quad i \in [1,3] \\ \frac{\partial V_n}{\partial X_5} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \frac{u_l}{\mathrm{T}}}{\partial \mathrm{T}} \end{pmatrix}_{p,\underline{\mathbf{u}}} = -\frac{u_l}{\mathrm{T}^2} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{V}}_{,\underline{\mathbf{X}}} \end{bmatrix}_{5,j} (j \in [1,5]) \begin{cases} \frac{\partial V_5}{\partial X_1} = \left(\frac{\partial - \frac{1}{\mathrm{T}}}{\partial p}\right)_{\underline{\mathbf{u}},\mathrm{T}} = 0\\ \frac{\partial V_5}{\partial X_{i+1}} = \left(\frac{\partial - \frac{1}{\mathrm{T}}}{\partial u_k}\right)_{p,\mathrm{T}} = 0, \quad i \in [1,3]\\ \frac{\partial V_5}{\partial X_5} = \left(\frac{\partial - \frac{1}{\mathrm{T}}}{\partial \mathrm{T}}\right)_{p,\underline{\mathbf{u}}} = \frac{1}{\mathrm{T}^2} \end{cases}$$

Ainsi, il découle

$$\underline{\mathbf{V}}_{,\underline{\mathbf{X}}} = \begin{pmatrix} \frac{v}{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{u_1}{\mathrm{T}} & \frac{1}{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{u_2}{\mathrm{T}} & 0 & \frac{1}{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ -\frac{u_3}{\mathrm{T}} & 0 & 0 & \frac{1}{\mathrm{T}} & 0 \\ -\frac{u_3}{\mathrm{T}} & 0 & 0 & \frac{1}{\mathrm{T}} & 0 \\ -\frac{h-e_c}{\mathrm{T}^2} & -\frac{u_1}{\mathrm{T}^2} & -\frac{u_2}{\mathrm{T}^2} & -\frac{u_3}{\mathrm{T}^2} & \frac{1}{\mathrm{T}^2} \end{pmatrix}$$

L'inversion de la matrice est faite par méthode de Gauss

$$\left(\underline{\mathbf{V}}_{,\underline{\mathbf{X}}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{T}}{v} & 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{u_{1}\mathrm{T}}{v} & \mathrm{T} & 0 & 0 & 0\\ \frac{u_{2}\mathrm{T}}{v} & 0 & \mathrm{T} & 0 & 0\\ \frac{u_{3}\mathrm{T}}{v} & 0 & 0 & \mathrm{T} & 0\\ \frac{(h+e_{c})\mathrm{T}}{v} & u_{1}\mathrm{T} & u_{2}\mathrm{T} & u_{3}\mathrm{T} & \mathrm{T}^{2} \end{pmatrix}$$

Ainsi, il est possible de calculer la matrice $\underline{\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}}_0$

$$\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{0} = \frac{\beta_{\mathrm{T}} \mathrm{T}}{v^{2}} \begin{pmatrix} 1 & u_{1} & u_{2} & u_{3} & \widetilde{A}_{0}\left(1,5\right) \\ & \widetilde{A}_{0}\left(2,2\right) & u_{1}u_{2} & u_{1}u_{3} & \widetilde{A}_{0}\left(2,5\right) \\ & & \widetilde{A}_{0}\left(3,3\right) & u_{2}u_{3} & \widetilde{A}_{0}\left(3,5\right) \\ & & & \widetilde{A}_{0}\left(4,4\right) & \widetilde{A}_{0}\left(4,5\right) \\ & & & & & \widetilde{A}_{0}\left(5,5\right) \end{pmatrix}$$

où par calcul il vient pour $i \in [2,4]$

$$\begin{split} \widetilde{A}_{0}\left(i,i\right) &= \frac{v^{2}}{\beta_{\mathrm{T}}\mathrm{T}} \left(\frac{u_{i-1}\beta_{\mathrm{T}}}{v} \frac{u_{i-1}\mathrm{T}}{v} + \frac{\mathrm{T}}{v}\right) \\ &= \frac{v^{2}}{\beta_{\mathrm{T}}\mathrm{T}} \left(\frac{u_{i-1}^{2}\beta_{\mathrm{T}}\mathrm{T}}{v^{2}} + \frac{\mathrm{T}}{v}\right) \\ &= u_{i-1}^{2} + \frac{v}{\beta_{\mathrm{T}}}, \quad (i \in [2, 4]) \end{split}$$
$$\begin{split} \widetilde{A}_{0}\left(i, 5\right) &= \frac{v^{2}}{\beta_{\mathrm{T}}\mathrm{T}} \left(\frac{u_{i-1}\mathrm{T}}{v} \left(p\beta_{\mathrm{T}} - \mathrm{T}\alpha p + \frac{\beta_{\mathrm{T}}e_{t}}{v}\right) + \frac{u_{i-1}}{v}\mathrm{T}\right) \\ &= \frac{u_{i-1}v}{\beta_{\mathrm{T}}} \left(p\beta_{\mathrm{T}} - \mathrm{T}\alpha_{p} + \frac{\beta_{\mathrm{T}}e_{t}}{v} + 1\right) \\ &= u_{i-1} \left(pv - v\mathrm{T}\frac{\alpha_{p}}{\beta_{\mathrm{T}}} + e_{t} + \frac{v}{\beta_{\mathrm{T}}}\right) \\ &= u_{i-1} \left(e_{i} + k_{c} + pv - \frac{v}{\beta_{\mathrm{T}}}\left(\mathrm{T}\alpha_{p} - 1\right)\right) \\ &= u_{i-1} \left(h + k_{c} - \frac{v}{\beta_{\mathrm{T}}}\left(\mathrm{T}\alpha_{p} - 1\right)\right), \quad (i \in [2, 4]) \end{split}$$
$$\end{split}$$
$$\begin{split} \widetilde{A}_{0}\left(1, 5\right) &= \frac{v^{2}}{\beta_{\mathrm{T}}\mathrm{T}}\frac{\mathrm{T}}{v} \left(p\beta_{\mathrm{T}} - \mathrm{T}\alpha_{p} + \frac{\beta_{\mathrm{T}}e_{t}}{v}\right) \\ &= \frac{v}{\beta_{\mathrm{T}}} \left(p\beta_{\mathrm{T}} - \mathrm{T}\alpha_{p} + \frac{\beta_{\mathrm{T}}e_{t}}{v}\right) \\ &= pv - v\mathrm{T}\frac{\alpha_{p}}{\beta_{\mathrm{T}}} + e_{t} \\ &= h + k_{c} - v\mathrm{T}\frac{\alpha_{p}}{\beta_{\mathrm{T}}} \end{split}$$

$$\begin{split} \widetilde{A}_{0}\left(5,5\right) &= \frac{v^{2}}{\beta_{\mathrm{T}}\mathrm{T}}\left(\left(h+k_{c}\right)\frac{\mathrm{T}}{v}\left(p\beta_{\mathrm{T}}-\mathrm{T}\alpha_{p}+\frac{\beta_{\mathrm{T}}e_{t}}{v}\right)+u_{i}^{2}\frac{\mathrm{T}}{v}-\frac{\alpha_{p}e_{t}\mathrm{T}^{2}}{v}+\frac{c_{p}\mathrm{T}^{2}}{v}-p\alpha_{p}\mathrm{T}^{2}\right) \\ &= \left(h+k_{c}\right)\frac{v}{\beta_{\mathrm{T}}}\left(\left(p+\frac{e_{t}}{v}\right)\beta_{\mathrm{T}}-\mathrm{T}\alpha_{p}\right)+u_{i}^{2}\frac{v}{\beta_{\mathrm{T}}}-\frac{\alpha_{p}ve_{t}\mathrm{T}}{\beta_{\mathrm{T}}}+\frac{vc_{p}\mathrm{T}}{\beta_{\mathrm{T}}}-\frac{v^{2}p\alpha_{p}\mathrm{T}}{\beta_{\mathrm{T}}}\right) \\ &= \left(h+k_{c}\right)\left(h+k_{c}-v\mathrm{T}\frac{\alpha_{p}}{\beta_{\mathrm{T}}}\right)+\frac{v}{\beta_{\mathrm{T}}}\left(2k_{c}-\alpha_{p}e_{t}\mathrm{T}+c_{p}\mathrm{T}-p\alpha_{p}v\mathrm{T}\right) \\ &= \left(h+k_{c}\right)^{2}-\left(h+k_{c}\right)v\mathrm{T}\frac{\alpha_{p}}{\beta_{\mathrm{T}}}+\frac{v}{\beta_{\mathrm{T}}}\left(2k_{c}+c_{p}\mathrm{T}-\alpha_{p}\mathrm{T}\left(e_{t}+pv\right)\right) \\ &= \left(h+k_{c}\right)^{2}+\frac{v}{\beta_{\mathrm{T}}}\left(-\left(h+k_{c}\right)\alpha_{p}\mathrm{T}+2k_{c}+c_{p}\mathrm{T}-\alpha_{p}\mathrm{T}\left(h+k_{c}\right)\right) \\ &= \left(h+k_{c}\right)^{2}+\frac{v}{\beta_{\mathrm{T}}}\left(c_{p}\mathrm{T}-2\left(h+k_{c}\right)\alpha_{p}\mathrm{T}+2k_{c}\right) \\ &= \left(h+k_{c}\right)^{2}+\frac{v}{\beta_{\mathrm{T}}}\left(c_{p}\mathrm{T}-2h\alpha_{p}\mathrm{T}-2k_{c}\left(\alpha_{p}\mathrm{T}-1\right)\right) \end{split}$$

A.5.2 Les matrices $\underline{\widetilde{A}}_i$ et $\underline{\widetilde{K}}_{ij}$

Il est possible de faire le même calcul pour déterminer les matrices $\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_i$ et $\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij}$. Seules leurs formes sont présentées ici. Soit

$$\begin{array}{ll} c_1 = \bar{\gamma} e_i + u_1^2; & k_1 = k + \gamma e_i; \\ c_2 = \bar{\gamma} e_i + u_2^2; & k_2 = k + e_i; \\ c_1 = \bar{\gamma} e_i + u_3^2; & k_3 = k + (\bar{\gamma} + \gamma) e_i; \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} k_4 = k^2 + 2\gamma e_i k + \gamma e_i^2; \\ k_5 = k_4^2 + 2\bar{\gamma} e_i (k + \gamma e_i); \\ k_5 = k_4^2 + 2\bar{\gamma} e_i (k + \gamma e_i); \end{array}$$

où $k = \|\underline{\mathbf{u}}^2\|/2$ est l'énergie cinétique spécifique, $e_i = c_v T$ l'énergie interne spécifique et $\bar{\gamma} = \gamma - 1$. Les matrices $\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_i$ sont exprimées par

Pour les matrices $\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij}$, les coefficients supplémentaires suivants sont définis

$$\begin{cases} \chi = \lambda + 2\mu \\ Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda} \end{cases}$$

où ici μ est la viscosité dynamique. Ainsi, les matrices sont définies par

$$\underline{\underline{\widetilde{\mathbf{K}}}}_{11}(\mu,\lambda,\kappa,\underline{\mathbf{u}}) = \mathbf{T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \chi & 0 & 0 & \chi u_1 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & \mu u_2 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & \mu u_3 \\ 0 & \chi u_1 & \mu u_2 & \mu u_3 & \chi u_1^2 + \mu \left(u_2^2 + u_3^2\right) + \frac{\mu c_p}{Pr} \mathbf{T} \end{bmatrix}$$

$$\begin{split} \widetilde{\underline{\mathbf{K}}}_{22}(\mu,\lambda,\kappa,\underline{\mathbf{u}}) &= \mathbf{T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \\ 0 & \mu & 0 & 0 & \mu & \mu u_1 \\ 0 & 0 & \chi & 0 & \chi u_2 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & \mu u_3 \\ 0 & \mu u_1 & \chi u_2 & \mu u_3 & \chi u_2^2 + \mu \left(u_1^2 + u_3^2\right) + \frac{\mu c_p}{P_r} \mathbf{T} \\ \widetilde{\underline{\mathbf{K}}}_{33}(\mu,\lambda,\kappa,\underline{\mathbf{u}}) &= \mathbf{T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu u_1 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & \mu u_2 \\ 0 & 0 & 0 & \chi & \chi u_3 \\ 0 & \mu u_1 & \mu u_2 & \chi u_3 & \chi u_3^2 + \mu \left(u_1^2 + u_2^2\right) + \frac{\mu c_p}{P_r} \mathbf{T} \\ \widetilde{\underline{\mathbf{K}}}_{12}(\mu,\lambda,\kappa,\underline{\mathbf{u}}) &= \widetilde{\underline{\mathbf{K}}}_{21}^{\mathrm{T}} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & \lambda u_2 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & \mu u_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu u_2 & \lambda u_1 & 0 & (\lambda + \mu) u_1 u_2 \end{bmatrix} \\ \widetilde{\underline{\mathbf{K}}}_{13}(\mu,\lambda,\kappa,\underline{\mathbf{u}}) &= \widetilde{\underline{\mathbf{K}}}_{31}^{\mathrm{T}} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \lambda u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu u_1 \\ 0 & \mu u_3 & 0 & \lambda u_1 & (\lambda + \mu) u_1 u_3 \end{bmatrix} \\ \widetilde{\underline{\mathbf{K}}}_{23}(\mu,\lambda,\kappa,\underline{\mathbf{u}}) &= \widetilde{\underline{\mathbf{K}}}_{32}^{\mathrm{T}} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \lambda u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \lambda u_3 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & \mu u_2 \\ 0 & 0 & \mu u_3 & \lambda u_2 & (\lambda + \mu) u_2 u_3 \end{bmatrix}$$

Annexe B

Méthode des éléments finis

B.1 Intégration par parties et formulation faible

La formulation classique d'intégration par parties en trois dimensions suivante est utilisée.

Formule B.1 (Intégration par parties) Soit un espace Ω de frontière Γ . Soient f et g deux fonctions $C^1 \{\Omega\}$ et f' et g' respectivement leurs différentielles.

 $Alors \ la \ relation \ suivante \ est \ vraie$

$$\int_{\Omega} f'gd\Omega = \int_{\Gamma} fgd\Gamma - \int_{\Omega} fg'd\Omega$$

Soit l'équation suivante

$$\int_{\Omega_n} \underline{\mathbf{W}} \cdot \left(\underline{\widetilde{\underline{\mathbf{A}}}}_0 \mathbf{V}_{,t} + \underline{\mathcal{L}} \left(\underline{\mathbf{V}} \right) \right) d\Omega_n = 0$$

$$\Longrightarrow$$

$$\int_{\Omega_n} \left[\underbrace{\underline{\mathbf{W}} \cdot \underline{\widetilde{\underline{\mathbf{A}}}}_0 \mathbf{V}_{,t}}_{\mathcal{I}_1} + \underbrace{\underline{\mathbf{W}} \cdot \underline{\widetilde{\underline{\mathbf{A}}}}_i \mathbf{V}_{,i}}_{\mathcal{I}_2} - \underbrace{\underline{\mathbf{W}} \cdot \left(\underline{\widetilde{\underline{\mathbf{K}}}}_{ij} \underline{\mathbf{V}}_{,j} \right)_{,i}}_{\mathcal{I}_3} \right] d\Omega_n = 0$$

Intégrons par parties chacune des trois intégrales

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{1} &= \int_{\Omega} \left[\underline{\mathbf{W}} \cdot \underline{\mathbf{U}} \right]_{t_{n}^{+}}^{t_{n+1}^{-}} d\Omega_{n} - \int_{\Omega_{n}} \underline{\mathbf{W}}_{,t} \cdot \underline{\mathbf{U}} d\Omega_{n} \\ \mathcal{I}_{2} &= \int_{\Gamma_{n}} \underline{\mathbf{W}} \cdot \underline{\mathcal{F}}_{i} d\Gamma_{n} - \int_{\Omega_{n}} \underline{\mathbf{W}}_{,i} \cdot \underline{\mathcal{F}}_{i} d\Omega_{n} \\ \mathcal{I}_{3} &= \int_{\Gamma_{n}} \underline{\mathbf{W}} \cdot \underline{\mathcal{F}}_{i}^{\text{diff}} d\Gamma_{n} - \int_{\Omega_{n}} \underline{\mathbf{W}}_{,i} \cdot \underline{\mathcal{F}}_{i}^{\text{diff}} d\Omega_{n} \end{aligned}$$

Ainsi, en rassemblant les équations il vient

$$\int_{\Omega_n} \left(\mathbf{\underline{W}}_{,i} \cdot \underline{\mathcal{F}}^{\text{diff}}_{ii} - \mathbf{\underline{W}}_{,i} \cdot \underline{\mathcal{F}}_i - \mathbf{\underline{W}}_{,i} \cdot \underline{\mathbf{U}} \right) d\Omega_n + \int_{\Omega} \left(\left[\mathbf{\underline{W}} \cdot \underline{\mathbf{U}} \right]_{t_n^+}^{t_{n+1}^-} \right) d\Omega_n + \int_{\Gamma_n} \left(\mathbf{\underline{W}} \cdot \underline{\mathcal{F}}_i - \mathbf{\underline{W}} \cdot \underline{\mathcal{F}}^{\text{diff}}_{ii} \right) d\Gamma_n = 0$$

En réarrangeant et en ajoutant la condition de saut il découle

$$\int_{\Omega_{n}} \left(\underline{\mathbf{W}}_{,i} \cdot \underline{\mathcal{F}}^{\text{diff}}_{i} - \underline{\mathbf{W}}_{,i} \cdot \underline{\mathcal{F}}_{i} - \underline{\mathbf{W}}_{,t} \cdot \underline{\mathbf{U}} \right) d\Omega_{n} \\
+ \int_{\Omega} \underline{\mathbf{W}} \left(t_{n+1}^{-} \right) \cdot \underline{\mathbf{U}} \left(t_{n+1}^{-} \right) - \underline{\mathbf{W}} \left(t_{n}^{+} \right) \cdot \underline{\mathbf{U}} \left(t_{n}^{+} \right) + \underline{\mathbf{W}} \left(t_{n}^{+} \right) \cdot \underline{\mathbf{U}} \left(t_{n}^{+} \right) - \underline{\mathbf{W}} \left(t_{n}^{+} \right) \cdot \underline{\mathbf{U}} \left(t_{n}^{+} \right) - \underline{\mathbf{W}} \left(t_{n}^{+} \right) \cdot \underline{\mathbf{U}} \left(t_{n}^{-} \right) d\Omega_{n} \\
+ \int_{\Gamma_{n}} \left(\underline{\mathbf{W}} \cdot \left(\underline{\mathcal{F}}_{i} - \underline{\mathcal{F}}^{\text{diff}}_{i} \right) \right) d\Gamma_{n} = 0$$



FIGURE B.1 – Élément quelconque (gauche) et élément de référence (droite) en 2D

C'est-à-dire

$$\int_{\Omega_n} \left(\underline{\mathbf{W}}_{,i} \cdot \left(\underline{\mathcal{F}}^{\text{diff}}_{i} - \underline{\mathcal{F}}_{i} \right) - \underline{\mathbf{W}}_{,t} \cdot \underline{\mathbf{U}} \right) d\Omega_n
+ \int_{\Omega} \left(\underline{\mathbf{W}} \left(t_{n+1}^- \right) \cdot \underline{\mathbf{U}} \left(t_{n+1}^- \right) - \underline{\mathbf{W}} \left(t_n^+ \right) \cdot \underline{\mathbf{U}} \left(t_n^- \right) \right) d\Omega_n
+ \int_{\Gamma_n} \left(\underline{\mathbf{W}} \cdot \left(\underline{\mathcal{F}}_{i} - \underline{\mathcal{F}}^{\text{diff}}_{i} \right) \right) d\Gamma_n = 0$$

B.2 Élément de référence

Cette partie d'annexe montre la manière d'obtenir la matrice jacobienne dans le cas d'un élément 3D tétraédrique. Prenons un élément tétraédrique de coordonnées $\underline{\mathbf{x}} = (x, y, z)$ et un élément de référence de coordonnées $\underline{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$, voir la figure B.1. L'élément de référence sera défini sur [0, 1] pour les triangles, tétraèdres *etc* ... mais sur [-1, 1] pour les briques, pavés *etc* ... Sur l'élément de référence, il est très simple de déterminer les fonctions d'interpolation qui sont au nombre de 4 pour l'ordre standard en 3D. Ce sont les suivantes

$$\begin{cases} N_1 = 1 - \xi - \eta - \zeta \\ N_2 = \xi \\ N_3 = \eta \\ N_4 = \zeta \end{cases}$$

Ainsi pour passer dans le domaine réel de l'élément, il suffit de multiplier par le déterminant du jacobien qui se calcul très simplement en calculant l'inverse de la matrice jacobienne qui est de dimension 3×3 dans ce cas 3D

$$\left[\underline{\mathbf{J}}^{e}\right]^{-1} = \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial \underline{\xi}} = \sum_{a=1}^{n_{en}} \frac{\partial \mathbf{N}_{a}}{\partial \underline{\xi}} \underline{\mathbf{x}}_{a}$$

car $\underline{\mathbf{x}}_a$ est une constante. Ainsi il suffit simplement de connaître le valeur des fonctions d'interpolation, leur dérivée sur l'élément de référence et les coordonnées des sommets réels pour résoudre le problème

$$\left[\underline{\mathbf{J}}^{e}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} = \sum_{a=1}^{3} \frac{\partial N_{a}}{\partial \xi} x_{a} & a_{12} = \sum_{a=1}^{3} \frac{\partial N_{a}}{\partial \xi} y_{a} & a_{13} = \sum_{a=1}^{3} \frac{\partial N_{a}}{\partial \xi} z_{a} \\ a_{21} = \sum_{a=1}^{3} \frac{\partial N_{a}}{\partial \eta} x_{a} & a_{22} = \sum_{a=1}^{3} \frac{\partial N_{a}}{\partial \eta} y_{a} & a_{23} = \sum_{a=1}^{3} \frac{\partial N_{a}}{\partial \eta} z_{a} \\ a_{31} = \sum_{a=1}^{3} \frac{\partial N_{a}}{\partial \zeta} x_{a} & a_{32} = \sum_{a=1}^{3} \frac{\partial N_{a}}{\partial \zeta} y_{a} & a_{33} = \sum_{a=1}^{3} \frac{\partial N_{a}}{\partial \zeta} z_{a} \end{bmatrix}$$

où il vient simplement

$$\begin{cases} N_1 = 1 - \xi - \eta - \zeta & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -1 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} = -1 & \frac{\partial N_3}{\partial \zeta} = -1 \\ N_2 = \xi & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} = 1 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} = 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} = 0 \\ N_3 = \eta & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} = 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} = 1 & \frac{\partial N_3}{\partial \zeta} = 0 \\ N_4 = \zeta & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} = 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} = 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \zeta} = 1 \end{cases}$$

Il en découle simplement le déterminant du jacobien par la formule de Sarrus et en sachant qu'une matrice et son inverse ont le même déterminant

$$\det \left[\underline{\mathbf{J}}^e \right] = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{22}a_{13}a_{31} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

De la même manière, il existe un expression analytique très simple pour inverser et obtenir le jacobien lorsque la dimension de la matrice est 2. La méthode des cofacteurs et la comatrice de $\left[\underline{\mathbf{J}}^e\right]^{-1}$ sont utilisées

$$\underline{\mathbf{J}}^{e} = \frac{1}{\det\left[\underline{\mathbf{J}}^{e}\right]} Com\left(\left[\underline{\mathbf{J}}^{e}\right]^{-1}\right)^{T}$$
$$= \frac{1}{\det\left[\underline{\mathbf{J}}^{e}\right]} \begin{bmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} & a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \\ a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32} \\ a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} & a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{bmatrix}$$

Il en émerge la grande simplicité de l'implémentation en éléments finis. Il suffit de stocker uniquement les poids des points d'intégration, les valeurs des fonctions de forme et de leurs gradients aux points d'intégration uniquement sur l'élément de référence pour calculer les coefficients des matrices du problème. De plus l'expression de la matrice jacobienne est analytique et donc très simple à calculer. Cela montre encore plus l'intérêt des éléments symétriques car sans ceux-ci, il serait par exemple à l'ordre 3 plus difficile de calculer et de définir l'inverse d'une matrice cubique pour calculer la dérivée seconde. Pour plus d'information sur les différentes grandeurs de l'élément de référence à l'ordre n, se reporter à la thèse de Normand [118].

B.3 Equation d'advection diffusion 1D

Le cas 1D de l'équation d'advection-diffusion stationnaire est étudiée sur le segment [0, L]. L'équation à résoudre est la suivante

$$u\frac{\partial\Phi}{\partial x} = K\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}$$

où les conditions limites sont $\Phi(0) = g$ et $\partial \Phi / \partial x(L) = q$.

La formulation variationnelle de ce problème est

$$\int_{[0,L]} w \left(u \frac{\partial \Phi}{\partial x} - K \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) dx = 0$$

où w est pris dans l'espace des fonctions de pondération valant 0 lorsque qu'il y a une condition de Dirichlet.

Soit $\Phi = \Phi^h + g$ où Φ^h est une restriction de Φ hors des conditions limites de Dirichlet et g la fonction complémentaire sur cet espace (valant 0 sinon). Il vient alors

$$\begin{cases} \int_{[0,L]} wu \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx = \int_{[0,L]} wu \frac{\partial \Phi^h}{\partial x} dx + \int_{[0,L]} wu \frac{\partial g}{\partial x} dx \\ \int_{[0,L]} wK \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dx = \left[wK \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_0^L - \int_{[0,L]} \frac{\partial w}{\partial x} K \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx \end{cases}$$

Comme les fonctions de pondération ont été choisies pour être nulles sur les conditions de Dirichlet alors il ne reste que

$$\int_{[0,L]} wK \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dx = w_L K q - \int_{[0,L]} \frac{\partial w}{\partial x} K \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx$$

Ainsi la formulation faible devient

$$\int_{[0,L]} wu \frac{\partial \Phi^h}{\partial x} dx + \int_{[0,L]} wu \frac{\partial g}{\partial x} dx - w_L Kq + \int_{[0,L]} \frac{\partial w}{\partial x} K \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx = 0$$

où en séparant les conditions limites des équations du volume

$$\int_{[0,L]} \left(wu + K \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial \Phi^h}{\partial x} dx = \underbrace{w_L K q}_{\text{Condition de Neumann}} - \underbrace{\int_{[0,L]} \left(wu + K \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial g}{\partial x} dx}_{\text{Condition de Dirichlet}}$$

Cette formulation a plusieurs intérêts. Premièrement, elle découple bien les termes volumiques qui se trouvent à gauche de l'équation et dont l'ordre est abaissé, ne laissant que des dérivées premières qui sont plus simple à calculer en élément finis. Il n'y a plus de gradient d'ordre 2. Il est possible de construire alors simplement la matrice masse des éléments intérieurs. Deuxièmement, les différentes conditions limites sont séparées en famille. Les conditions de Dirichlet sont ajoutées à la matrice masse sur les éléments frontières en fonction de leur intégrale. Les conditions de Neumann sont simplement ajoutées sur les nœuds frontières car ce sont en fait des flux. Ainsi la taille du système linéaire à résoudre n'est pas celui du nombre de nœuds mais bien $n_p - n_{\text{Condition Dirichlet}}$ *i.e.* la taille de l'espace de Φ^h , soit encore la taille de l'espace \mathcal{V}_n définit dans à l'équation (2.1).

B.4 Matrices tangente et résidu élémentaires

Cette partie a pour de démontrer les formules (2.9) et (2.10) à partir de la discrétisation temporelle et spatiale de la formulation variationnelle des équations de Navier-Stokes. Cette équation est la suivante

$$\int_{\Omega_n} \underline{\mathbf{W}} \cdot \left(\underline{\mathbf{U}}_{,t} + \underline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{i,i} - \underline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}^{\text{diff}}_{i,i} \right) d\Omega_n = 0 \tag{B.1}$$

Par intégration par parties des termes en espace, la formulation (2.3) est retrouvée mais sans l'intégration en temps.

$$\int_{\Omega_n} \underline{\mathbf{W}} \cdot \underline{\mathbf{U}}_{,t} d\Omega_n + \int_{\Gamma_n} \underline{\mathbf{W}} \cdot \left(\underline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_i - \underline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}^{\text{diff}}_{i} \right) d\Gamma_n - \int_{\Omega_n} \underline{\mathbf{W}}_{,i} \cdot \left(\underline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_i - \underline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}^{\text{diff}}_{i} \right) d\Omega_n = 0$$

Il est possible de projeter les fonctions $\underline{\mathbf{W}}$ et d'appliquer le schéma en temps. En discrétisant $\underline{\mathbf{W}}$, le système non linéaire du problème est alors obtenu. Le schéma en temps se détermine grâce à un développement de Taylor de la dérivée temporelle

$$\begin{cases} \Phi^{n+1} \simeq \Phi^n + \Phi^{n+1}_{,t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi^{n+1}}{\partial t^2} \Delta t^2 \\ \frac{\partial^2 \Phi^{n+1}}{\partial t^2} \Delta t^2 \simeq 2\Phi^n - \Phi^{n+1} - \Phi^{n-1} \\ \Rightarrow \Phi^{n+1}_{,t} \Delta t \simeq \frac{3}{2} \Phi^{n+1} - 2\Phi^n + \frac{1}{2} \Phi^{n-1} \end{cases}$$



FIGURE B.2 – Élément de référence tétraédrique 3D

Le résidu est obtenu

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{a}^{e} &= \int_{\Omega_{n}^{e}} \mathrm{N}_{a} \left(\frac{3}{2} \underline{\mathbf{U}} \left(\underline{\mathbf{V}} \right) - 2 \underline{\mathbf{U}} \left(\underline{\mathbf{V}}^{n} \right) + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{U}} \left(\underline{\mathbf{V}}^{n-1} \right) \right) d\Omega_{n}^{e} \\ &+ \Delta t \int_{\Omega_{n}^{e}} \left(-\mathrm{N}_{a,i} \underline{\mathcal{F}}_{i} \left(\underline{\mathbf{V}} \right) + \mathrm{N}_{a,i} \underline{\mathcal{F}}^{\mathrm{diff}}_{i} \left(\underline{\mathbf{V}} \right) \right) d\Omega_{n}^{e} \\ &+ \Delta t \int_{\Gamma_{n}^{e}} \mathrm{N}_{a} \left(\underline{\mathcal{F}}_{i} \left(\underline{\mathbf{V}} \right) - \underline{\mathcal{F}}^{\mathrm{diff}}_{i} \left(\underline{\mathbf{V}} \right) \right) n_{i} d\Gamma_{n}^{e} \end{aligned}$$

Il est à noter que cette formulation est exacte et n'a subit aucune simplification. Pour obtenir la matrice tangente, il suffit de dériver le résidu par rapport à $\underline{\mathbf{V}}$ projeté sur l'ensemble des fonctions de forme. Ce qui donne en utilisant la notation matricielle

$$\begin{cases} \mathbf{\underline{V}}(\mathbf{\underline{x}},t) = \sum_{b=1}^{n_p} \mathbf{N}_b (\mathbf{\underline{x}}) V_b \\ \left[\frac{d \mathbf{\underline{U}}}{d \mathbf{\underline{V}}} \right]_b = \underline{\widetilde{\mathbf{\underline{A}}}}_0 \mathbf{N}_b \\ \left[\frac{d \mathbf{\underline{\mathcal{F}}}_i}{d \mathbf{\underline{V}}} \right]_b = \underline{\widetilde{\mathbf{\underline{A}}}}_i \mathbf{N}_b \\ \left[\frac{d \mathbf{\underline{\mathcal{F}}}^{\mathrm{diff}}_i}{d \mathbf{\underline{V}}} \right]_b = \underline{\widetilde{\mathbf{\underline{K}}}}_{ij} \mathbf{N}_{b,j} \end{cases}$$

L'expression de la matrice masse du système Navier-Stokes entropique est alors

$$\mathcal{M}_{ab}^{e} = \int_{\Omega_{n}^{e}} \frac{3}{2} \mathrm{N}_{a} \underline{\widetilde{\mathbf{\Delta}}}_{0} \mathrm{N}_{b} d\Omega_{n}^{e} + \Delta t \int_{\Omega_{n}^{e}} \left(-\mathrm{N}_{a,i} \underline{\widetilde{\mathbf{\Delta}}}_{i} \mathrm{N}_{b} + \mathrm{N}_{a,i} \underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij} \mathrm{N}_{b,j} \right) d\Omega_{n}^{e} + \Delta t \int_{\Gamma_{n}^{e}} \mathrm{N}_{a} \left(\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}_{i} \mathrm{N}_{b} - \underline{\widetilde{\mathbf{K}}}_{ij} \mathrm{N}_{b,j} \right) n_{i} d\Gamma_{n}^{e}$$

B.5 Exemple de calcul de règle d'intégration

Ce paragraphe montre comment déterminer des règles d'intégration. L'exemple choisi est le tétraèdre en ordre standard. L'élément de référence est représenté sur la figure B.2. Sur cet élément de référence, les fonctions d'interpolation sont

$$\begin{cases} N_1 = 1 - x - y - z \\ N_2 = x \\ N_3 = y \\ N_4 = z \end{cases}$$

De plus, l'intégrale des fonctions de forme sur l'élément est fait de la manière suivante, en paramétrant les axes x et y

$$\int_{\Omega^e} \mathcal{N}_a d\Omega^e = \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} \left(\int_0^{1-y-z} \mathcal{N}_a dx \right) dy \right) dz$$

Ainsi le système à résoudre pour obtenir les points d'intégration est le suivant

$$\begin{cases} (1-\xi-\eta-\zeta)\,\omega = \frac{1}{24} \\ \xi\omega = \frac{1}{24} \\ \eta\omega = \frac{1}{24} \\ \zeta\omega = \frac{1}{24} \end{cases}$$

Ce qui donne bien les résultats du tableau 2.1

$$\begin{cases} \omega = \frac{1}{6} \\ \xi = \frac{1}{4} \\ \eta = \frac{1}{4} \\ \zeta = \frac{1}{4} \end{cases}$$
Annexe C

Modèles de sous maille

C.1 L'échelle de Kolmogorov

La théorie de Kolmogorov représentée généralement par son concept de cascade, est une des théories les plus universelles et utilisées pour représenter un écoulement turbulent dans le monde de la mécanique des fluides. Le postulat est le suivant. Si un écoulement n'est pas contraint par des gradients moyens ou une paroi, il est isotrope. De plus, les structures créées éclatent en de plus petites *etc* ... jusqu'aux structures de l'échelle de Kolmogorov où la dissipation de l'énergie cinétique à lieu. Ainsi pendant toute la cascade, l'énergie qui est ici cinétique est conservée. La dissipation à l'échelle de Kolmogorov est essentiellement due aux frottements entre les particules fluides, c'est-à-dire par les termes de viscosité. Cette théorie peut être simplement étendue aux cas en présence d'obstacle grâce au fait que localement, si la taille des structures est très inférieure à la taille de l'obstacle, l'écoulement est considéré loin et est donc isotrope. Cependant en pratique, l'utilisation d'un modèle de paroi est préféré car il permet au moins de correctement simuler les grandes échelles déclenchant la cascade.

Trois familles d'échelles sont à distinguer. Tout d'abord, la plus grande échelle de la turbulence possède les caractéristiques de vitesse U_t et de taille L_t . Puis, les échelles intermédiaires caractérisées par la vitesse U_i et la taille l_i . Enfin la plus petite échelle, celle de Kolmogorov où a lieu la dissipation, caractérisée par la vitesse U_k et la taille η .

Les hypothèses de cette théorie sont que l'énergie se conserve le long de la cascade pour se dissiper entièrement aux échelles de la taille η . De plus, la dissipation est majoritairement due aux frottements entre particules fluides, c'est-à-dire à la viscosité.

Il est possible grâce à ces hypothèses de trouver des grandeurs universelles caractéristiques des écoulements. Soit le temps d'observation constant τ .

$$\tau^{-1} = C^{st} = \frac{U_t}{L_t} = \frac{U_i}{l_i} = \frac{U_k}{\eta}$$

De plus, comme l'énergie cinétique se conserve à toutes les échelles, il se retrouve pour un temps fixe

$$e_c = C^{st} = \frac{U_t^3}{L_t} = \frac{U_i^3}{l_i} = \frac{U_k^3}{\eta}$$

Or à l'échelle de Kolmogorov, l'ensemble de l'énergie est dissipée par viscosité, d'où

$$e_{c} = \epsilon \simeq \nu \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^{2}$$

$$\Leftrightarrow \ \epsilon = \nu \left(\frac{U_{k}}{\eta}\right)^{2} = \frac{U_{k}^{3}}{\eta}$$

Ainsi, le nombre de Reynolds des plus petites échelles est indépendant du nombre de Reynolds global. Il est aux alentours de 1

$$Re_{\eta} = \frac{U_k \eta}{\nu} \simeq 1$$

Par ailleurs, il est possible de donner une estimation de la taille des plus petites et des plus grandes échelles

$$\begin{cases} \eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{4}} \\ L_t = \frac{U_t^3}{\epsilon} \end{cases}$$

Ces résultats signifient deux choses. Tout d'abord, la taille des plus petites structures dépend intrinsèquement du type du fluide. En effet, elle dépend de la viscosité et la dissipation. De manière plus précise, cela signifie que les modèles visant à purement modifier la viscosité moléculaire par une viscosité turbulente reviennent à modifier le type d'écoulement simulé. Il est possible d'obtenir la taille de ces structures grâce aux grandeurs macroscopiques.

La taille des plus grandes structures dépend seulement du problème étudié et plus vraiment de la nature de l'écoulement. En effet, seule la vitesse de la turbulence et la dissipation jouent sur la taille des grosses structures : si l'énergie cinétique n'est pas assez puissante, les grosses structures se cassent rapidement. Ainsi, ce sont les grosses structures qui établissent la quantité d'énergie à dissiper, expliquant la relative bonne performance du modèle de Smagorinsky basé sur toutes les échelles de l'écoulement.

Il est possible alors de retrouver le pas de temps et le nombre de nœuds nécessaires pour faire une DNS

$$N_{espace} \simeq \left(\frac{L_t}{\eta}\right)^{nbr\ dimension} = R_t^{\frac{9}{4}}$$
$$\Delta t < \tau_{carac\ max} = \frac{\eta}{U_{max}} = \frac{L_t^2}{\nu} \frac{1}{R_t^{\frac{7}{4}}}$$

C.2 Équations de bilan complémentaires

Équation de l'énergie cinétique

Pour obtenir l'équation de bilan de l'énergie cinétique, il suffit de faire le produit scalaire de l'équation de la quantité de mouvement avec la vitesse. En effet

$$\begin{split} \rho \frac{D \underline{\mathbf{u}}}{Dt} \cdot \underline{\mathbf{u}} &= \underline{\operatorname{div}}\left(\underline{\sigma}\right) \cdot \underline{\mathbf{u}} \\ \Leftrightarrow \rho \frac{De_c}{Dt} &= \underline{\operatorname{div}}\left(\underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}}\right) \underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{u}} \ \underline{\operatorname{grad}}\left(p\right) \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \rho e_c}{\partial t} &+ \underline{\operatorname{div}}\left(\rho \underline{\mathbf{u}} e_c\right) = \underline{\operatorname{div}}\left(\underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}} \cdot \underline{\mathbf{u}}\right) - \underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}} : \underline{\operatorname{grad}}\left(\underline{\mathbf{u}}\right) - \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\operatorname{grad}}\left(p\right), \ \text{ car } \underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}} \ \text{est symétrique} \end{split}$$

Ainsi l'équation de bilan de l'énergie cinétique est

$$\frac{\partial \rho e_c}{\partial t} + \operatorname{\mathbf{div}}\left(\rho \underline{\mathbf{u}} e_c\right) = \underline{\operatorname{\mathbf{div}}}\left(\underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}} \cdot \underline{\mathbf{u}}\right) - \underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}} : \underline{\operatorname{\mathbf{grad}}}\left(\underline{\mathbf{u}}\right) - \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\operatorname{\mathbf{grad}}}\left(p\right)$$
(C.1)

Équation de l'énergie interne

Pour obtenir l'équation bilan de l'énergie interne, il suffit de retrancher celle de l'énergie cinétique à l'équation de l'énergie totale qui s'obtient facilement.

$$\begin{split} \left(\frac{\partial\rho e_{t}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho\underline{\mathbf{u}}e_{t}\right)\right) - \left(\frac{\partial\rho e_{c}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho\underline{\mathbf{u}}e_{c}\right)\right) &= \left(\operatorname{div}\left(\underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}}\cdot\underline{\mathbf{u}}\right) - \operatorname{div}\left(p\underline{\mathbf{u}}\right) - \operatorname{div}\left(\underline{\mathbf{q}^{\mathrm{T}}}\right)\right) \\ - \left(\underline{\operatorname{div}}\left(\underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}}\cdot\underline{\mathbf{u}}\right) - \underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}}:\underline{\operatorname{grad}}\left(\underline{\mathbf{u}}\right) - \underline{\mathbf{u}}\cdot\underline{\operatorname{grad}}\left(p\right)\right) \\ \Leftrightarrow \frac{\partial\rho e_{i}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho\underline{\mathbf{u}}e_{i}\right) = -\operatorname{div}\left(p\underline{\mathbf{u}}\right) - \operatorname{div}\left(\underline{\mathbf{q}^{\mathrm{T}}}\right) + \underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}}:\underline{\operatorname{grad}}\left(\underline{\mathbf{u}}\right) + \underline{\mathbf{u}}\cdot\underline{\operatorname{grad}}\left(p\right) \\ \Leftrightarrow \frac{\partial\rho e_{i}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho\underline{\mathbf{u}}e_{i}\right) = \underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}}:\underline{\operatorname{grad}}\left(\underline{\mathbf{u}}\right) - p\operatorname{div}\left(\underline{\mathbf{q}^{\mathrm{T}}}\right) + \operatorname{div}\left(\underline{\mathbf{q}^{\mathrm{T}}}\right) \end{split}$$

Ainsi l'équation de bilan de l'énergie interne est

$$\frac{\partial \rho e_i}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho \underline{\mathbf{u}} e_i\right) = \underline{\underline{\mathbf{S}}}^{\mathrm{D}} : \underline{\underline{\mathbf{S}}}^{\mathrm{D}} - p\operatorname{div}\left(\underline{\mathbf{u}}\right) - \operatorname{div}\left(\underline{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\right)$$
(C.2)

où le terme $p\mathbf{div}(\underline{\mathbf{u}})$ correspond à une perte d'énergie mécanique et $\mathbf{div}(\underline{\mathbf{q}^{T}})$ une perte d'énergie thermique. Le terme $\underline{\mathbf{S}^{D}}: \underline{\mathbf{S}^{D}}$, plus subtil, pourrait correspondre quant à lui à la création d'énergie du aux frottements à l'intérieur de la particule fluide.

Équation de l'enthalpie

Pour trouver l'équation de bilan de l'enthalpie, il faut revenir aux principes de la thermodynamique. En effet $h = e_i + p/\rho$. Ainsi en passant à la différentielle de l'équation et en utilisant le premier principe, il vient : $dh = de + dp/\rho + pd(1/\rho)$. Soit une particule en mouvement, la dérivée particulaire s'applique et il découle

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{De_i}{Dt} + \frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt} + p\frac{D\frac{1}{\rho}}{Dt}$$

Or d'après la conservation de la masse

$$\frac{D\frac{1}{\rho}}{Dt} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{\rho} \mathbf{div} \left(\underline{\mathbf{u}} \right)$$

Ce qui se conçoit bien car la divergence de la vitesse traduit directement le côté compressible du fluide. Ainsi en multipliant l'équation par ρ , il vient

$$\begin{split} \rho \frac{Dh}{Dt} &= \rho \frac{De_i}{Dt} + \frac{Dp}{Dt} + p \mathbf{div} \left(\underline{\mathbf{u}} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \rho h}{\partial t} + \mathbf{div} \left(\rho \underline{\mathbf{u}} h \right) &= \underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}} : \underline{\mathbf{grad}} \left(\underline{\mathbf{u}} \right) - p \mathbf{div} \left(\underline{\mathbf{u}} \right) - \mathbf{div} \left(\underline{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}} \right) + \frac{Dp}{Dt} + p \mathbf{div} \left(\underline{\mathbf{u}} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \rho h}{\partial t} + \mathbf{div} \left(\rho \underline{\mathbf{u}} h \right) &= \underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}} : \underline{\mathbf{grad}} \left(\underline{\mathbf{u}} \right) - \mathbf{div} \left(\underline{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}} \right) + \frac{Dp}{Dt} \end{split}$$

Ainsi l'équation de bilan de l'énergie enthalpique est

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} + \operatorname{\mathbf{div}}\left(\rho \underline{\mathbf{u}}h\right) = \underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}} : \underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}} - \operatorname{\mathbf{div}}\left(\underline{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\right) + \frac{Dp}{Dt}$$
(C.3)

Équation de l'entropie

Pour trouver l'équation de l'entropie, l'équation de l'enthalpie et des relations thermodynamiques sont utilisées. En effet, d'après le premier principe

$$\begin{cases} de_i = Tds - pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \\ dh = de_i + \frac{1}{\rho}dp + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \\ \Leftrightarrow Tds = dh - \frac{1}{\rho}dp \end{cases}$$

Ainsi, en multipliant par ρ et en insérant l'équation de l'enthalpie, il découle

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt}$$

$$\Leftrightarrow \rho T \frac{Ds}{Dt} = \underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}} : \underline{\mathbf{grad}} (\underline{\mathbf{u}}) - \mathbf{div} (\underline{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}) + \frac{Dp}{Dt} - \frac{Dp}{Dt}$$

$$\Leftrightarrow \rho T \frac{Ds}{Dt} = \underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}} : \underline{\mathbf{grad}} (\underline{\mathbf{u}}) - \mathbf{div} (\underline{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}})$$

Ainsi l'équation bilan de l'entropie s'écrit

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}} : \underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}} - \mathbf{div}\left(\underline{\mathbf{q}^{\mathrm{T}}}\right)$$
(C.4)

Ce bilan donne les contributions à l'évolution de l'entropie. Elles sont de deux types : thermique et mécanique. Cela permet d'affirmer l'analyse sur les termes de l'énergie interne : $\underline{\mathbf{S}}^{\underline{\mathbf{D}}}$: $\underline{\mathbf{S}}^{\underline{\mathbf{D}}}$ est l'énergie créée par les frottements (irréversibles) et $\mathbf{div}(\mathbf{q}^{\mathbf{T}})$ est le flux de chaleur.

C.3 Développement des équations filtrées de Navier-Stokes

Soit le filtre de Favre suivant

$$\widetilde{\Phi} = \frac{\left[\rho\Phi\right]^{\mathrm{R}}}{\rho^{\mathrm{R}}}$$

où ^R est un filtre quelconque. Comme tous les filtres commutent avec les opérateurs de dérivation avec une erreur minimale alors la commutation se fait aussi avec les opérateurs divergences. Si le filtre est homogène isotrope, la commutation est exacte sinon elle est approchée à $\mathcal{O}(\Delta_m^2)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{div} \left(\rho \mathbf{\underline{u}} \right) = 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{\underline{u}}}{\partial t} + \mathbf{div} \left(\rho \mathbf{\underline{u}} \otimes \mathbf{\underline{u}} + p \underline{\mathcal{I}} \right) = \mathbf{div} \left(\underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}} \right) \\ \frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \mathbf{div} \left(\rho e_t \mathbf{\underline{u}} + p \mathbf{\underline{u}} + \mathbf{\underline{q}}^{\mathrm{T}} \right) = \mathbf{div} \left(\underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}} \cdot \mathbf{\underline{u}} \right) \end{cases}$$

Passage au filtrage

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho^{\mathrm{R}}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\left[\rho\underline{\mathbf{u}}\right]^{\mathrm{R}}\right) = 0\\ \frac{\partial \left[\rho\underline{\mathbf{u}}\right]^{\mathrm{R}}}{\partial t} + \underline{\operatorname{div}}\left(\left[\rho\underline{\mathbf{u}}\otimes\underline{\mathbf{u}}\right]^{\mathrm{R}} + \left[p\underline{\mathcal{I}}\right]^{\mathrm{R}}\right) = \underline{\operatorname{div}}\left(\left[\underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}}\right]^{\mathrm{R}}\right)\\ \frac{\partial \left[\rho e_{t}\right]^{\mathrm{R}}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\left[\rho e_{t}\underline{\mathbf{u}}\right]^{\mathrm{R}} + \left[p\underline{\mathbf{u}}\right]^{\mathrm{R}} + \underline{\mathbf{q}^{\mathrm{T}}}^{\mathrm{R}}\right) = \operatorname{div}\left(\left[\underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}}\cdot\underline{\mathbf{u}}\right]^{\mathrm{R}}\right) \end{cases}$$

Or $\left[\rho\Phi\right]^{R} = \rho^{R} \left[\rho\Phi\right]^{R} / \rho^{R} = \rho^{R} \widetilde{\Phi}, d'où$

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho^{\mathrm{R}}}{\partial t} + \operatorname{\mathbf{div}}\left(\rho^{\mathrm{R}} \, \underline{\widetilde{\mathbf{u}}}\right) = 0\\ \frac{\partial \rho^{\mathrm{R}} \, \underline{\widetilde{\mathbf{u}}}}{\partial t} + \underline{\operatorname{\mathbf{div}}}\left(\rho^{\mathrm{R}} \, \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \otimes \underline{\mathbf{u}} + p^{\mathrm{R}} \, \underline{\underline{\mathcal{I}}}\right) = \underline{\operatorname{\mathbf{div}}}\left(\left[\underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}}\right]^{\mathrm{R}}\right)\\ \frac{\partial \rho^{\mathrm{R}} \, \widetilde{e_{t}}}{\partial t} + \operatorname{\mathbf{div}}\left(\rho^{\mathrm{R}} \, \widetilde{e_{t} \, \underline{\mathbf{u}}} + \left[p\underline{\mathbf{u}}\right]^{\mathrm{R}} + \underline{\mathbf{q}^{\mathrm{T}}}^{\mathrm{R}}\right) = \operatorname{\mathbf{div}}\left(\left[\underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}} \cdot \underline{\mathbf{u}}\right]^{\mathrm{R}}\right) \end{cases}$$

Le problème se trouve maintenant dans la linéarisation du filtre sur le produit de plusieurs variables pour pouvoir reobtenir des équations similaires à celle de Navier-Stokes non filtrées. Il faut donc faire apparaître des termes supplémentaires dans les équations, comme par exemple dans l'équation de la quantité de mouvement

$$\begin{cases} \left[\underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}}\right]^{\mathrm{R}} = \underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}}(\widetilde{\mathbf{u}}) + \left(\left[\underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}}(\mathbf{u})\right]^{\mathrm{R}} - \underline{\mathbf{S}^{\mathrm{D}}}(\widetilde{\mathbf{u}})\right)\\ \rho^{\mathrm{R}} \underbrace{\widetilde{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{u}}} = \rho^{\mathrm{R}} \underbrace{\widetilde{\mathbf{u}}} \otimes \underbrace{\widetilde{\mathbf{u}}} + \left(\rho^{\mathrm{R}} \underbrace{\widetilde{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{u}}} - \rho^{\mathrm{R}} \underbrace{\widetilde{\mathbf{u}}} \otimes \underbrace{\widetilde{\mathbf{u}}}\right) \end{cases}$$

Les quantités suivantes sont définies

$$\begin{cases} \mathcal{T} = \underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}}\left(\boldsymbol{\mu}, \underline{\mathbf{u}}\right) \\ \widetilde{\mathcal{T}} = \underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}}\left(\widetilde{\boldsymbol{\mu}}, \widetilde{\mathbf{u}}\right) \\ \mathcal{T}^{\mathrm{R}} = \left[\underline{\mathbf{S}}^{\mathrm{D}}_{-}\left(\boldsymbol{\mu}, \underline{\mathbf{u}}\right)\right]^{\mathrm{R}} \\ \mathbb{T}_{s} = \rho^{\mathrm{R}} \, \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \otimes \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} - \rho^{\mathrm{R}} \, \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \otimes \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \\ \underline{\widetilde{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}} = -\widetilde{\kappa} \underline{\mathbf{grad}}\left(\widetilde{T}\right) = -\frac{c_{p}\mu\left(\widetilde{T}\right)}{Pr} \underline{\mathbf{grad}}\left(\widetilde{T}\right) \\ \underline{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}^{\mathrm{R}} = -\left[\kappa \underline{\mathbf{grad}}\left(T\right)\right]^{\mathrm{R}} \end{cases}$$

Puis en les insérant dans les équations, il vient

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho^{\mathrm{R}}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho^{\mathrm{R}} \, \underline{\widetilde{\mathbf{u}}}\right) = 0 & (1) \\ \frac{\partial \rho^{\mathrm{R}} \, \underline{\widetilde{\mathbf{u}}}}{\partial t} + \underline{\operatorname{div}}\left(\rho^{\mathrm{R}} \, \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \otimes \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} + p^{\mathrm{R}} \, \underline{\underline{\mathcal{I}}} - \widetilde{\mathcal{T}}\right) = \underline{\operatorname{div}}\left(\mathcal{T}^{\mathrm{R}} - \widetilde{\mathcal{T}} + \mathbb{T}_{s}\right) & (2) \\ \frac{\partial \rho^{\mathrm{R}} \, \widetilde{e_{t}}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho^{\mathrm{R}} \, \overline{e_{t} \, \underline{\mathbf{u}}}\right) = \operatorname{div}\left(\left[\mathcal{T} \, \underline{\mathbf{u}}\right]^{\mathrm{R}} - \left[p \underline{\mathbf{u}}\right]^{\mathrm{R}} - \underline{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}^{\mathrm{R}}}\right) & (3) \end{cases}$$

Le problème restant est que l'énergie totale n'est ici pas exprimée en fonction des valeurs filtrées. En effet $\tilde{e}_t = p^R / (\gamma - 1) + \rho^R \tilde{e}_c$ n'est pas exprimée en fonction de $\underline{\tilde{u}}$. Il faut donc linéariser le carré de la vitesse. Cependant sous cette forme, l'équation de l'énergie est difficile à filtrer. Dans cette optique, l'équation de bilan de l'énergie interne filtrée et l'équation de bilan de l'énergie cinétique en vitesse filtrée sont utilisées. Il vient

$$\begin{cases} \rho e_t &= \rho e_i + \rho e_c \\ \rho^{\mathrm{R}} \widetilde{e_t} &= \rho^{\mathrm{R}} \widetilde{e_i} + \rho^{\mathrm{R}} \widetilde{e_c} \\ &= \rho^{\mathrm{R}} \widetilde{e_i} + \rho^{\mathrm{R}} \widetilde{e_c} + \rho^{\mathrm{R}} \left(\widetilde{e_c} - \ddot{e_c} \right) \\ &= \rho^{\mathrm{R}} \ddot{e_i} + \rho^{\mathrm{R}} \left(\widetilde{e_c} - \ddot{e_c} \right), \quad \text{où } \widetilde{e_c} = \frac{1}{2} \widetilde{\mathbf{u}} \cdot \widetilde{\mathbf{u}} \text{ et } \vec{e_c} = \frac{1}{2} \widetilde{\mathbf{u}} \cdot \widetilde{\mathbf{u}} \end{cases}$$

Ainsi, $\rho^{R} \hat{e}_{t} = \rho^{R} \tilde{e}_{i} + \rho^{R} \ddot{e}_{c}$. Pour obtenir l'équation filtrée de l'énergie en fonction des variables conservatives filtrées, il faut filtrer l'équation de bilan d'énergie interne et ajouter l'équation de bilan de l'énergie cinétique des vitesses filtrées \ddot{e}_{c} . Pour l'équation de bilan de l'énergie interne filtrée, il suffit de reprendre l'équation (C.2) et de la passer en filtre

$$\begin{split} \frac{\partial \rho^{\mathrm{R}} \, \widetilde{e_{i}}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho^{\mathrm{R}} \, \underline{\widetilde{\mathbf{u}}}\widetilde{e_{i}}\right) &= \left[\mathcal{T} : \underline{\underline{\mathbf{grad}}}\left(\underline{\mathbf{u}}\right)\right]^{\mathrm{R}} - \left[p\operatorname{div}\left(\underline{\mathbf{u}}\right)\right]^{\mathrm{R}} - \operatorname{div}\left(\underline{\mathbf{q}^{\mathrm{T}}}\right)^{\mathrm{R}} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \rho^{\mathrm{R}} \, \widetilde{e_{i}}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho^{\mathrm{R}} \, \underline{\widetilde{\mathbf{u}}}\widetilde{e_{i}}\right) + \operatorname{div}\left(\rho^{\mathrm{R}} \left(\underline{\widetilde{\mathbf{u}}}\widetilde{e_{i}} - \underline{\widetilde{\mathbf{u}}}\widetilde{e_{i}}\right)\right) &= \mathcal{T}^{\mathrm{R}} : \underline{\underline{\mathbf{grad}}}\left(\underline{\widetilde{\mathbf{u}}}\right) \\ &+ \left(\left[\mathcal{T} : \underline{\underline{\mathbf{grad}}}\left(\underline{\mathbf{u}}\right)\right]^{\mathrm{R}} - \mathcal{T}^{\mathrm{R}} : \underline{\underline{\mathbf{grad}}}\left(\underline{\widetilde{\mathbf{u}}}\right)\right) \\ &- p^{\mathrm{R}} \, \operatorname{div}\left(\underline{\mathbf{u}}\right) + \left(p^{\mathrm{R}} \, \operatorname{div}\left(\underline{\mathbf{u}}\right) - \left[p\operatorname{div}\left(\underline{\mathbf{u}}\right)\right]^{\mathrm{R}}\right) \\ &- \operatorname{div}\left(\underline{\widetilde{\mathbf{qT}}}^{\mathrm{R}} - \underline{\widetilde{\mathbf{qT}}}\right) \end{split}$$

En supposant que le gaz répond aux lois des gaz parfaits, il est possible d'utiliser la relation : $\rho e_i = p/(\gamma - 1)$. Ainsi

$$\begin{cases} \rho^{\mathrm{R}} \widetilde{e}_{i} \widetilde{\underline{\mathbf{u}}} = \frac{p \underline{\mathbf{u}}}{\gamma - 1} \\ \rho^{\mathrm{R}} \widetilde{e}_{i} \widetilde{\underline{\mathbf{u}}} = \frac{\left[p \underline{\mathbf{u}}\right]^{\mathrm{R}}}{\gamma - 1} \end{cases}$$

Ce résultat est inséré dans l'équation du bilan d'énergie interne filtrée

$$\frac{\partial \ \rho^{\mathrm{R}} \ \widetilde{e_i}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho^{\mathrm{R}} \ \underline{\widetilde{\mathbf{u}}}\widetilde{e_i}\right) + \operatorname{div}\left(\frac{[p\underline{\mathbf{u}}]^{\mathrm{R}} - p^{\mathrm{R}} \ \underline{\widetilde{\mathbf{u}}}}{\gamma - 1}\right) = \mathcal{T}^{\mathrm{R}} : \underline{\operatorname{\mathbf{grad}}}\left(\underline{\widetilde{\mathbf{u}}}\right) + \left(\left[\mathcal{T} : \underline{\operatorname{\mathbf{grad}}}\left(\underline{\mathbf{u}}\right)\right]^{\mathrm{R}} - \mathcal{T}^{\mathrm{R}} : \underline{\operatorname{\mathbf{grad}}}\left(\underline{\widetilde{\mathbf{u}}}\right) \right) - p^{\mathrm{R}} \ \operatorname{div}\left(\underline{\mathbf{u}}\right) + \left(p^{\mathrm{R}} \ \operatorname{div}\left(\underline{\mathbf{u}}\right) - [p\operatorname{div}\left(\underline{\mathbf{u}}\right)]^{\mathrm{R}}\right) - \operatorname{div}\left(\underline{\widetilde{\mathbf{qT}}}^{\mathrm{R}} - \underline{\widetilde{\mathbf{qT}}}\right)$$

Soit les notations suivantes pour plus de simplicité

$$\begin{cases} \rho^{\mathrm{R}} \ddot{\epsilon} = \left[\mathcal{T} : \underline{\mathbf{grad}} \left(\underline{\mathbf{u}} \right) \right]^{\mathrm{R}} - \mathcal{T}^{\mathrm{R}} : \underline{\mathbf{grad}} \left(\underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \right) \\ \rho^{\mathrm{R}} \ddot{\pi} = p^{\mathrm{R}} \operatorname{\mathbf{div}} \left(\underline{\mathbf{u}} \right) - \left[p \operatorname{\mathbf{div}} \left(\underline{\mathbf{u}} \right) \right]^{\mathrm{R}} \\ \underline{\mathbf{Q}} = \frac{\left[p \underline{\mathbf{u}} \right]^{\mathrm{R}} - p^{\mathrm{R}} \widetilde{\underline{\mathbf{u}}} }{\gamma - 1} \end{cases}$$

En les introduisant dans le bilan d'énergie interne filtré, il vient

$$\frac{\partial \rho^{\mathrm{R}} \widetilde{e_{i}}}{\partial t} + \operatorname{\mathbf{div}}\left(\rho^{\mathrm{R}} \, \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \widetilde{e_{i}} + \underline{\mathbf{Q}} + \underline{\widetilde{\mathbf{q}}} \right) = \rho^{\mathrm{R}} \, \ddot{\epsilon} + \rho^{\mathrm{R}} \, \ddot{\pi} - \operatorname{\mathbf{div}}\left(\underline{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}^{\mathrm{R}} - \underline{\widetilde{\mathbf{q}}} \right) + \mathcal{T}^{\mathrm{R}} : \underline{\underline{\mathbf{grad}}}\left(\underline{\widetilde{\mathbf{u}}}\right) - p^{\mathrm{R}} \, \operatorname{\mathbf{div}}\left(\underline{\mathbf{u}}\right) \tag{C.5}$$

Afin de déterminer l'équation de bilan de l'énergie cinétique des vitesses filtrées, la même méthode est appliquée à l'équation (C.1), mais sur les équations et les variables filtrées.

$$\begin{split} \rho^{\mathrm{R}} \frac{D\tilde{\underline{\mathbf{u}}}}{Dt} \cdot \tilde{\underline{\mathbf{u}}} + \underline{\operatorname{div}} \left(p^{\mathrm{R}} \, \underline{\underline{\mathcal{I}}} - \widetilde{\mathcal{T}} \right) \cdot \tilde{\underline{\mathbf{u}}} &= \underline{\operatorname{div}} \left(\mathcal{T}^{\mathrm{R}} - \widetilde{\mathcal{T}} + \mathbb{T}_{s} \right) \cdot \tilde{\underline{\mathbf{u}}} \\ \Leftrightarrow \frac{\rho^{\mathrm{R}}}{2} \frac{D \| \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \|^{2}}{Dt} + \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\operatorname{grad}} \left(p^{\mathrm{R}} \right) - \underline{\operatorname{div}} \left(\widetilde{\mathcal{T}} \right) \cdot \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} &= \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\operatorname{div}} \left(\mathbb{T}_{s} \right) + \underline{\operatorname{div}} \left(\mathcal{T}^{\mathrm{R}} - \widetilde{\mathcal{T}} \right) \cdot \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \rho^{\mathrm{R}} \, \ddot{e_{c}}}{\partial t} + \underline{\operatorname{div}} \left(\rho^{\mathrm{R}} \, \ddot{e_{c}} \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \right) + \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\operatorname{grad}} \left(p^{\mathrm{R}} \right) - \underline{\operatorname{div}} \left(\widetilde{\mathcal{T}} \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \right) + \widetilde{\mathcal{T}} : \underline{\operatorname{grad}} \left(\underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \right) &= \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\operatorname{div}} \left(\mathbb{T} \right) \\ &+ \underline{\operatorname{div}} \left(\mathcal{T}^{\mathrm{R}} \, \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} - \widetilde{\mathcal{T}} \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \right) \\ &+ \frac{\partial \rho^{\mathrm{R}} \, \ddot{e_{c}}}{\partial t} + \underline{\operatorname{div}} \left(\rho^{\mathrm{R}} \, \ddot{e_{c}} \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} - \widetilde{\mathcal{T}} \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \right) = - \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\operatorname{grad}} \left(p^{\mathrm{R}} \right) + \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\operatorname{div}} \left(\mathbb{T}_{s} \right) + \underline{\operatorname{div}} \left(\mathcal{T}^{\mathrm{R}} \, \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} - \widetilde{\mathcal{T}} \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \right) - \mathcal{T}^{\mathrm{R}} : \underline{\operatorname{grad}} \left(\underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \right) \end{split}$$

En faisant une somme avec l'équation (C.5), il est possible d'obtenir l'équation de l'énergie filtrée en fonction des variables filtrées.

$$\begin{split} &\frac{\partial \ \rho^{\mathrm{R}} \ \widetilde{e_{i}}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho^{\mathrm{R}} \ \widetilde{\underline{\mathbf{u}}}\widetilde{e_{i}} + \underline{\mathbf{Q}} + \underline{\widetilde{\mathbf{q}^{\mathrm{T}}}}\right) - \frac{\partial \ \rho^{\mathrm{R}} \ \widetilde{e_{c}}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho^{\mathrm{R}} \ \widetilde{e_{c}}\widetilde{\underline{\mathbf{u}}} - \widetilde{\mathcal{T}}\widetilde{\underline{\mathbf{u}}}\right) \\ &= \frac{\partial \ \rho^{\mathrm{R}} \ \widetilde{e_{t}}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho^{\mathrm{R}} \ \underline{\widetilde{\mathbf{u}}}\widetilde{e_{t}} + \underline{\mathbf{Q}} + \underline{\widetilde{\mathbf{q}^{\mathrm{T}}}} - \widetilde{\mathcal{T}}\widetilde{\underline{\mathbf{u}}}\right) \\ &= -\underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\mathbf{grad}}\left(p^{\mathrm{R}}\right) + \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\mathbf{div}}\left(\mathbb{T}_{s}\right) + \underline{\mathbf{div}}\left(\mathcal{T}^{\mathrm{R}} \ \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} - \widetilde{\mathcal{T}}\widetilde{\underline{\mathbf{u}}}\right) - \mathcal{T}^{\mathrm{R}} : \underline{\mathbf{grad}}}{\mathbf{grad}}\left(\underline{\widetilde{\mathbf{u}}}\right) \\ &+ \rho^{\mathrm{R}} \ \widetilde{e} + \rho^{\mathrm{R}} \ \ddot{\pi} - \operatorname{div}\left(\underline{\mathbf{q}^{\mathrm{T}}}^{\mathrm{R}} - \underline{\widetilde{\mathbf{q}^{\mathrm{T}}}}\right) + \mathcal{T}^{\mathrm{R}} : \underline{\mathbf{grad}}\left(\underline{\widetilde{\mathbf{u}}}\right) - p^{\mathrm{R}} \ \mathbf{div}\left(\underline{\mathbf{u}}\right) \\ &= \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\mathbf{div}}(\mathbb{T}_{s}) + \rho^{\mathrm{R}} \ \ddot{e} + \rho^{\mathrm{R}} \ \ddot{\pi} + \underline{\mathbf{div}}\left(\mathcal{T}^{\mathrm{R}} \ \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} - \widetilde{\mathcal{T}}\widetilde{\underline{\mathbf{u}}}\right) - \operatorname{div}\left(\underline{\mathbf{q}^{\mathrm{T}}}^{\mathrm{R}} - \underline{\widetilde{\mathbf{q}^{\mathrm{T}}}}\right) - \operatorname{div}\left(p^{\mathrm{R}} \ \underline{\widetilde{\mathbf{u}}}\right) \end{split}$$

L'équation filtrée de l'énergie est obtenue sous la forme

$$\frac{\partial \rho^{\mathrm{R}} \ddot{e_{t}}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\left(\rho^{\mathrm{R}} \ddot{e_{t}} + p^{\mathrm{R}}\right) \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} + \underline{\widetilde{\mathbf{q}^{\mathrm{T}}}} + \underline{\mathbf{Q}} - \widetilde{\mathcal{T}} \underline{\widetilde{\mathbf{u}}}\right) = \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\operatorname{div}}\left(\mathbb{T}_{s}\right) + \rho^{\mathrm{R}} \ddot{\epsilon} + \rho^{\mathrm{R}} \ddot{\pi} + \underline{\operatorname{div}}\left(\mathcal{T}^{\mathrm{R}} \underline{\widetilde{\mathbf{u}}} - \widetilde{\mathcal{T}} \underline{\widetilde{\mathbf{u}}}\right) - \operatorname{div}\left(\underline{\mathbf{q}^{\mathrm{T}}}^{\mathrm{R}} - \underline{\widetilde{\mathbf{q}^{\mathrm{T}}}}\right)$$
(C.6)

où les termes sont explicités plus haut.

C.4 Détermination de la constante du modèle Small-Small

Dans les hypothèses du modèle *Small-Small*, la fréquence de coupure du maillage est positionnée dans la zone inertielle de la cascade de Kolmogorov. Dans ce cas et en supposant une turbulence à haut Reynolds et isotrope, le spectre de l'énergie possède la forme suivante

$$E_c\left(k\right) = C_K \epsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}}$$

où C_K est la constante de Kolmogorov qui vaut approximativement 1, 4. Par ailleurs, le taux de dissipation moyen de la partie filtrée s'écrit classiquement en fonction du spectre de l'énergie par

$$\left\langle \mathcal{S}^{\mathrm{R}^{2}} \right\rangle = 2 \int_{0}^{\infty} k^{2} E_{c}^{\mathrm{R}}(k) dk = 2 \int_{0}^{\infty} k^{2} G(k) E_{c} dk$$

La relation suivante en est déduite

$$\left\langle \mathcal{S}^{\mathrm{R}^{2}} \right\rangle = C_{K} \epsilon^{\frac{2}{3}} 2 \int_{0}^{\infty} k^{\frac{1}{3}} G(k) \, dk$$

Lorsque la turbulence est en équilibre locale, le taux de dissipation est égale à la dissipation de sous-maille

$$\epsilon = \left\langle \nu_t \, \mathcal{S}^{\mathrm{R}^2} \right\rangle = \left\langle (C_{SS} \Delta_m)^2 \, \mathcal{S}^{\mathrm{R}^3} \right\rangle = (C_{SS} \Delta_m)^2 \left\langle \mathcal{S}^{\mathrm{R}^3} \right\rangle$$

Une l'hypothèse supplémentaire est faite : $\langle S^{\mathbb{R}^3} \rangle = (\langle S^{\mathbb{R}^2} \rangle)^{\frac{3}{2}}$. De plus, l'intégrale pour déterminer la moyenne du taux de dissipation ne se fait qu'entre $[k_f, k_m]$ dans le cas de la VMS avec modèle *Small-Small*. Ainsi

$$\epsilon = (C_{SS}\Delta_m)^2 \left(\langle \mathcal{S}'' \, {}^2 \rangle\right)^{\frac{3}{2}} = (C_{SS}\Delta_m)^2 \left(C_K \epsilon^{\frac{2}{3}} 2 \int_0^\infty k^{\frac{1}{3}} G(k) \, dk\right)^{\frac{3}{2}}$$

Supposons comme Lilly [102] que le filtre représentant le problème est un filtre *cut-off*, le noyau du filtre est en fait un créneau valant 1 sur l'intervalle $[k_f, k_m]$ et 0 ailleurs.

$$\epsilon = (C_{SS}\Delta_m)^2 C_K^{\frac{3}{2}} \epsilon \left(2 \int_{k_f}^{k_m} k^{\frac{1}{3}} dk\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$C_{SS}\Delta_m = \left(\frac{2}{3C_K}\right)^{\frac{3}{4}} k_f^{-1} \left[\left(\frac{k_m}{k_f}\right)^{\frac{4}{3}} - 1\right]^{-\frac{3}{4}}$$

Il en émerge alors le coefficient classique du modèle de Smagorinsky $C_S = (2/(3C_K))^{\frac{3}{4}}/\pi = 0,1824$. Il vient

$$C_{SS}\Delta_m = C_S\Delta_f \left[\left(\frac{\Delta_f}{\Delta_m}\right)^{\frac{4}{3}} - 1 \right]^{-\frac{3}{4}}$$

De la même manière, il est possible de trouver la valeur de la constante du modèle Large-Small C_{LS} en fonction de celle du modèle Small-Small. En effet, sachant que le coefficient de viscosité est constant, il vient

$$\left(\frac{C_{LS}\Delta_m}{C_{SS}\Delta_m}\right)^4 = \frac{\left<\mathcal{S}''^2\right>^{SS}}{\left<\mathcal{S}''^2\right>^{LS}} = \frac{\int_{k_f}^{k_m} k^{\frac{1}{3}}}{\int_0^{k_f} k^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{k_m}{k_f}\right)^{\frac{4}{3}} - 1$$

Annexe D

Filtrage

D.1 Filtrage Différentiel et filtrage par Interpolation

Dans le cas d'un filtrage polynômial, les coefficients des matrices $\underline{\mathbf{F}}$ de filtrage locales définies à la section 5.1.3 sont constants. C'est le problème de la formulation par Interpolation donnée 5.3.2. Les méthodes par Interpolation et Différentielle sont en fait identiques car elles sont toutes les deux représentées par une matrice carrée de dimension finie. Cependant, toute matrice ne peut être associée à la forme matricielle du filtrage Polynômial. Typiquement, les coefficients peuvent varier en fonction de la taille de l'élément. Or ces matrices polynômiales permettent de déterminer très simplement la forme spectrale du filtre. La matrice $\underline{\mathbf{F}}^{Int}$ sera la même matrice que $\underline{\mathbf{F}}^{Pol}$ si une attention est portée aux coefficients. Il est donc possible de déterminer la forme du filtre spectral imposée par la méthode par Interpolation en remontant à sa matrice équivalente par la méthode Différentielle. Attention, si n'importe quelle matrice $\underline{\mathbf{F}}^{Int}$ est prise alors la forme finale du filtrage peut ne plus être triviale. Par exemple, imposer des coefficients constants rendra l'équation différentielle du filtrage non linéaire dans l'espace. Ceci s'analyse par le fait que la fréquence de coupure est forcée à bouger dans l'espace. En effet elle sera fixe sur l'élément de référence mais pas sur l'élément réel. Il est possible de comparer $\underline{\mathbf{F}}^{Int}$ et $\underline{\mathbf{F}}^{Diff}$ en posant $\underline{\mathbf{F}}^{Int}\underline{\mathbf{B}}_{01} = \underline{\mathbf{F}}^{Diff}$, où $\underline{\mathbf{B}}_{01}$ est définie ci-dessous. Le but de cette annexe est de montrer les relations qui peuvent être établies entre les mé-

Le but de cette annexe est de montrer les relations qui peuvent être établies entre les méthodes de filtrage par Interpolation et les méthodes de filtrage Polynômiales. Il n'est pas possible de remonter exactement aux mêmes formes de filtrage mêmes si les deux approches sont équivalentes dans un espace fini. Il est toutefois possible de donner des matrices équivalentes. Les exemples développés ci-dessous sont réalisés à l'aide des fonctions de forme Lagrangiennes 1D O_2 et O_3 . Cette approche peut être généralisée aux cas 3D.

D.1.1 Équivalence filtrage Polynômial d'ordre 2

Cette partie vise à présenter l'équation d'équivalence entre un filtrage Polynômial d'ordre 2 classique et un filtrage par Interpolation *i.e.* à déterminer quelle doit être la forme du filtrage par Interpolation pour être strictement égale à celle d'un filtrage Polynômial.

Matrice de changement de base

La première chose est de déterminer les matrices de changement de base entre les deux bases définissant naturellement chacun des filtrages : la base canonique 0 de vecteur $\underline{\mathbf{X}}$ pour le filtrage par Interpolation et la base 1 des fonctions de forme de vecteur $\underline{\mathbf{N}}$ pour le filtrage Polynômial.

$$\underline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 1\\ \xi\\ \xi^2 \end{pmatrix} , \ \underline{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} 2\xi^2 - 3\xi + 1\\ -4\xi^2 + 4\xi\\ 2\xi^2 - \xi \end{pmatrix}$$

Il vient alors la matrice de changement de base $\underline{\underline{B}}_{10}$

$$\underline{\mathbf{N}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}_{10} \underline{\mathbf{X}} \Longrightarrow \underline{\underline{\mathbf{B}}}_{10} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{01} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 2 \end{bmatrix}$$

Matrice de filtrage Polynômial

Pour que l'effet spectral du filtre conçu ne soit pas déformé par l'implémentation numérique, il est important de le prendre Différentiel avec $n \leq n_{ordre}$. Il sera pris aussi polynômial dans cet exemple. Cela donne une équation de filtrage de la forme

$$\mathring{\Phi} = a_0 \Phi + a_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + a_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$$

Dans ce cas, les fonctions d'interpolation et leurs dérivées sont définies par

$$\begin{cases} N_1 = 2\xi^2 - 3\xi + 1\\ N_2 = -4\xi^2 + 4\xi\\ N_3 = 2\xi^2 - \xi \end{cases}$$
$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = 4\xi - 3\\ \frac{\partial N_2}{\partial \xi} = -8\xi + 4\\ \frac{\partial N_3}{\partial \xi} = 4\xi - 1\\ \frac{\partial^2 N_1}{\partial \xi^2} = 4\\ \frac{\partial^2 N_2}{\partial \xi^2} = -8\\ \frac{\partial^2 N_3}{\partial \xi^2} = 4 \end{cases}$$

En 1 dimension, l'inverse de la matrice jacobienne est un scalaire égale au volume de l'élément. Cela donne la matrice de filtrage polynômial suivante

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}}^{Pol} = a_0 \underline{\underline{\mathbf{D}}}^0 + \frac{a_1}{\Omega^e} \underline{\underline{\mathbf{D}}}^1 + \frac{a_2}{(\Omega^e)^2} \underline{\underline{\mathbf{D}}}^2$$

où

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}}^{0} = \underline{\underline{\mathcal{I}}}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}}^{1} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{B}}}_{01} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}}^{2} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{B}}}_{01} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -8 & -8 & -8 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Et son inverse

où Ω^e est le volume de l'élément. Ainsi par simple produit matriciel, les formes que doivent avoir les matrices d'Interpolation en sont déduites pour être identifiées à ce filtrage par la méthode Polynômiale

$$\underline{\mathbf{F}}^{Pol} = \begin{bmatrix} a_0 - \frac{3a_1}{\Omega^e} + \frac{4a_2}{(\Omega^e)^2} & -\frac{a_1}{\Omega^e} + \frac{4a_2}{(\Omega^e)^2} & \frac{a_1}{\Omega^e} + \frac{4a_2}{(\Omega^e)^2} \\ \frac{4a_1}{\Omega^e} - \frac{8a_2}{(\Omega^e)^2} & a_0 - \frac{8a_2}{(\Omega^e)^2} & -\frac{4a_1}{\Omega^e} - \frac{8a_2}{(\Omega^e)^2} \\ -\frac{a_1}{\Omega^e} + \frac{4a_2}{(\Omega^e)^2} & \frac{a_1}{\Omega^e} + \frac{4a_2}{(\Omega^e)^2} & a_0 + \frac{3a_1}{\Omega^e} + \frac{4a_2}{(\Omega^e)^2} \end{bmatrix}$$

Or

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}}^{Int}\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{01} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{Pol}$$

D'où la matrice équivalente du filtrage par Interpolation

$$\underline{\mathbf{F}}^{Int} = \begin{bmatrix} a_0 - \frac{3a_1}{\Omega^e} + \frac{4a_2}{(\Omega^e)^2} & -3a_0 + \frac{4a_1}{\Omega^e} & 2a_0 \\ \frac{4a_1}{\Omega^e} - \frac{8a_2}{(\Omega^e)^2} & 4a_0 - \frac{8a_1}{\Omega^e} & -4a_0 \\ -\frac{a_1}{\Omega^e} + \frac{4a_2}{(\Omega^e)^2} & -a_0 + \frac{4a_1}{\Omega^e} & 2a_0 \end{bmatrix}$$

La première chose à constater est que pour avoir une équivalence avec un filtrage Polynômial, la matrice de filtrage par Interpolation doit contenir des informations sur la géométrie de l'élément. De plus, il doit être possible d'identifier les a_i . Or seuls 3 coefficients permettent de paramétrer les matrices alors que 9 coefficients sont nécessaires. Une telle matrice donne lieu à une équation de filtrage à coefficients non constant *i.e.* un filtrage Différentiel.

Matrice de filtrage Différentiel

La matrice de filtrage Différentiel est définie comme la matrice de filtrage Polynômial à l'exception que la valeur des coefficients varie d'un nœud à l'autre. La matrice de filtrage Différentiel s'écrit dans la base 0

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}}^{Dif} = \begin{bmatrix} a_{01} - \frac{3a_{11}}{\Omega^e} + \frac{4a_{21}}{(\Omega^e)^2} & -3a_{01} + \frac{4a_{11}}{\Omega^e} & 2a_{01} \\ \frac{4a_{12}}{\Omega^e} - \frac{8a_{22}}{(\Omega^e)^2} & 4a_{02} - \frac{8a_{12}}{\Omega^e} & -4a_{02} \\ -\frac{a_{13}}{\Omega^e} + \frac{4a_{23}}{(\Omega^e)^2} & -a_{03} + \frac{4a_{13}}{\Omega^e} & 2a_{03} \end{bmatrix}$$

D.1.2 Équivalence filtrage Interpolation

Cette partie vise à présenter l'équation d'équivalence de deux approches de filtrage par Interpolation avec un filtrage Différentiel.

Matrice de filtrage par Interpolation classique

L'approche classique d'un filtrage par Interpolation consisterait à ne conserver que les monômes constants et linéaires i.e. une matrice de filtrage dans la base 0

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}}^{Int} = \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Par analogie avec le filtrage Différentiel à obtenir, l'équation de filtrage est

$$\mathring{\Phi} = a_0(x) \Phi + a_1(x) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + a_2(x) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$$

où

$$a_{0}\left(x\right)=\underline{\mathbf{0}}\;,\;a_{1}\left(x\right)=\operatorname{diag}\left[0,-\frac{1}{8},0\right]\;,\;a_{2}\left(x\right)=\operatorname{diag}\left[\frac{1}{4},-\frac{1}{16},0\right]$$

où **diag** [] définit la matrice diagonale composée des coefficients dans l'argument. Il est évident ici que $a_0(x) = \underline{0}$ afin qu'il n'y ait pas d'évolution quadratique dans l'équation de filtrage.

Matrice de filtrage par Interpolation AETHER

L'approche du filtrage par Interpolation développée dans cette thèse et implémentée dans AETHER s'appuie sur une troisième base notée 2 des fonctions d'interpolation O_2 . Le vecteur \underline{N}^{O_2} est introduit ainsi que la matrice de changement de base $\underline{\mathbf{B}}_{20}$ entre la base canonique et la base 2.

$$\underline{\mathbf{N}}^{O_2} = \begin{pmatrix} 1-\xi \\ 0 \\ \xi \end{pmatrix} , \ \underline{\mathbf{B}}_{20} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Le problème recherché est donc

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{01} - \frac{3a_{11}}{\Omega^e} + \frac{4a_{21}}{(\Omega^e)^2} & -3a_{01} + \frac{4a_{11}}{\Omega^e} & 2a_{01} \\ \frac{4a_{12}}{\Omega^e} - \frac{8a_{22}}{(\Omega^e)^2} & 4a_{02} - \frac{8a_{12}}{\Omega^e} & -4a_{02} \\ -\frac{a_{13}}{\Omega^e} + \frac{4a_{23}}{(\Omega^e)^2} & -a_{03} + \frac{4a_{13}}{\Omega^e} & 2a_{03} \end{bmatrix}$$

d'où

$$a_0(x) = \underline{\mathbf{0}}, \ a_1(x) = \mathbf{diag}\left[-\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}\right], \ a_2(x) = \mathbf{diag}\left[\frac{1}{16}, 0, \frac{1}{16}\right]$$

Comme les vecteurs coefficients du filtrage ne sont pas uniformes, cela signifie que le filtrage équivalent au filtrage par Interpolation n'est pas à coefficients constants. Cependant, celui-ci peut être découpé en une partie linéaire et une partie non linéaire comme

$$\mathring{\Phi} = \frac{1}{4}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{1}{16}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + a_1(x)\frac{\partial\Phi}{\partial x} + a_2(x)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}$$

où

$$a_1(x) = \mathbf{diag}\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0\right] , \ a_2(x) = \mathbf{diag}\left[0, -\frac{1}{16}, 0\right]$$

Bibliographie

- [1] Rapport de présentation des conditions d'obtention de la valeur de l'indicateur représentatif de l'énergie sonore pour l'année 2010. Ministères de lÉcologie, du Développement durable, des Transports et du Logement.
- [2] S. Arvidson, L. Davidson, and S.-H. Peng. Hybrid reynolds-averaged navier-stokes/largeeddy simulation modeling based on a low-reynolds-number k – w model. AIAA Journal, 54(12) :1–6, December 2016.
- [3] C. Bailly, C. Bogey, and X. Gloerfelt. Some useful hybrid apporaches for predicting aerodynamic noise. *Comptes Rendus Mecanique*, 333(9) :666–675, Septembre 2005.
- [4] C. Bailly and G. Comte-Bellot. *Turbulence*, volume ISBN 978-3-319-16159-4. Springer, 2015.
- [5] Y. Bazilevs, V. M. Calo, J. A. Cottrell, T. J. R. Hughes, A. Reali, and G. Scovazzi. Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(1-4) :173–201, December 2007.
- [6] L. P. Bernal and A. Roshko. Streamwise vortex structure in plane mixing layer. Journal of Fluid Mechanics, 170 :499–525, September 1986.
- [7] C. Bogey and C. Bailly. Three dimensional non reflective boundary conditions for acoustic simulations : far field formulation and validation tests cases. Acta Acustica united with Acustica, 88(4) :463–471, July 2002.
- [8] V. Borue and S. A. Orzag. Forced three-dimensional homogeneous turbulence with hyperviscosity. EPL (Europhysics Letters), 29(9) :687–692, July 1995.
- [9] V. Borue and S. A. Orzag. Self-similar decay of three dimensional turbulence with hyperviscosity. *Physical review. E, Statistical physics, plasmas, fluids, and related interdisciplinary* topics, 51(2) :R856–R859, March 1995.
- [10] V. Borue and S. A. Orzag. Kolmogorov's refined similarity hypothesis for hyperviscous turbulence. *Physical review. E, Statistical physics, plasmas, fluids, and related interdisciplinary topics*, 53(1) :R21–R24, February 1996.
- [11] V. Borue and S. A. Orzag. Numerical study of kolmogorov flow at high reynolds numbers. Journal of Fluid Mechanics, 306 :293–323, January 1996.
- [12] M.-E. Brachet, D. Meiron, S. Orszag, B. Nickel, R. Morf, and U. Frisch. Small-scale structure of the taylor-green vortex. *Journal of Fluid Mechanics*, 130:411–452, May 1983.
- [13] M. J. Brazell, A. Kirby, M. Stoellinger, and D. J. Mavriplis. Using les in a discontinuous galerkin method with constant and dynamic sgs models. AIAA, January 2015.
- [14] A. N. Brooks and T. J. R. Hughes. Streamline upwind/petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32(1-3) :199–259, September 1982.

- [15] R. Calderer and A. Masud. Residual-based variational multiscale turbulence models for unstructured tetrahedral meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 254 :238–253, February 2013.
- [16] G. F. Carey and J. T. Oden. *Finite elements : A second course*, volume volume II. Prentice-Hall, 1983.
- [17] N. Chauvet, S. Deck, and L. Jacquin. Zonal detached eddy simulation of a controlled propulsive jet. AIAA Journal, 45(10) :2458–2473, October 2007.
- [18] J. P. Chollet. Turbulence tridimensionnelle isotrope : modélisation statistique des peties échelles et simulation numérique des grandes échelles. PhD thesis, Grenoble, France, 1984.
- [19] M. Choudhari and M. R. Khorrami. Slat cove unsteadiness : effect of 3d flow structures. 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibition, 2006.
- [20] M. Choudhari and K. Yamamoto. Integrating cfd, caa and experiments towards benchmark datasets for airframe noise problems. Proceedings of 5th Symposium on Integration CFD and Experiments in Aerodynamics (Integration 2012), 2012.
- [21] F. K. Chow and P. Moin. A further study of numerical errors in large-eddy simulations. Journal of Computational Physics, 184(2) :366–380, January 2003.
- [22] N. Curle. The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound. Proceedings of The Royal Society, A 231(1187) :505–514, September 1955.
- [23] G. Dantinne, H. Jeanmart, G. S. Winckelmans, V. Legat, and D. Carati. Hyperviscosity and vorticity based models for subgrid scale modeling. *Applied Scientific Research*, 59(4):409–420, 1997.
- [24] M. Daroukh, S. Moreau, N. Gourdain, J.-F. Boussuge, and C. Sensiau. Influence of distortion on tonal fan noise. 22nd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conferences, Lyon, France, 2016. 2016-2818.
- [25] E. David. Modélisation des écoulements compressibles et hypersoniques : une approche instationnaire. PhD thesis, I.N.P. de Grenoble, 1993.
- [26] S. Deck. Simulation numérique des charges latérales instationnaires sur des configurations de lanceur. PhD thesis, Université d'Orléans, 2002.
- [27] S. Deck. Recent improvements in the zonal detached eddy simulation (zdes) formulation. Theoretical and Computational Fluid Dynamics, 26(6) :1–28, December 2011.
- [28] S. Deck and R. Laraufie. Numerical investigation of the flow dynamics past a three-element aerofoil. *Journal of Fluid Mechanics*, 732 :401–444, October 2013.
- [29] V. Deschamps. Simulation numérique de la turbulence homogène incompressible dans un écoulement de canal plan. ONERA, January 1989. Note technique, 1988-5.
- [30] W. Dobrzynski. Almost 40 years of airframe noise research : what did we achieved ? Journal of Aircraft, 47(2) :353–357, 2010.
- [31] J. A. Domaradski and N. Adams. Direct modelling of subgrid scales of turbulence in large-eddy simulations. *Journal of Turbulence*, 3(24) :1–19, 2002.
- [32] C. Duprat, G. Balarac, O. Métais, P. M. Congedo, and O. Brugière. A wall-layer model for large-eddy simulations of turbulent flows with/out pressure gradient. *Physics of Fluids*, 23(1), January 2011.
- [33] G. Erlebacher, M. Y. Hussaini, C. G. Speziale, and T. A. Zang. Toward the large eddy simulation of compressible turbulent flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 238:155–185, 1992.
- [34] A. Ern. Aide-mémoire : Éléments finis. L'Usine nouvelle Dunod, 2005.
- [35] A. Ern and J.-L. Guermond. Élements finis : théorie, applications, mise en œuvre. Springer, 2000.

- [36] R. T. A. et Environnement du CORAC. Réduire les nuisances sonores engendrées par l'aéronautique civile - état des lieux et pistes de progrès.
- [37] C. Farhat, A. Rajasekharan, and B. Koobus. A dynamic variational multiscale method for large eddy simulations on unstructured meshes. 2006.
- [38] D. Fauconnier. Development of a Dynamic Finite Difference Method for Large-Eddy simulation. PhD thesis, Universiteit Gent, 2008-2009.
- [39] J. H. Ferziger. Large eddy simulation : an introduction and perspective. Les éditions de physique, Springer, 1997. 29-48.
- [40] J. Ffowcs-Williams and D. Hawkings. Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*, *Mathematical and Physical Science*, 264(1151) :321–342, 1969.
- [41] A. C. for Aeronautics Research in Europe. Strategic research agenda vol. 1 and 2.
- [42] L. P. Franca and T. J. R. Hughes. Two classes of mixed finite element methods. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 69(1):89–129, July 1988.
- [43] C. Fureby and F. Grinstein. Monotonically integrated large eddy simulation of free shear flows. AIAA Journal, 37(5) :545–556, May 1999.
- [44] C. Fureby, G. Tabor, H. G. Weller, and A. D. Gosman. A comparative study of subgrid scale models in homogeneous isotropic turbulence. *Physics of Fluids*, 9(5) :1416–1429, May 1997.
- [45] G. Gabard, H. Beriot, A. Prinn, and K. Kucukcoskun. An adaptative, high-order finite element method for aeroengine acoustics. 22nd AIAA/CEAS, Lyon, France, May 30 -June 1, 2016. 2016-2970.
- [46] S. Galdeano. Simulation et localisation de sources aéroacoustiques autour de profils hypersustentés. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Janvier 2013.
- [47] P. Gamnitzer. Residual-based variational multiscale methods for turbulent flows and fluidstructure interaction. PhD thesis, Technische Universität München, April 2010.
- [48] E. Garnier, M. Mosse, P. Sagaut, M. Deville, and P. Comte. On the use of shock-capturing schemes for large-eddy simulation. *Journal of Computational Physics*, 153(2) :273–311, August 1999.
- [49] M. Germano. Turbulence : the filtering approach. Journal of Fluid Mechanics, 238(1) :325– 336, June 1992.
- [50] S. Ghosal. An analysis of numerical errors in large-eddy simulation of turbulence. *Journal of Computational Physics*, 125 :187–206, 1996.
- [51] X. Gloerfelt. Bruit rayonné par un écoulement affleurant un cavité : simulation aeroacoustique directe et application de méthodes intégrales. PhD thesis, École Centrale de Lyon, Novembre 2001.
- [52] X. Gloerfelt, F. Perot, C. Bailly, and D. Juvé. Flow-induced cylinder noise formulated as a diffraction problem for low mach numbers. *Journal of Sound and Vibration*, 287(1-2):129–151, October 2005.
- [53] M. Goldstein. Aeroacoustics. Mc Graw-Hill International Book Company, 1976.
- [54] V. Gravemeier. Scale-separating operators for variational multiscale large eddy simulation of turbulent flows. *Journal of Computational Physics*, 212(2) :400–435, March 2006.
- [55] F. Grinstein and C. Fureby. Recent progress on miles for high reynolds-number flows. AIAA Paper, 124(4), January 2002.
- [56] R. Gross. Prise en compte de la transition laminaire/turbulente dans un code Navier-Stokes éléments finis non structurés. PhD thesis, Institut supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace, octobre 2015.

- [57] J.-L. Guermond. Stabilization of galerkin approximations of transport equations by subgrid modeling. *Journal of Multivariate Analysis*, 33(6) :1296–1316, November 1999.
- [58] J.-L. Guermond. Subgrid stabilization of galerkin approximations of linear monotone operators. IMA J. Numer. Anal., 21 :165–197, 2001.
- [59] H. Guillard and R. Abgrall. Modélisation numérique des fluides compressibles. Edition Gauthier-Villars, series in applied mathematics edition, 2001.
- [60] F. Hamba. Log-layer mismatch and commutation error in hybrid rans/les simulation of channel flow. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 30(1):20–31, February 2009.
- [61] A. Harten. On the symmetric form of systems of conservation laws with entropy. *Journal* of Computational Physics, 49(1):151–164, January 1983.
- [62] M.-C. Hsu, Y. Bazilevs, V. M. Calo, T. Tezduyar, and T. J. R. Hughes. Improving stability of stabilized and multiscale formulations in flow simulations at small time steps. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(13-16) :828–840, February 2010.
- [63] T. Hughes, V. Calo, and G. Scovazzi. Variational and multiscale methods in turbulence. Technical report, 2004. Technical report 04-46, ICES.
- [64] T. Hughes, V. Calo, and G. Scovazzi. Variational multiscale analysis; the fine-scale green's function, projection, optimization, localization, and stabilized methods. Technical report, 2005. Technical report, ICES.
- [65] T. J. Hughes, G. Scovazzi, and L. P. Franca. Multiscale and Stabilized Methods, pages 239–254. John Wiley and Sons, Ltd, 200.
- [66] T. J. R. Hughes. The finite element method : Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis. Prentice-Hall, 1987.
- [67] T. J. R. Hughes. Multiscale phenomena : Green's functions, the dirichlet-to-neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127(1-4) :387–401, November 1995.
- [68] T. J. R. Hughes, G. R. Feijoo, L. Mazzei, and J.-B. Quincy. The variational multiscale method - a paradigm for computational method mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 166(1-2) :3–24, November 1998.
- [69] T. J. R. Hughes, L. P. Franca, and G. M. Hulbert. A new finite element formulation for computational fluid dynamics : Viii. the galerkin-least-squares method for advectivediffusive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 73 :173– 189, May 1989.
- [70] T. J. R. Hughes, L. P. Franca, and M. Mallet. A new finite element formulation for computational fluid dynamics : I symmetric forms of the compressible euler and navierstokes equations and the second law of thermodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 54(2) :223–234, February 1986.
- [71] T. J. R. Hughes, L. Mazzei, and K. E. Jansen. Large eddy simulation and the variational multiscale method. *Computing and Visualization in Science*, 3(1):47–59, January 2000.
- [72] T. J. R. Hughes, L. Mazzei, A. A. Oberai, and A. A. Wray. The multiscale formulation for large eddy simulation : decay of homogeneous isotropic turbulence. *Physics of Fluids*, 13(2) :505, February 2001.
- [73] T. J. R. Hughes and J. Stewart. A space-time formulation for multiscale phenomena. Journal of Computational and Applied Mathematics, 74(1-2) :217–229, November 1996.
- [74] E. Itam, S. Wornom, B. Koobus, and A. Dervieux. Application of a hybrid variational multiscale model to massively separated flows. International conference on Applied Aerodynamics (3AF), 2015.
- [75] L. N. Jenkins, M. R. Khorrami, and M. Choudhari. Characterization of unsteady flow structures near leading-edge slat : Part 1 piv measurements. 2004.

- [76] Jeong and Hussain. On the identification of a vortex. Journal of Fluid Mechanics, 285:69– 94, February 1995.
- [77] V. John and A. Kindl. Numerical studies of finite element variational multiscale methods for turbulent flow simulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(13-16) :841–852, February 2010.
- [78] V. John, A. Kindl, and C. Suciu. Finite element les and vms methods on tetrahedral meshes. Journal of Computational and Applied Mathematics, 233(12) :3095–3102, April 2010.
- [79] Y. Kaneda and D. C. Leslie. Tests of subgrid models in the near-wall region using represented velocity fields. *Journal of Fluid Mechanics*, 132 :349–373, July 1983.
- [80] S. Kawai and J. Larsson. Wall-modeling in large eddy simulation : length scales, grid resolution and accuracy. *Physics of Fluids*, 24(1), 2012.
- [81] A. Keating and U. Piomelli. A dynamic stochastic forcing method as a wall-layer model for large eddy simulation. *Journal of Turbulence*, 7(12):24, January 2006.
- [82] M. R. Khorrami, B. A. Singer, and M. E. Berkman. Time-accurate simulations and acoustic analysis of slat free-shear layer. AIAA Journal, 40(7) :1284 ?1291, February 2002.
- [83] G. Kirchhoff. *Towards a theory of light rays*, volume 18. Wiley, 1883. Annalen der Physik und Chemie.
- [84] A. Kolmogorov. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 30:301-305, 1941.
- [85] B. Koobus and C. Farhat. A variational multiscale method for the large eddy simulation of compressible turbulent flows on unstructured meshes - application to vortex shedding. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(15):1367–1383, April 2004.
- [86] R. H. Kraichnan. Inertial ranges in two dimensional turbulence. Journal of fluid mechanics, 10(7) :1417–1423, 1967.
- [87] R. H. Kraichnan. Inertial-range transfer in two and three dimensional turbulence. *Journal of fluid mechanics*, 47(3) :525–535, June 1971.
- [88] R. H. Kraichnan. Eddy viscosity in two and three dimensions. Journal of the Atmospheric Sciences, 33(8) :1521–1536, August 1976.
- [89] A. G. Kravchenko and P. Moin. On the effect of the numerical errors in large-eddy simulations of turbulent flows. *Journal of Computational Physics*, 131(2):310–322, March 1997.
- [90] G. Kuru, M. de la Llave Prata, V. Couaillier, R. Abgrall, and F. Coquel. A adaptative variational multiscale discontinuous galerkin method for large eddy simulation. 54th AIAA Aerospace Sciences Meeting, January 4-8 2016.
- [91] W. J. Layton. A nonlinear, subgridscale model for incompressible viscous flow problems. SIAM J. Sci. Comput., 17(2) :347–357, 1996.
- [92] A. Leonard. Energy cascade in large-eddy simulations of turbulent fluid flows. Advance in Geophysics, 18(A) :237–248, January 1974.
- [93] M. Lesieur. Mechanics of fluids and transport processes. Martinus Nijhoff Publishers, 1987.
- [94] M. Lesieur. Turbulence in Fluids. Kluwer, 3rd edition edition, 1997.
- [95] M. Lesieur and P. Comte. Large and small-scale stirring vorticity and passive scalar in a 3d temporal mixing layer. *Physics of Fluids A Fluid Dynamics*, 3(12) :2761–2778, May 1991.
- [96] M. Lesieur and D. Schertzer. Amortissement autosimilaire d'une turbulence à grand nombre de reynolds. *Journal de mecanique*, 17(4):609–646, 1978.

- [97] D. C. Leslie and G. L. Quarini. The application of turbulence theory to the formulation of subgrid modelling procedures. *Journal of Fluid Mechanics*, 91(1):65–91, March 1979.
- [98] M. Lessieur and O. Métais. New trends in large-eddy simulations of turbulence. Annual Review of Fluid Mechanics, 28(1):45–82, November 2003.
- [99] V. Levasseur. Simulation grandes échelles en éléments finis stabilisés : une approche variationnelle multi-échelles. PhD thesis, Université Paris VI Pierre et Marie Curie, 2007.
- [100] V. Levasseur, P. Sagaut, F. Chalot, and A. Davroux. An entropy-variable based vms/gls method for the simulation of compressible flows on unstructured grids. *Computer Methods* in Applied Mechanics and Engineering, 195(9-12) :1154–1179, February 2006.
- [101] D. Lilly. A proposed modification of the germano subgrid-scale closure method. *Physics of Fluids A Fluid Dynamics*, 4(3) :633–635, March 1992.
- [102] D. K. Lilly. On the application of the eddy-viscosity concept in the inertial subrange of turbulence. *Technical report*, January 1967. Boulder, Colorado.
- [103] J. Liu. Residual-Based variational multiscale models for the large eddy simulation of compressible and incompressible turbulent flows. PhD thesis, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York, July 2012.
- [104] D. Lockhard and M. Choudhari. The effect of cross flow on slat noise. AIAA 16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Stockholm (Sweden), June 7-9 2010.
- [105] D. Lockhard and M. Choudhari. Noise radiation from a leading-edge slat. AIAA 15th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Miami FL USA, May 11-13 2009.
- [106] T. Lund. The use of explicit filters in large eddy simulation. Computers and Mathematics with Applications, 46(4):603–616, August 2003.
- [107] M. Mallet. A finite element method for computational fluid dynamics. PhD thesis, Stanford, 1985.
- [108] E. Manoha and M. Pott-Pollenske. Leisa 2 : an experimental database for the validation of numerical predictions of slat unsteady flow and noise. AIAA 21st AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, 2015-3137, 22-26 June 2015.
- [109] E. Manoha, S. Redonnet, M. Terracol, and R. Guenaff. Numerical simulation of aerodynamic noise. European congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, July 24-28, 2004.
- [110] N. Mansour, P. Moin, W. C. Reynolds, and J. H. Ferziger. Improved methods for largeeddy simulations of turbulence. Penn State, USA, February 1977. Symposium on Turbulent Shear Flow.
- [111] O. Marsden, C. Bogey, and C. Bailly. Direct noise computation of the turbulent flow around a zero-incidence airfoil. *AIAA Journal*, 46(4) :874–883, April 2008.
- [112] A. Michalke. On the inviscid instability of the hyperbolic-tangent velocity profile. *Journal of Fluid Mechanics*, 19(4) :543–556, August 1964.
- [113] P. Moin, K. Squires, W. Cabot, and S. Lee. A dynamic subgrid-scale model for compressible turbulence and scalar transport. *Physics of Fluids A Fluid Dynamics*, 3)(11) :2746–2757, 1991.
- [114] M. Murayama, K. Nakakita, K. Yamamoto, H. Ura, Y. Ito, and M. Choudhari. Experimental study of slat noise from 30p30n three-element high-lift airfoil in jaxa hard-wall low-speed wind tunnel. AIAA paper 2014-2080, June 2014.
- [115] B. Nebenführ, H. Yao, S.-H. Peng, and L. Davidson. Hybrid rans/les simulations for aerodynamic and aeroacoustic analysis of a multi-element airfoil. AIAA 19th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Berlin Germany, May 27-29 2013. 2013-2066.

- [116] F. Nicoud and F. Ducros. Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor. *Flow Turbulence and Combustion*, 62(3) :183–200, September 1999.
- [117] N. V. Nikitin, F. Nicoud, B. Wasistho, K. D. Squires, and P. R. Spalart. An approach to wall modeling in large-eddy simulations. *Physics of fluids*, 12(7), January 2000.
- [118] P. E. Normand. Application des méthodes d'ordre élevé en éléments finis pour l'aérodynamique. PhD thesis, Université de Bordeaux, 2011.
- [119] A. A. Oberai and D. Sondak. Application of the variational germano identity to the variational multiscale formulation. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 27(2):335–344, February 2011.
- [120] G. I. Park and P. Moin. An improved dynamic non-equilibirum wall-model for large eddy simulation. *Physics of Fluids*, 26 :15–108, January 2014.
- [121] U. Piomelli. Wall-layer models for large-eddy simulations. Progress in Aerospace Sciences, 44(6):437–446, August 2008.
- [122] S. B. Pope. Turbulent Flows. Cambridge University Press, 11th edition, 2013.
- [123] B. Rajamani and J. Kim. A hybrid-filter approach to turbulence simulation. Flow Turbulence and Combustion, 85(3):421–441, December 2010.
- [124] U. Rasthofer and V. Gravemeier. Multifractal subgrid-scale modeling within a variational multiscale method for large eddy simulation of turbulent flow. *Journal of Computational Physics*, 234(1) :79–107, February 2013.
- [125] O. Reynolds. Paper on mechanical and physical subjects, volume 3. Cambridge, 1903. 11-13.
- [126] L. Richardson. Proc. Roy. Soc. London, 110 :709–737, 1926. Ser A.
- [127] J. E. Rossiter. Wind-tunnel experiments on the flow over rectangular cavities at subsonic and transonic speeds. Technical report, Aeronautical Research Council Reports and Memoranda, 1964.
- [128] P. Sagaut. Large Eddy simulation for incompressible flows : an introduction. Springer Berlin Heidelberg, 2 edition, 1998.
- [129] P. Sagaut, S. Deck, and M. Terracol. Multiscale and Multiresolution approaches in turbulence. Imperial College Press, 2006.
- [130] P. Sagaut and V. Levasseur. Sensitivity of spectral variational multiscale methods for large-eddy simulation of isotropic turbulence. *Physics of Fluids*, 17(3), 2005.
- [131] M. Sanchez-Rocha and S. Menon. An order of magnitude approximation for the hybrid terms in the compressible hybrid rans/les governing equations. *Journal of Turbulence*, 12(16):1–12, January 2011.
- [132] M. Sanjosé, S. Moreau, M. Pestana, and M. Roger. Influence and modelling of ogv heterogeneity. 22nd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conferences, Lyon, France, 2016. 2016-2881.
- [133] H. Schlichting. Boundary-Layer Theory. Mc Graw-Hill Book Company, 7th edition edition, 2002.
- [134] F. Shakib. Finite element analysis of the compressible Euler and Navier-Stokes equations. PhD thesis, Stanford, 1988.
- [135] Y. Shang. A parallel two-level finite element variational multiscale method for the navierstokes equation. Nonlinear Analysis, 84 :103–116, June 2013.
- [136] M. L. Shur, P. R. Spalart, M. K. Strelets, and A. K. Travin. An enhanced version of des with rapid transition from rans to les in separated flows. *Flow Turbulence and Combustion*, 95(4), December 2015.
- [137] J. S. Smagorinsky. General circulation experiments with primitive equations : I. the basic experiment. *Monthly Weather Review*, 91(3) :99–163, November 1962.

- [138] D. Sondak. Novel Residual-Based Large Eddy Simulation Turbulence Models for incompressible Magnetodynamics. PhD thesis, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York, July 2013.
- [139] P. R. Spalart, S. Deck, M. L. Shur, K. D. Squires, M. K. Strelets, and A. Travin. A new version of detached-eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities. *Theoritical and Computational Fluid Dynamics*, 20(3) :181–195, July 2006.
- [140] P. R. Spalart, W. H. Jou, M. Strelets, and S. R. Allmaras. Comments on the feasibility of les for wings, and on a hybrid rans/les approach. August, Ruston, LA, January 1997. First AFOSR International Conference on DNS/LES. in *Advances in DNS/LES*, edited by C. Liu and Z. Liu (Greyden, Colombus, OH, 1997).
- [141] G. D. Stephano and O. V. Vasilyev. Sharp cutoff versus smooth filtering in large-eddy simulation. *Physics of Fluids*, 14(1):362–369, January 2002.
- [142] G. Strang and G. J. Fix. An analysis of the finite element method. Prentice-Hall, 1973.
- [143] E. Tadmor. Skew-selfadjoint form for systems of conservation laws. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 103(2):428–442, October 1984.
- [144] M. Terracol, E. Labourasse, E. Manoha, and P. Sagaut. Simulation of the 3d unsteady flow in a slat cove for noise prediction. 9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibition Hilton Head (USA), May 12-14 2003.
- [145] M. Terracol, E. Manoha, and B. Lemoine. Investigation of the unsteady flow and noise generation in a slat cove. AIAA Journal, 54(2) :1–21, December 2015.
- [146] M. Terracol, E. Manoha, M. Murayama, K. Yamamoto, K. Amemiya, and K. Tanaka. Aeroacoustic calculations of the 30p30n high-lift airfoil using hybrid rans/les methods : Modeling and grid resolution effects. AIAA paper 2015-3132, June 2015.
- [147] S. Tran and O. Sahni. Large eddy simulation based on the residual-based variational multiscale method and lagrangian dynamic smagorinsky model. 54th AIAA Aerospace Sciences Meeting, San Diego, California, USA, January 4-8 2016. 2016-0341.
- [148] A. Travin, M. Shur, M. Strelets, and P. Spalart. Detached-Eddy simulations past a circular cylinder. Number 63. Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [149] A. Travin, M. Shur, M. Strelets, and P. R. Spalart. *Physical and numerical upgrades in the detached-eddy simulation of complex turbulent flows.* Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [150] A. K. Travin, M. L. Shur, P. R. Spalart, and M. K. Strelets. Improvement of delayed detached-eddy simulation for les with wall modelling. European Conference on Computational Fluid Dynamics (ECCOMAS CFD), 2006.
- [151] J. Uribe, N. Jarrin, R. Prosser, and D. Laurence. Hybrid v2f rans/les model and synthetic inlet turbulence applied to a trailing edge flow.
- [152] J. C. Uribe, N. Jarrin, R. Prosser, and D. Laurence. Development of a two-velocities hybrid rans/les model and its application to a trailing edge flow. *Flow Turbulence and Combustion*, 85(2) :181–197, September 2010.
- [153] O. V. Vasilyev, T. Lund, and P. Moin. A general class of commutative filters for les in complex geometries. *Journal of Computational Physics*, 146(1):82–104, January 1998.
- [154] A. W. Vreman. The filtering analog of the variational multiscale method in large-eddy simulation. *Physics of Fluids*, 15(8), August 2003.
- [155] M. Wang and P. Moin. Dynamic wall modeling for large-eddy simulation of complex turbulent flows. *Physics of fluids*, 14(7), July 2002.
- [156] J. Wild, M. Pott-Pollenske, and B. Nagel. An integrated design approach for low noise exposing high-lift devices. AIAA paper, June 2006.

- [157] G. Winckelmans, T. Lund, D. Carati, and A. A. Wray. A priori testing of subgrid-scal models for the velocity-pressure and vorticity-velocity formulations. pages 309–388. Proceedings of the Summer Program - Center for Turbulence Research, January 1997.
- [158] G. S. Winckelmans and H. Jeanmart. Assessment of some models for les without/with explicit filtering. 2001. 55-66, (Direct and large-eddy simulation IV, Geurts, Friedrich and Métais eds.).
- [159] H. Xiao and P. Jenny. A consistent dual-mesh framework for hybrid les/rans modeling. Journal of Computational Physics, 231(4) :1848–1865, February 2012.
- [160] Y. Zang, R. Street, and J. Koseff. A dynamic mixed subgrid-scale model and its application to turbulent recirculating flows. *Physics of Fluids*, A 5(12) :3186–3196, December 1993.
- [161] O. C. Zienkiewicz. The Finite Element Method. London : McGraw-Hill, 1977.

Résumé

Cette thèse vise à améliorer la précision numérique des simulations aéroacoustiques d'écoulements dans un contexte précis, celui du cadre industriel avec un partenariat Dassault Aviation. Pour répondre à cette problématique, la modélisation aux grandes échelles est utilisée afin de la rendre plus efficace et adaptée à la méthode numérique des éléments finis stabilisée par SUPG/GLS. Afin de préciser la méthode numérique, une première partie est consacrée à la formulation théorique et pratique du code AETHER utilisé. La précision des schémas numériques spatial et temporel est aussi présentée. L'idéologie principale issue de la famille des modèles Variational Multi-Scale a été retenue afin de construire le nouveau modèle de sous-maille. En effet, une précédente thèse avait démontré la pertinence de ce type d'approche pour les éléments finis. Même si le cadre est applicatif, cette thèse propose une réflexion générale sur le filtrage numérique en éléments finis ainsi qu'un nouveau procédé pour filtrer le plus efficacement l'écoulement calculé. Cette nouvelle approche de filtrage est particulièrement bien adaptée aux éléments finis et à la montée en ordre spatial. Un modèle hybride de gestion des parois est aussi développé afin de pouvoir utiliser le nouveau modèle de sous-maille dans des configurations complexes comprenant des surfaces solides. Le processus de filtrage est testé sur le cas académique des tourbillons de Taylor-Green et présente un réel gain. Enfin le modèle global est utilisé pour calculer une configuration industrielle de tri-corps hypersustenté nommée LEISA II. Grâce au nouveau modèle proposé et validé par les résultats expérimentaux, il a été possible de fournir des interprétations physiques pointues sur le comportement complexe de l'écoulement du bec et du bruit qu'il génère. Cette dernière partie est une illustration pertinente de l'utilisation des modèles aux grandes échelles pourtant coûteux, et cela même dans un contexte industriel.

Mots clés : LES, Filtrage, VMS, Éléments finis, SUPG, LEISA II, Taylor-Green

Abstract

The goal of this thesis is to improve the numerical accuracy for aeroacoustic flow simulations in a given scope, that is an industrial application for a partnership with the aircraft company Dassault Aviation. These works are then looking for a new large eddy simulation (LES) model which is efficient and well suited for the finite element formulation and the SUPG/GLS stabilisation method. In order to clarify the scientific environment and numerical tools, a first part is devoted to the theoretical and practical framework of the AETHER code. The spatial and temporal performances of its numerical schemes are assessed too. The philosophy of the Variational Multi-scale models has been selected to build an improvement for the new subgrid model. Indeed, a previous thesis had already demonstrated the relevance of this kind of models especially for the finite element method. Despite the industrial framework, a general reflection on the numerical filtering in finite elements is suggested and a new filtering process is developed in order to sort efficiently the scales of the simulated flow. This new filtering method is especially well fitted to finite element simulations and the high spatial order schemes. An hybrid model has been developed too in order to be able to use the new VMS model in complex configurations involving solid bodies. The filtering process is assessed on an academic case called Taylor-Green vortices and shows a real benefit compare to classical approaches. Finally the whole model is used to compute an industrial configuration, a three-element high-lift device called LEISA II. Thank to the validation of the new model with the experimental results, it has been possible to find accurate explanations about the complex flow behaviour of the slat and its noise generation. This last part is a relevant demonstration of the LES models use in the industrial world even if they are still costly in computation ressources.

Keywords : LES, Filtering, VMS, Finite element, SUPG, LEISA II, Taylor-Green