Séance de travaux dirigés n°4

On se propose de résoudre numériquement un problème classique de stabilité linéaire, à savoir l'équation de Rayleigh pour une couche de mélange bidimensionnelle possédant un profil de vitesse en tangente hyperbolique. Dans le cadre de la séance d'autonomie, on développera le script Matlab associé. Le compte-rendu final, qu'il est possible de rédiger par binôme, est à remettre sous forme papier ou à déposer sur moodle.

Étude de la stabilité d'une couche de mélange

On considère l'écoulement de base représenté sur la figure 1, voir aussi la visualisation expérimentale de la figure 2, modélisé par l'expression suivante:

$$U(x_3) = \frac{U_1 + U_2}{2} + \frac{U_1 - U_2}{2} \tanh\left(\frac{2x_3}{\delta_\omega}\right) = u_m \left[1 + R_u \tanh\left(\frac{2x_3}{\delta_\omega}\right)\right] \tag{1}$$

avec les notations usuelles suivantes,

$$u_m = \frac{U_1 + U_2}{2} \qquad \Delta U = U_1 - U_2 \qquad R_u = \frac{\Delta U}{2u_m}$$

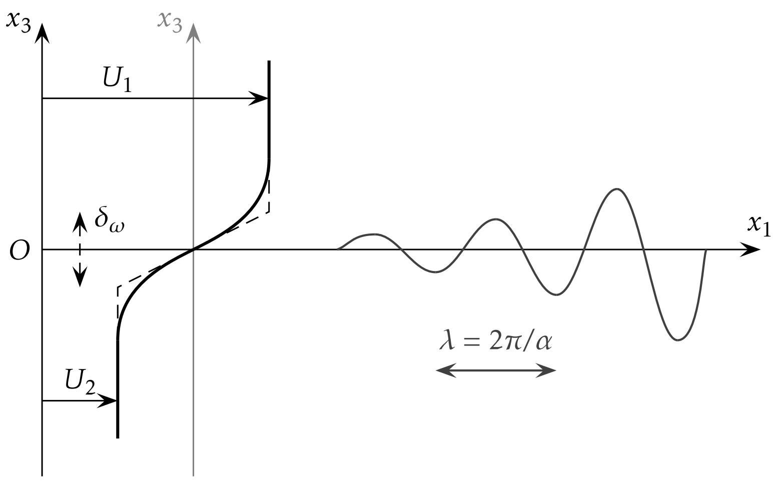

Fig. 1 – Développement d'ondes d'instabilité de Kelvin-Helmholtz dans une couche de mélange.

Dans toute la suite, on adimensionnalise les variables du problème avec la longueur $h = \delta_\omega/2$ et la vitesse u_m, en posant en particulier $z \equiv x_3/h$. Le profil de vitesse (1) s'écrit alors comme (cf. séance de TD n°3)

$$\hat{U}(z) = 1 + R_u \tanh(z) \tag{2}$$

1. Rappeler l'équation de Rayleigh pour une perturbation de la forme $w_3(z)e^{i\hat{\alpha}(x-\hat{c}t)}$ et préciser les conditions aux limites en $z \to \pm\infty$.

2. Le problème aux valeurs propres peut se résoudre analytiquement dans le cas d'un profil linéaire par morceaux approchant l'expression (2). Par exemple, en choisissant

$$\hat{U}(z) = \begin{cases} 1 + R_u & z \geq 1 \\ 1 + R_u z & -1 \leq z \leq +1 \\ 1 - R_u & z \leq -1 \end{cases} \tag{3}$$

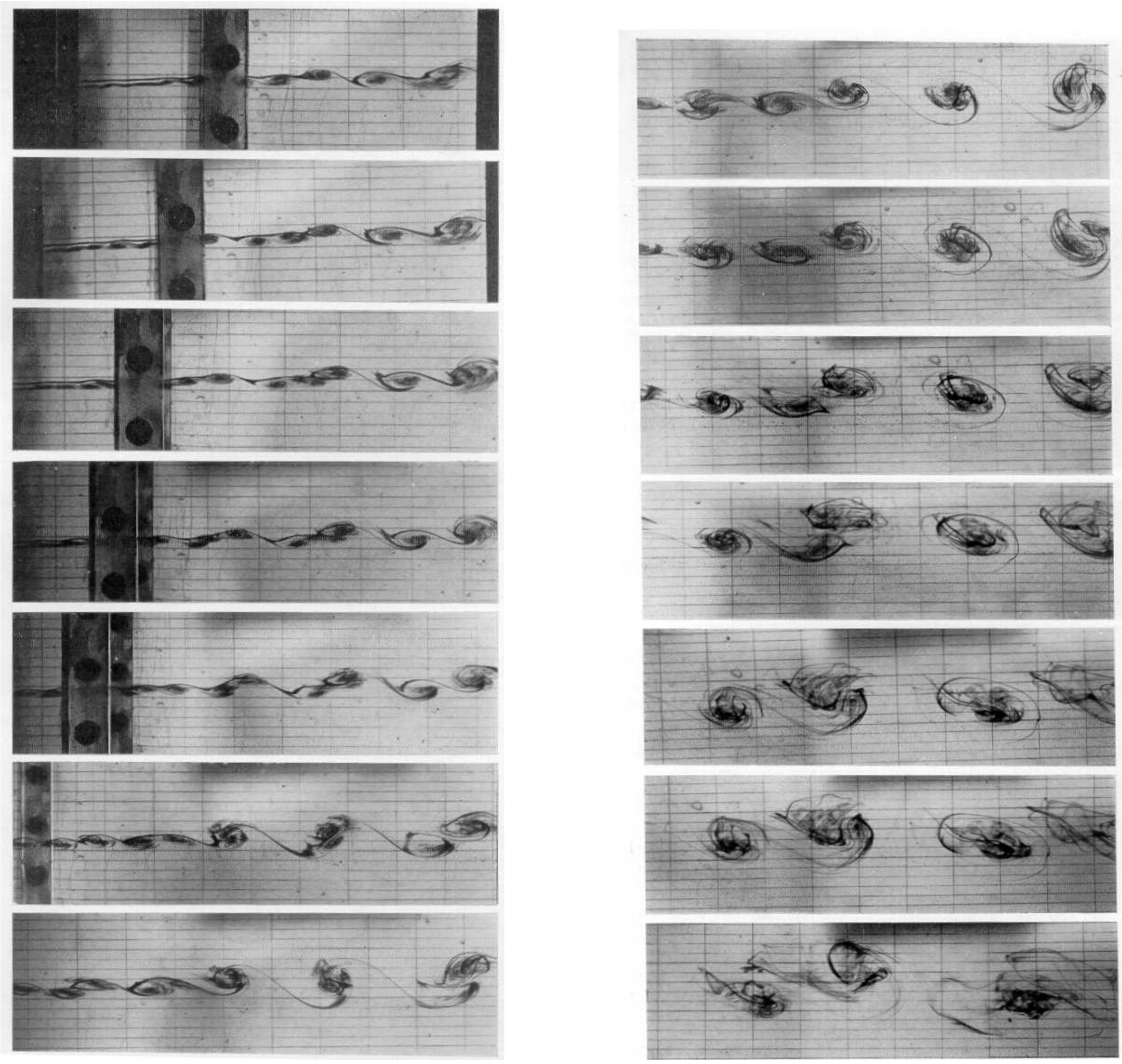

Fig. 2 – Visualisation de l'appariement de tourbillons dans une couche de mélange plane, tiré de Winant & Browand, *J. Fluid Mech.* (1974)

la relation de dispersion peut alors se mettre sous la forme suivante (se reporter à la section 2.3 du chapitre 3 du cours),

$$(\hat{c}-1)^2 + \frac{R_u^2}{4\hat{\alpha}^2}\left[e^{-4\hat{\alpha}} - (2\hat{\alpha}-1)^2\right] = 0 \tag{4}$$

Tracer numériquement le taux d'amplification $\hat{\alpha}\hat{c}_i$ en fonction de $\hat{\alpha}$ pour $\hat{c}_r = 1$ et commenter cette courbe.

3. La suite de ce travail est consacrée à la résolution numérique de l'équation de Rayleigh pour le profil (2) avec une méthode de tir. Montrer que l'équation de Rayleigh peut s'écrire sous la forme d'un système d'équations différentielles du premier ordre:

$$\begin{cases} f' = g \\ g' = \left(\hat{\alpha}^2 + \dfrac{1}{\hat{U}-\hat{c}}\dfrac{d^2\hat{U}}{dz^2}\right) f \end{cases} \tag{5}$$

en précisant la signification des fonctions complexes f et g, ainsi que les conditions aux limites que doivent vérifier ces fonctions en $z \to \pm\infty$.

4. On utilise une méthode de tir basée sur un algorithme de Runge-Kutta pour intégrer le système différentiel (5) afin de déterminer numériquement la relation $\hat{c} = \hat{c}(\hat{\alpha})$. On pourra par exemple appeler la fonction *ode45.m* de Matlab. L'intervalle d'intégration peut être réduit tel que $z^- = -10 \leq z \leq z^+ = +10$ (à justifier). Pour une valeur de α fixée, on impose arbitrairement $f = 1$ en z^-. La condition aux limites en z^- est alors vérifiée en imposant $g = \hat{\alpha} f$. On se donne ensuite une première valeur de $\hat{c}$, et on intègre l'équation de Rayleigh sous la forme (5) jusqu'à z^+. Sauf à être très chanceux pour avoir deviné la valeur de $\hat{c}$, on ne satisfait pas la condition aux limites en z^+, à savoir $B(\hat{c}) = g + \hat{\alpha} f|_{z^+} = 0$, et on doit reprendre l'intégration en essayant une nouvelle valeur de $\hat{c}$. Àfin d'optimiser la recherche de la vitesse $\hat{c}$, on peut appliquer un algorithme de la sécante ou encore de Newton-Raphson pour résoudre $B(\hat{c}) = 0$. La convergence est alors obtenue en quelques itérations seulement. Pour le choix initial de $\hat{c}$, on pourra utiliser la solution (4) du problème approché, et procéder ensuite par continuation de la courbe $\hat{c} = \hat{c}(\hat{\alpha})$. Écrire le squelette de l'algorithme.

5. ***Travail à réaliser en autonomie***.

- Écrire un script sous Matlab (ou équivalent) mettant en œuvre l'algorithme précédent.
- Tracer la courbe d'amplification pour $R_u = 1$.
- Tracer la fonction propre pour le mode le plus amplifié.
- Comparer le taux d'amplification de la solution complète à celui du problème approché (profil de vitesse linéaire par morceaux).

Prendre soin de commenter tous vos résultats; toute initiative est par ailleurs la bienvenue !