Turbulence & Instabilités - ECL S7 FLE-a1
http://acoustique.ec-lyon.fr

Travaux dirigés

Critère de Rayleigh (1880)

On se propose ici de prolonger le TD4 sur la résolution numérique de l'équation de Rayleigh, et de démontrer le critère de Rayleigh, un résultat simple et important. On conserve les notations du TD 4, en considérant des perturbations non visqueuses $\hat{u}_y e^{ik(x-ct)}$ dans le cadre de la stabilité linéaire, solutions de l'équation de Rayleigh :

$$\frac{d^2\hat{u}_y}{dy^2} - \left(k^2 + \frac{1}{u_0 - c}\frac{d^2 u_0}{dy^2}\right)\hat{u}_y = 0 \tag{1}$$

1. Former l'équation suivante $\hat{u}_y^\star \times (1) - \hat{u}_y \times (1)^\star = 0$ où $*$ désigne le conjugué complexe.

2. Intégrer l'expression trouvée dans la direction transverse y, et montrer que l'on obtient

$$c_i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{u}_y|^2}{|u_0 - c|^2}\frac{d^2 u_0}{dy^2} dy = 0$$

3. En déduire que d^2u_0/dy^2 doit au moins changer de signe une fois, et qu'une instabilité non visqueuse ne peut donc se développer qu'en présence d'un point d'inflexion sur le profil de la vitesse moyenne (condition nécessaire).

4. Si $(k, c, \hat{u}_y)$ est solution de l'équation de Rayleigh (1), que dire de $(k, c^\star, \hat{u}_y^\star)$

Signal gaussien et modélisation de l'intermittence

1. On considère un signal $u = \bar{U} + u'$ avec la fluctuation u' centrée. Vérifier que pour un signal gaussien u', le coefficient de dissymétrie vaut $S_{u'} = 0$ et le coefficient d'aplatissement vaut $T_{u'} = 3$.

   On pourra utiliser la formule d'intégration suivante

$$\int_0^\infty \xi^n e^{-a\xi^2} dx = \frac{1}{a^{(n+1)/2}}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

   où Γ est la fonction Gamma, vérifiant $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ et $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour $x > 0$.

2. Le comportement d'une variable turbulente en un point est souvent intermittent, c'est-à-dire avec une sucession de phases turbulentes entrecoupées de phases plus calmes. C'est notamment le cas près des bords libres d'écoulements comme les couches limites, les jets et les sillages. On peut modéliser ce comportement en définissant une fonction d'intermittence I en un point donné $\boldsymbol{x}$ d'un bord libre, par $I(t) = 1$ si l'écoulement est turbulent, et $I(t) = 0$ si l'écoulement est non turbulent et irrotationnel (entraînement du fluide sain). Le facteur d'intermittence est alors définit par

$$\gamma = \bar{I} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T I(t)dt$$

   et correspond au temps en moyenne sur lequel on observe un signal turbulent au point $\boldsymbol{x}$.

En supposant que le signal turbulent $u_T = \bar{U}_T + u'_T$ est gaussien d'écart type σ_T, et est observé pendant une fraction γ du temps, alors que le signal du fluide entraîné $u_P = \bar{U}_P + u'_P$ est observé pendant une fraction $1-\gamma$ du temps, montrer que la variance du signal complet vaut $\sigma^2 = \gamma\sigma_T^2$ et que le coefficient d'aplatissement vaut $T = 3/\gamma$ lorsque $u'_P = 0$.

3. Exprimer alors la densité de probabilité en fonction de σ et γ, et la comparer à une distribution gaussienne de même variance.

4. Montrer que dans un cas plus général entre un signal turbulent caractérisé par $\bar{U}_T$ et $\sigma_T^2 = \overline{u'^2_T}$, et un signal irrotationnel caractérisé par $\bar{U}_P$ et $\sigma_P^2 = \overline{u'^2_P}$, on a pour la variance du signal complet

$$\overline{u'^2} = \gamma\overline{u'^2_T} + (1-\gamma)\overline{u'^2_P} + \gamma(1-\gamma)(\bar{U}_T - \bar{U}_P)^2$$

Critère de Rayleigh (1880)

1. En partant de l'équation de Rayleigh,

$$\frac{d^2\hat{u}_y}{dy^2} - \left(k^2 + \frac{1}{u_0 - c}\frac{d^2u_0}{dy^2}\right)\hat{u}_y = 0 \tag{2}$$

on peut former $\hat{u}_y^\star \times (2)$ et $\hat{u}_y \times (11)^\star$ respectivement,

$$\begin{cases} \hat{u}_y^\star \dfrac{d^2\hat{u}_y}{dy^2} - k^2\hat{u}_y\,\hat{u}_y^\star - \dfrac{1}{u_0 - c}\dfrac{d^2u_0}{dy^2}\hat{u}_y\,\hat{u}_y^\star = 0 \\ \hat{u}_y \dfrac{d^2\hat{u}_y^\star}{dy^2} - k^2\hat{u}_y\,\hat{u}_y^\star - \dfrac{1}{u_0 - c^\star}\dfrac{d^2u_0}{dy^2}\hat{u}_y\,\hat{u}_y^\star = 0 \end{cases}$$

On obtient alors par soustraction,

$$\hat{u}_y^\star \frac{d^2\hat{u}_y}{dy^2} - \hat{u}_y \frac{d^2\hat{u}_y^\star}{dy^2} - \frac{2ic_i}{|u_0 - c|}\frac{d^2u_0}{dy^2}|\hat{u}_y|^2 = 0$$

2. On peut observer que la première partie de l'expression précédente se met sous la forme :

$$\hat{u}_y^\star \frac{d^2\hat{u}_y}{dy^2} - \hat{u}_y \frac{d^2\hat{u}_y^\star}{dy^2} = \frac{d}{dy}\left(\hat{u}_y^\star \frac{d\hat{u}_y}{dy}\right) - \frac{d}{dy}\left(\hat{u}_y \frac{d\hat{u}_y^\star}{dy}\right)$$

Par intégration dans la direction transverse, en tenant compte des conditions aux limites, on obtient :

$$c_i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|u_0 - c|}\frac{d^2u_0}{dy^2}|\hat{u}_y|^2\,dy = 0$$

3. Pour assurer cette condition avec $c_i \neq 0$, il faut nécessaireement que d^2u_0/dy^2 change de signe au moins une fois sur l'intervalle d'intégration. Il est donc nécessaire d'avoir un point d'inflexion dans le profil de vitesse pour observer une onde d'instabilité de Kelvin-Helmholtz.

   On remarque qu'un profil de couche limite comme la solution laminaire de Blasius ne comporte pas de point d'inflexion : effet déstabilisant de la viscosité (non abordé en cours).

4. Si $(k, c, \hat{u}_y)$ est solution de l'équation de Rayleigh, on note par conjugaison de l'équation de Rayleigh (2) que $(k, c^\star, \hat{u}_y^\star)$ est également solution.

Signal gaussien et modélisation de l'intermittence

1. L'expression de la densité de probabilité $p(\xi)$ et du moment m_k d'ordre k pour une variable aléatoire gaussienne ξ de moyenne μ et d'écart type σ, est donnée par

$$p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad m_k = \int_{-\infty}^{+\infty}(\xi-\mu)^k p(\xi)d\xi$$

En se servant du formulaire, on a pour une variable gaussienne centrée ξ les valeurs suivantes des trois premiers moments,

$$\begin{aligned} m_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty}\xi^2 p(\xi)d\xi = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}(2\sigma^2)^{3/2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma}2\sqrt{2}\sigma^3\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sigma^2 \\ m_3 &= \int_{-\infty}^{+\infty}\xi^3 p(\xi)d\xi = 0 \\ m_4 &= \int_{-\infty}^{+\infty}\xi^4 p(\xi)d\xi = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}(2\sigma^2)^{5/2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma}2^2\sqrt{2}\sigma^5\frac{1}{2}\frac{3\sqrt{\pi}}{4} = 3\sigma^4 \end{aligned}$$

où $\Gamma(5/2) = (3/2)\Gamma(3/2) = 3\sqrt{\pi}/4$. On obtient donc pour la variance $m_2 = \sigma^2$, pour le coefficient de dissymétrie $S = m_3/\sigma^{3/2} = 0$ et pour le coefficient d'aplatissement $T = m_4/\sigma^2 = 3$.

2. On peut définir une fonction d'intermittence en un point donné $\boldsymbol{x}$ d'un bord libre (jet, sillage, couche limite) par $I(t) = 1$ si l'écoulement est turbulent, et $I(t) = 0$ si l'écoulement est non turbulent et irrotationnel (entraînement du fluide sain). Le facteur d'intermittence est alors définit par la valeur moyenne de I

$$\gamma = \bar{I} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T I(t)dt$$

et correspond à la partie T_T du temps T sur lequel on observe un signal turbulent en moyenne au point $\boldsymbol{x}$. On a donc $\gamma = T_T/T$. Par ailleurs, on a $\overline{I^n} = \gamma$ et bien évidement $I(1-I) = 0$.

Dans la région turbulente, la vitesse $u = \bar{U}_T + u'_T$ suit une loi gaussienne de moyenne $\bar{U}_T$ et d'écart type σ_T, et dans la région d'entraînement où l'écoulement est potentiel, la vitesse $u = \bar{U}_P + u'_P$ suit une loi gaussienne de moyenne $\bar{U}_P$ et d'écart type σ_P. On peut ainsi définir les deux signaux conditionels suivant : $u_T = Iu$ et $u_P = (1-I)u$, qui ont pour moyenne :

$$\overline{Iu} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T Iudt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{T_T} udt = \frac{T_T}{T}\bar{U}_T$$

soit encore $\bar{U}_T = \overline{Iu}/\gamma$, et de la même manière $\bar{U}_P = \overline{(1-I)u}\,/(1-\gamma)$. La moyenne du signal mesuré au point d'observation $\boldsymbol{x}$ est ainsi donnée par,

$$\bar{U} = \gamma\bar{U}_T + (1-\gamma)\bar{U}_P$$

et la fluctuation de vitesse u' peut s'écrire formellement comme,

$$u' = I(\bar{U}_T + u'_T) + (1-I)(\bar{U}_P + u'_P) - \bar{U}$$

ce qui permet de calculer ensuite la variance du signal observé.

Variante 1 En notant que $\overline{u'^2} = \overline{u^2} - \bar{U}^2$ avec donc $u = Iu_T + (1-I)u_P$, on obtient plus rapidement l'expression cherchée :

$$\begin{aligned}
\overline{u'^2} &= \overline{\left[I(\bar{U}_T + u'_T) + (1-I)(\bar{U}_P + u'_P)\right]^2} - \bar{U}^2 \\
&= \gamma\overline{u_T'^2} + \gamma\bar{U}_T^2 + (1-\gamma)\overline{u_P'^2} + (1-\gamma)\bar{U}_P^2 - \bar{U}^2 \\
&= \gamma\overline{u_T'^2} + (1-\gamma)\overline{u_P'^2} + \gamma\bar{U}_T^2 + (1-\gamma)\bar{U}_P^2 - \gamma^2\bar{U}_T^2 - (1-\gamma)^2\bar{U}_P^2 - 2\gamma(1-\gamma)\bar{U}_P\bar{U}_T \\
&= \gamma\overline{u_T'^2} + (1-\gamma)\overline{u_P'^2} + \gamma(1-\gamma)\bar{U}_T^2 + \gamma(1-\gamma)\bar{U}_P^2 - 2\gamma(1-\gamma)\bar{U}_P\bar{U}_T \\
&= \gamma\overline{u_T'^2} + (1-\gamma)\overline{u_P'^2} + \gamma(1-\gamma)(\bar{U}_T - \bar{U}_P)^2
\end{aligned}$$

Variante 2. On développe formellement le carré de l'expression de u',

$$u'^2 = \left[I(\bar{U}_T + u'_T) + (1-I)(\bar{U}_P + u'_P)\right]^2 + \bar{U}^2 - 2\bar{U}\left[I(\bar{U}_T + u'_T) + (1-I)(\bar{U}_P + u'_P)\right]$$

En prenant la moyenne statistique, et en développant cette expression, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\overline{u'^2} &= \gamma\overline{u_T'^2} + \gamma\bar{U}_T^2 + (1-\gamma)\overline{u_P'^2} + (1-\gamma)\bar{U}_P^2 + \bar{U}^2 - 2\gamma\bar{U}\,\bar{U}_T - 2(1-\gamma)\bar{U}\,\bar{U}_P \\
&= \gamma\overline{u_T'^2} + (1-\gamma)\overline{u_P'^2} + \gamma\bar{U}_T^2 + (1-\gamma)\bar{U}_P^2 + \gamma^2\bar{U}_T^2 + (1-\gamma)^2\bar{U}_P^2 + 2\gamma(1-\gamma)\bar{U}_P\bar{U}_T \\
&\quad -2\gamma\left[\gamma\bar{U}_T + (1-\gamma)\bar{U}_P\right]\bar{U}_T - 2(1-\gamma)\left[\gamma\bar{U}_T + (1-\gamma)\bar{U}_P\right]\bar{U}_P \\
&= \gamma\overline{u_T'^2} + (1-\gamma)\overline{u_P'^2} + \left[\gamma + \gamma^2 - 2\gamma^2\right]\bar{U}_T^2 + \left[(1-\gamma) + (1-\gamma)^2 - 2(1-\gamma)^2\right]\bar{U}_P^2 \\
&\quad + [2\gamma(1-\gamma) - 2\gamma(1-\gamma) - 2\gamma(1-\gamma)]\bar{U}_P\bar{U}_T \\
&= \gamma\overline{u_T'^2} + (1-\gamma)\overline{u_P'^2} + \gamma(1-\gamma)\bar{U}_T^2 + \gamma(1-\gamma)\bar{U}_P^2 - 2\gamma(1-\gamma)\bar{U}_P\bar{U}_T \\
&= \gamma\overline{u_T'^2} + (1-\gamma)\overline{u_P'^2} + \gamma(1-\gamma)(\bar{U}_T - \bar{U}_P)^2
\end{aligned}
$$

On retrouve cette dernière expression dans Pope,[6] voir l'Éq. (5.306) page 170, et dans Antonia *et al.*,[1] page 465.

Pour le cas où $\bar{U}_P = 0$ et $u_P' = 0$, on note que $\bar{U} = \gamma\bar{U}_T$ et $\overline{u'^2} = \gamma\overline{u_T'^2} + \gamma(1-\gamma)\bar{U}_T^2$.

On note également que l'on peut retrouver directement ce résultat à partir de $u' = I(\bar{U}_T + u_T') - \gamma\bar{U}_T$. En effet,

$$\overline{u'^2} = \gamma\bar{U}_T^2 + \gamma\overline{u_T'^2} + \gamma^2\bar{U}_T^2 - 2\gamma^2\bar{U}_T^2 = \gamma\overline{u_T'^2} + \gamma(1-\gamma)\bar{U}_T^2$$

$$u' = I(\bar{U}_T + u_T') - \bar{U}$$

En supposant que $\bar{U}_L = 0$ et $u_L' = 0$ pour simplifier l'algèbre, on peut également calculer le coefficient d'aplatissement T facilement. En notant que

$$
\begin{aligned}
\overline{u'^4} &= \gamma\overline{u_T'^4} + \gamma\bar{U}_T^4 - \bar{U}^4 \\
&= \gamma\overline{u_T'^4} + \gamma(1-\gamma^3)\bar{U}_T^4
\end{aligned}
$$

on en déduit que $T = \gamma 3\sigma_T^4/(\gamma\sigma_T^2)^2 = 3/\gamma$. Il est donc possible de déterminer implicitement le coefficient d'interminence γ en caractérisant les propriétés statistiques du signal complet.

Interpretation (Batchelor,[2] page 184)

$$p(\zeta) = \begin{cases} (1-\gamma)\delta(\zeta) & (\zeta = 0) \\ \dfrac{\gamma}{\sqrt{2\pi}\sigma_T} e^{-\zeta^2/(2\sigma_T^2)} = \dfrac{\gamma^{3/2}}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\gamma\zeta^2/(2\sigma^2)} & (\zeta \neq 0) \end{cases} \qquad (\zeta = u_1')$$

References

[1] Antonia, R.A., Prabhu, A. & Stephenson, S.E., 1975, Conditionally sampled measurements in a heated turbulent jet *J. Fluid Mech.*, **72**(3), 455-480.

[2] Batchelor, G.K., 1953, *The theory of homogeneous turbulence*, Cambridge University Press, Cambridge.

[3] Corrsin, S. and Kistler, A.L., 1954, The free-stream boundaries of turbulent flows, NACA TN-3133, 1-109.

[4] Dopazo, C., 1977, On conditioned averages for intermittent turbulent flows, *J. Fluid Mech.*, **81**(3), 433-438.

[5] Libby, P.A., 1975, On the prediction of intermittent turbulent flows, *J. Fluid Mech.*, **68**(2), 273-295

[6] Pope, S.B., 2000, *Turbulent flows*, Cambridge University Press, New York.