Instabilité des écoulements et introduction à la turbulence - ECL S7 FLE-a1
http://acoustique.ec-lyon.fr

Travaux dirigés

Critère de Rayleigh (1880)

On se propose ici de prolonger le TD4 sur la résolution numérique de l'équation de Rayleigh, et de démontrer le critère de Rayleigh, un résultat important pour la stabilité des écoulements non visqueux. On conserve les notations du TD 4, en considérant des perturbations non visqueuses $\hat{u}_y e^{ik(x-ct)}$ dans le cadre de la stabilité linéaire, solutions de l'équation de Rayleigh :

$$\frac{d^2\hat{u}_y}{dy^2} - \left(k^2 + \frac{1}{u_0 - c}\frac{d^2u_0}{dy^2}\right)\hat{u}_y = 0 \tag{1}$$

1. Former l'équation suivante $\hat{u}_y^\star \times (1) - \hat{u}_y \times (1)^\star = 0$ où $*$ désigne le conjugué complexe.
2. Intégrer l'expression trouvée dans la direction transverse y, et montrer que l'on obtient

$$c_i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{u}_y|^2}{|u_0 - c|^2}\frac{d^2u_0}{dy^2}dy = 0$$

3. En déduire que d^2u_0/dy^2 doit au moins changer de signe une fois et qu'une instabilité non visqueuse ne peut donc se développer qu'en présence d'un point d'inflexion sur le profil de la vitesse moyenne (condition nécessaire).
4. Si $(k, c, \hat{u}_y)$ est solution de l'équation de Rayleigh (1), que dire de $(k, c^\star, \hat{u}_y^\star)$?

Signal gaussien et modélisation de l'intermittence

1. On considère un signal $u = \bar{U} + u'$ avec la fluctuation u' centrée. Vérifier que pour un signal gaussien u', le coefficient de dissymétrie vaut $S_{u'} = 0$ et le coefficient d'aplatissement vaut $T_{u'} = 3$.

   On pourra utiliser la formule d'intégration suivante

$$\int_0^\infty \xi^n e^{-a\xi^2} dx = \frac{1}{a^{(n+1)/2}}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

   où Γ est la fonction Gamma, vérifiant $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ et $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour $x > 0$.

2. Le comportement d'une variable turbulente en un point est souvent intermittent, c'est-à-dire avec une sucession de phases turbulentes entrecoupées de phases plus calmes. C'est notamment le cas près des bords libres d'écoulements comme les couches limites, les jets et les sillages. On peut modéliser ce comportement en définissant une fonction d'intermittence I en un point donné $\boldsymbol{x}$ d'un bord libre, par $I(t) = 1$ si l'écoulement est turbulent, et $I(t) = 0$ si l'écoulement est non turbulent et irrotationnel (entraînement du fluide externe). Le facteur d'intermittence est alors définit par

$$\gamma = \bar{I} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T I(t)dt$$

   et correspond au temps en moyenne sur lequel on observe un signal turbulent au point $\boldsymbol{x}$.

En supposant que le signal turbulent $u_T = \bar{U}_T + u'_T$ est gaussien d'écart type σ_T, et est observé pendant une fraction γ du temps, alors que le signal du fluide entraîné $u_P = \bar{U}_P + u'_P$ est observé pendant une fraction $1-\gamma$ du temps, montrer que la variance du signal complet observé $u = Iu_T + (1-I)u_P$ vaut $\sigma^2 = \gamma\sigma_T^2$ et que le coefficient d'aplatissement vaut $T = 3/\gamma$ lorsque $u'_P = 0$, c'est-à-dire lorsque le fluide externe entraîné reste laminaire.

3. Exprimer alors la densité de probabilité en fonction de σ et γ ; la comparer à une distribution gaussienne de même variance.

4. Montrer que dans un cas plus général entre un signal turbulent caractérisé par $\bar{U}_T$ et $\sigma_T^2 = \overline{u_T'^2}$, et un signal irrotationnel caractérisé par $\bar{U}_P$ et $\sigma_P^2 = \overline{u_P'^2}$, on a pour la variance du signal complet

$$\overline{u'^2} = \gamma\overline{u_T'^2} + (1-\gamma)\overline{u_P'^2} + \gamma(1-\gamma)(\bar{U}_T - \bar{U}_P)^2$$